I

הגשת משימה - אלגברה לינארית

1 שאלות הוכחות:

א.

נכפול משמאל ב-$(A\cdot B)$

$$(AB)^{-1} = B^{-1}\cdot A^{-1}$$

$$(A\cdot B)(AB)^{-1} = (AB)B^{-1}\cdot A^{-1}$$

אסוציאטיביות

$$I = A(BB^{-1})\cdot A^{-1}$$

$$I = A\cdot I\cdot A^{-1}$$

$$I = A\cdot A^{-1}$$

$I = I$ נכון

ב.

נכפול משמאל ב-A^t

$$(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$$

$$A^t\cdot (A^t)^{-1} = A^t\cdot (A^{-1})^t$$

לפי חוק t

$$I = (A^{-1}\cdot A)^t$$

$$I = I^t$$

$I = I$ נכון

ג. משפט- אם A ריבועית הפיכה, אזי הפעולות האלמנטריות המביאות את A למטריצה היחידה I יביאו באותו סדר את I למטריצה ההופכית A^{-1}.

הוכחה- תהי A מטריצה ריבועית הפיכה מסדר n. לפי משפט A שקולת שורות למטריצה היחידה מסדר n I_n. לכן ניתן להגיע ל-I מ-A ע"י סדרה סופית של פעולות אלמנטריות בשורות:

$$A \xrightarrow{f_1} (\ ) \xrightarrow{f_2} (\ ) \xrightarrow{f_n} I$$

נסמן ב-E_i את המטריצות האלמנטריות המתאימות לפעולות האלמנטריות השונות f_i $\quad E_i = f_i(I)$, $1\le i\le n$

להפעיל את סדרת הפעולות האלמנטריות $f_1 \dots f_n$ לפי הסדר על A כדי לקבל את I שקול לכפול משמאל את A בסדרת המטריצות האלמנטריות המתאימות $E_1, E_2 \dots E_n$ ולכן:

II

$$E_n \cdot E_{(n-1)} \cdots E_2 \cdot E_1 \cdot A = I$$

מכיוון ש-A הפיכה, כלומר, קיימת A^{-1} כך ש: $A\cdot A^{-1} = A^{-1}\cdot A = I$

$\Downarrow$ נכפיל מימין את 2 האגפים ב-A^{-1}

$$(E_n \cdot E_{(n-1)} \cdots E_2 \cdot E_1 \cdot A) A^{-1} = I \cdot A^{-1}$$

$$(E_n \cdot E_{(n-1)} \cdots E_2 \cdot E_1) A \cdot A^{-1} = A^{-1}$$

$$(E_n \cdot E_{(n-1)} \cdots E_2 \cdot E_1) \cdot I = A^{-1}$$

מש"ל

(2) <u>הפיכות ודטרמיננטים</u>

א. מטריצה ריבועית A היא הפיכה אמ"מ $|A|\neq 0$

הוכחה - <u>כיוון 1</u> מכיוון ש-A הפיכה, צ.ל. $|A|\neq 0$.

A הפיכה ולכן קיימת A^{-1} כך ש:

$A\cdot A^{-1} = A^{-1}\cdot A = I$

$|A\cdot A^{-1}| = |I| = 1$

$|A|\cdot|A^{-1}| = 1$

לפי חוק הדטרמיננטים $\left(\Longrightarrow |A| = \frac{1}{|A^{-1}|} \right)$

$\Downarrow$

$|A| \neq 0$ מש"ל

<u>כיוון 2</u> מכיוון ש-$|A|\neq 0$ צ.ל. A הפיכה.

נניח בשלילה ש-A אינה הפיכה, ולפי מה שלמדנו $r(A)<n$ ולכן ניתן לדרג את A ע"י פעולות אלמנטריות מסוג 3 ($R_i \to R_i + cR_j$, $i\neq j$, $c\neq 0$) ונקבל $\tilde{A}$ שבה יש לפחות שורת אפסים אחת (לפי הגדרת הדרגה). $\tilde{A}$ שקולה שורות ל-A ע"י פעולות אלמנטריות מסוג 3 ולכן - $|A| = |\tilde{A}|$, כלומר ב-$\tilde{A}$ יש שורת אפסים ולכן $|\tilde{A}|=0$

$\Downarrow$

$|A|=0$ סתירה!

מש"ל

III

ב. תהא A מטריצה ריבועית והפיכה, אזי: $A^{-1} = \frac{1}{|A|}\cdot adjA$.

משתמשים במשפט הבא $A\cdot(adjA) = (adjA)\cdot A = |A|\cdot I_n$ (עבור מטריצה ריבועית $A\in R^{n\times n}$)

$$(adjA)\cdot A = A\cdot(adjA) = |A|\cdot I_n \;/\cdot \frac{1}{|A|}$$

$$\left(\frac{1}{|A|}\cdot adjA\right)\cdot A = I \;/\cdot$$ נכפול מימין ב-A^{-1}

$$\left(\frac{1}{|A|}\cdot adjA\right)\cdot A\cdot A^{-1} = I\cdot A^{-1}$$

$$\left(\frac{1}{|A|}\cdot adjA\right)\cdot I = A^{-1}$$

אזי $\frac{1}{|A|}\cdot adjA = A^{-1}$

ג. משפט קרמר לפתרון מערכת משוואות ריבועית בת n משוואות ב-n נעלמים.

הוכחה - למערכת $A\cdot x=b$ ($A\in R^{n\times n}$) קיים פתרון יחיד אם

$r(A)=n$, כלומר, עפ"י משפט, קיים פתרון יחיד אם A הפיכה

ולפי משפט A הפיכה אמ"מ $|A|\neq 0$ ולכן $|A|\neq 0$.

$\Downarrow$

למערכת יש פתרון יחיד אמ"מ $|A|\neq 0$

נניח ש-A הפיכה, כלומר, $|A|\neq 0$ ונמצא את הפתרון:

$$Ax=b \;/\cdot A^{-1}$$ משמאל

$$A^{-1}\cdot A\cdot x = A^{-1}\cdot b$$

$$I\cdot x = A^{-1}\cdot b$$

לפי משפט: $A^{-1}=\frac{1}{|A|}\cdot adjA$

$$\begin{cases} x = A^{-1}\cdot b \\ x = \frac{1}{|A|}\cdot adjA\cdot b \end{cases}$$

$$x_i = \frac{1}{|A|}\cdot(A_{1i}, A_{2i}, A_{3i} \dots A_{ni})\cdot\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \frac{1}{|A|}\cdot\sum_{k=1}^{n}(A_{ki}\cdot b_k) \qquad 1\le i\le n$$

לפי הגדרה ע"פ ה-i

$$\Delta_i = (-1)^{1+i}\cdot b_1|M_{1i}| + (-1)^{2+i}\cdot b_2|M_{2i}| \cdots (-1)^{n+i}\cdot b_n|M_{ni}|$$

$$= \underbrace{\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+i}|M_{ki}|}_{A_{ki}}\cdot b_k = \sum_{k=1}^{n} A_{ki}\cdot b_k$$

$$\Delta_i = \begin{vmatrix} a_{11} \dots a_{1,i-1} & b_1 & a_{1,i+1} \dots a_{1n} \\ \vdots & b_2 & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} \dots a_{n,i-1} & b_n & a_{n,i+1} \dots a_{nn} \end{vmatrix}$$

$\Downarrow$

$x_i = \frac{\Delta_i}{|A|}$ מש"ל

3. מרחבים וקטוריים ותתי מרחבים

א. תת קבוצה W לא ריקה של מ.ו V מעל שדה F תקרא תת מרחב של V אמ"מ היא סגורה תחת חיבור וקטורים ותחת כפל וקטור בסקלר.

הוכחה: כיוון 1- נניח W תת מרחב של V

צ"ל- W סגורה תחת חיבור ותחת כפל בסקלר.

הוכחה- W היא ת"מ של V ולכן מקיימת עפ"י ההגדרה את כל 10 האקסיומות של מרחב וקטורי ובכללן גם סגירות תחת חיבור וכפל בסקלר. מש"ל

כיוון 2- נניח W תת קבוצה לא ריקה של V הסגורה לחיבור וסגורה תחת כפל בסקלר.

צ"ל- W ת"מ של V.

הוכחה- נניח ש-W היא תת קבוצה של V הסגורה תחת חיבור וכפל בסקלר ולכן נותר להוכיח רק 8 מתוך 10 האקסיומות. מאחר ו-W היא תת קבוצה של V, היא "מקבלת" בירושה את אקסיומות 2,3,7,8,9,10 ולכן נותר להוכיח:

5- קיום איברים נגדיים: לכל $w \in W$ קיים ב-W איבר $-w$ המקיים $w+(-w)=0_V$.

?

4- קיום איבר ניטרלי תחת חיבור: $\exists 0_V$ $\forall u \in W$

$u+0_V=0_V+u=u$

$u,(-u)\in W$

$u+(-u)=0_V \in W$ כיון ש-W סגור תחת חיבור

מש"ל

V

ב. חיתוך של תתי מרחבים הוא תת מרחב.

הוכחה - יהיו W, V תתי מרחבים של V מרחב וקטורי.

צ"ל - $V \cap W$ תת מרחב של V

הוכחה - א. קיים איבר ה- 0_v:

$$\text{וגם}\begin{cases} 0_v \in V & \text{מין תמ"ו } V \\ 0_v \in W & \text{מין תמ"ו } W \end{cases}$$

$\Downarrow$

$0_v \in V \cap W$ מש"ל

ב. סגירות תחת חיבור: $a+b \in V \cap W$ $\forall a,b \in V \cap W$

$a,b \in V \cap W$

הגדרת החיתוך $\Downarrow$

$a,b \in V \quad \wedge \quad a,b \in W$

כי תת מרחב סגור תחת חיבור $\Downarrow$ $\qquad$ $\Downarrow$ כי תת מרחב סגור תחת חיבור

$a+b \in V \quad \wedge \quad a+b \in W$

$\Downarrow$ הגדרת החיתוך

$a+b \in V \cap W$ מש"ל

ג. סגירות תחת כפל בסקלר: $\forall a \in V \cap W \; \forall \alpha \in F$

$\alpha a \in V \cap W$

$a \in V \cap W$

הגדרת החיתוך $\Downarrow$

$a \in V \quad \wedge \quad a \in W$

$\Downarrow \qquad \Downarrow$ כי V ו-W תתי מרחבים סגורים תחת כפל בסקלר

$\forall \alpha \in F \; \alpha a \in V \quad \wedge \quad \forall \alpha \in F \; \alpha a \in W$

$\Downarrow$ הגדרת החיתוך

$\forall \alpha \in F \quad \alpha a \in V \cap W$

$\Downarrow$

$V \cap W$ תת קבוצה של V והוכחנו כי $V \cap W \neq \phi$ והוכחנו סגירות תחת חיבור ותחת כפל בסקלר $\Leftarrow$ עז משפט $V \cap W$ תמ"ו של V.

II

6. סכום של תתי מרחבים הוא תת מרחב.

נתון- $S_1, S_2 \dots S_n$ תתי מרחבים של V. לפי הגדרת הסכום נוכיח ש- S הוא תת קבוצה של V.

היות ו-S הוא תת קבוצה של V עלינו להוכיח:

א) $S \neq \emptyset$ ובפרט $\{0_v\} \in S$.

S_i תת מ"ו V $\leftarrow$ $\{0_v\} \in S_i$ $\quad i=1,2,3\dots n \quad \forall S_i$

$$\Downarrow$$

$$S = \{V = v_1 + v_2 \dots + v_n = \sum_{i=1}^{n} v_i \mid v_i \in S_i \quad i=1,2\dots n\} \leftarrow \text{הגדרת הסכום}$$

$$V = \underset{S_1}{\underset{\cap}{0_v}} + \underset{S_2}{\underset{\cap}{0_v}} + \underset{S_3}{\underset{\cap}{0_v}} \dots + \underset{S_n}{\underset{\cap}{0_v}} = 0_v \in S$$

ב) סגירות תחת חיבור:

צ"ל: $\forall a,b \in S \quad (a+b) \in S$

$$a \in S \quad a = \sum_{i=1}^{n} a_i \;,\; a_i \in S_i$$

$$b = \sum_{i=1}^{n} b_i \;,\; b_i \in S_i$$

$$\Downarrow$$

$$a+b = \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{a_i + b_i}_{v_i} = \sum_{i=1}^{n} v_i \;,\; v_i \in S_i \leftarrow \text{כי סגירות ב-}S_i\text{ תת מ"ו}$$

$$\Downarrow$$

$$a+b = \sum_{i=1}^{n} v_i \in S \leftarrow \text{לפי הגדרת הסכום.}$$

ג) סגירות תחת כפל בסקלר:

צ"ל: $\forall \alpha \in F \quad \forall a \in S \rightarrow \alpha a \in S$

$$a \in S \Rightarrow a = \sum_{i=1}^{n} a_i \;,\; a_i \in S_i$$

$$\alpha a = \alpha \sum_{i=1}^{n} \underset{S_i}{\underset{\cap}{a_i}} = \sum_{i=1}^{n} \underset{S_i}{\underset{\cap}{\alpha a_i}} = \sum_{i=1}^{n} v_i \in S \leftarrow \text{לפי הגדרת סכום של תתי מרחבים.}$$

כי S_i תת מרחב וסגור תחת כפל בסקלר

VII

(ט) תרגום למשוואות

ט. תהי $S=\{V_1,V_2..V_n\}$ תת קבוצה של מ"ו V מעל שדה F. הפרש $L(S)=span\{S\}$, הוכח, תת"מ של V.

הוכחה - $L(S)$ היא: תת קבוצה של V ולכן מספיק:

א) $L(S)\neq\phi$ ולכן $0_V\in L(S)$

נבחר $\alpha_i=0_F$ $\forall\ 1\le i\le n$

$$V=0_F\cdot V_1+0_F\cdot V_2 \dots +0_F\cdot V_n=\sum 0_V=0_V\in L(S)$$

ב) סגירות תחת חיבור: צ.ל. $\forall\ a,b\in L(S)$

$a+b\in L(S)$

$$a\in L(S)\Rightarrow a=\sum_{i=1}^n \alpha_i\cdot V_i \quad \alpha_i\in F$$
$$b\in L(S)\Rightarrow b=\sum_{i=1}^n \beta_i\cdot V_i \quad \beta_i\in F$$

$\Downarrow$

$$a+b=\sum_{i=1}^n\alpha_i\cdot V_i+\sum_{i=1}^n\beta_i\cdot V_i=\sum_{i=1}^n(\alpha_i+\beta_i)V_i\in L(S) \qquad \alpha_i+\beta_i\in F$$

ג) סגירות תחת כפל בסקלר:

צ.ל. $\forall a\in L(S)\ \forall\beta\in F$

$\beta a\in L(S)$

$$a\in L(S)\Rightarrow a=\sum_{i=1}^n\alpha_i\cdot V_i \quad \alpha_i\in F$$
$$\beta a=\beta\cdot\sum_{i=1}^n\alpha_i V_i=\sum_{i=1}^n(\alpha_i\beta)V_i\in L(S)$$

$\alpha_i\in F$

$\underbrace{\alpha_i\in F \quad \beta\in F}_{\alpha_i\beta\in F}$

$\Downarrow$

$L(S)$ תת"מ של V

VIII

ב. אם קבוצת הווקטורים $\{v_i \mid v_i \neq 0_V\}_{i=1}^{n}$ היא קבוצה תלויה אזי לפחות אחד הווקטורים ניתן להצגה כצירוף לינארי של האחרים.

הוכחה: קבוצת הווקטורים הינה תלויה ולכן עפ"י ההגדרה קיימים סקלרים $\alpha_1 ... \alpha_n$ השייכים לשדה F, שלא כולם 0_F כך שמתקיים:

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot v_i = 0_V$$

ולכן ניתן לייצג את הווקטור v_k באופן הבא:

$$\alpha_k \cdot v_k = -\alpha_1 v_1 - \alpha_2 \cdot v_2 - ... - \alpha_{k-1} v_{k-1} - \alpha_{k+1} \cdot v_{k+1} - ... - \alpha_n \cdot v_n$$

$$v_k = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} \left(\frac{-\alpha_i}{\alpha_k}\right) v_i = \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq k}}^{n} \beta_i \cdot v_i \quad \leftarrow \quad \underset{\substack{1 \le i \le n \\ i \neq k}}{\frac{-\alpha_i}{\alpha_k}} = \beta \in F$$

שכן השדה F סגור בכפל

הצגנו את v_k כצירוף לינארי של $v_1, v_2 ... v_{k-1}, v_{k+1} ... v_n$

מש"ל.

5) העתקות לינאריות

א. תה: $T: V \to W$ העתקה לינארית בין מ"ו, אזי $\ker T$ הוא תת מ"ו של V ו- ImT הוא תת מ"ו של W.

1) ImT תת מ"ו של W.

$ImT \subseteq W$ כמובן, הואיל וקבוצה של W ולכן נוכיח:

1. $ImT \neq \emptyset$ כלומר $0_W \in ImT$.

$$0_V \in V$$

$$T(0_V) = 0_W \in ImT \quad \Leftarrow \quad T(0_V) = 0_W$$

לפי משפט

מש"ל

כלומר, $0_V \in \ker T$

2. סגירות תחת חיבור - צ.ל. $\forall w_1, w_2 \in ImT$

$$w_1 + w_2 \in ImT$$

$$w_1 \in ImT \Rightarrow T(w_1') = w_1$$

$$w_2 \in ImT \Rightarrow T(w_2') = w_2$$

$$T(\underset{\substack{\cap \\ V \\ \text{מ"ו}}}{w_1' + w_2'}) \underset{\text{ה"ל}}{=} T(w_1') + T(w_2') = w_1 + w_2 \in ImT$$

מש"ל

3. סגירות תחת כפל בסקלר - צ"ל.

$\forall w \in ImT \ \forall \alpha \in F$

$\alpha w \in ImT$

$w \in ImT \Rightarrow T(w') = w$

$T(\alpha w') = \alpha \cdot T(w') = \alpha \cdot w \in ImT$ מש"ל

T ט"ל ה"נ

2) kerT תמ"ו של V.

$kerT \subseteq V$, נתון, kerT תת קבוצה של V, ולכן נוכיח:

1. $kerT \neq \phi$, נוכיח, $0_v \in kerT$.

צ"ל ש

$T(0_v) = 0_w$

$\Downarrow$

$0_v \in kerT$ ← לפי הגדרת kerT

2. סגירות תחת חיבור - צ"ל

$\forall v_1, v_2 \in kerT$

$v_1 + v_2 \in kerT$

$v_1 \in kerT \Rightarrow T(v_1) = 0_w$

$v_2 \in kerT \Rightarrow T(v_2) = 0_w$

$T(v_1 + v_2) = T(v_1) + T(v_2) = 0_w + 0_w = 0_w$

T ט"ל ה"נ kerT kerT

$\Downarrow$

$v_1 + v_2 \in kerT$ מש"ל

3. סגירות תחת כפל בסקלר - צ"ל

$\forall v \in kerT \ \forall \alpha \in F$

$\alpha v \in kerT$

$v \in kerT \Rightarrow T(v) = 0_w$

$T(\alpha v) = \alpha \cdot T(v) = \alpha \cdot 0_w = 0_w$

T ט"ל ה"נ kerT

$\Downarrow$

$\alpha v \in kerT$ מש"ל

ב. תהי $T: V \to W$ ה"ל בין מ"ו מעל שדה F, [illegible]
שמקיים: T חח"ע <u>אמ"מ</u> $\ker T = \{0_v\}$.

<u>כיוון 1</u> - נתון T חח"ע צ.ל. $\ker T = \{0_v\}$

ניקח $v \in \ker T$ כלשהו ונוכיח $v = 0_v$

$$\underbrace{v \in \ker T}_{\text{לפי הגדרת } \ker T} \Rightarrow T(v) = 0_w$$

$$0_v \in \ker T \Rightarrow T(0_v) = 0_w$$

$T(0_v) = 0_w$ לפי משפט

$$\Downarrow$$

$$T(v) = T(0_v) = 0_w$$

נתון T חח"ע

$$\Downarrow$$

$v = 0_v$ מש"ל

<u>כיוון 2</u> - נתון $\ker T = \{0_v\}$ צ.ל. T חח"ע

ניקח $v_1, v_2 \in V$, כך ש- $T(v_1) = T(v_2)$ ונוכיח $v_1 = v_2$

$$T(v_1) = T(v_2) \underset{\text{ש' מ"ו}}{\Rightarrow} T(v_1) - T(v_2) = 0_w$$

$$T(v_1) - T(v_2) \underset{T \text{ ה"ל}}{=} T(\underbrace{v_1 - v_2}_{V \text{ מ"ו}}) = 0_w$$

$$\Downarrow$$

$$\underbrace{v_1 - v_2 \in \ker T}_{\text{לפי הגדרת } \ker T}$$

$$\ker T = \{0_v\}$$

$$\Downarrow$$

$$v_1 - v_2 = 0_v$$

$v_1 = v_2$ מש"ל

XI

6. תהי $T:V\to W$ ה"ל בין מ"ו, נוכיח שאם $V=\text{span}\{v_1,v_2\dots v_n\}$
אזי $\text{Im}\,T=\text{span}\{T(v_1),T(v_2)\dots T(v_n)\}$.

הוכחה: $V=\text{span}\{v_1,v_2\dots v_n\}$, ולכן $\forall v\in V$ ניתן לרשום כצירוף לינארי של $\{v_1,v_2\dots v_n\}$ כדלקמן הבא:

$$v=\alpha_1\cdot v_1+\alpha_2\cdot v_2+\dots+\alpha_n\cdot v_n$$

$$\underset{V}{\overset{\cap}{}}$$

לפי הגדרת $\text{Im}\,T \Leftarrow T(v)\in\text{Im}\,T\quad\forall v\in V$

$$\Downarrow$$

$$\forall v\in V\qquad T(v)=T(\alpha_1\cdot v_1+\alpha_2 v_2+\dots+\alpha_n v_n)\in\text{Im}\,T$$

$$\underset{\text{ה"ל }T}{=}\alpha_1\cdot T(v_1)+\alpha_2 T(v_2)+\dots+\alpha_n\cdot T(v_n)$$

$$\Downarrow$$

הראינו שכל איבר $T(v)$ ב- $\text{Im}\,T$ ניתן לרשום כצירוף לינארי של $\{T(v_1),T(v_2),\dots,T(v_n)\}$

$$\Downarrow$$

$$\text{Im}\,T=\text{span}\{T(v_1),T(v_2),\dots,T(v_n)\}$$

3. תהי $T:V\to W$ ה"ל בין מ"ו, נוכיח:

$$\dim V=\dim(\ker T)+\dim(\text{Im}\,T)$$

משפט המימדים ←

הוכחה: נניח ש- V מ"ו מעל F ממימד n, וכי $\ker T$ תת מ"ו של V ממימד k $(k\le n)$.

נוכיח: $\dim(\text{Im}\,T)=n-k$.

נניח ש- $\{v_1,v_2\dots v_k\}$ בסיס של $\ker T$ ולכן נקבל:

1) $T(v_i)=0_W$ $1\le i\le k$, כי $v_i\in\ker T$

2) כל איבר ב- $\ker T$ ניתן לרשום כצירוף לינארי של איברי הבסיס של $\ker T$, כלומר, $\forall v\in\ker T\Rightarrow v=\alpha_1 v_1+\alpha_2 v_2\dots+\alpha_k v_k$.

נשלים את הבסיס של $\ker T$ ממימד k לבסיס של V ממימד n,
סה"כ נבנה להשלים $n-k$ איברים: $\{v_1,v_2\dots v_k,\underbrace{v_{k+1},\dots,v_n}_{\substack{n-k\\ \text{איברים}}}\}$

טענה- $B=\{T(V_{k+1}),T(V_{k+2}),\dots,T(V_n)\}$ בסיס ל- $\mathrm{Im}\,T$

$$\Downarrow$$

$$\dim(\mathrm{Im}\,T)=n-k$$

$$\Downarrow$$

$$\dim V=\dim(\ker T)+\dim(\mathrm{Im}\,T) \quad \text{לפי}$$

$$n\ =\ k\ +\ n-k$$

הוכחת הטענה- B בסיס ל- $\mathrm{Im}\,T$:

א. B פורש את $\mathrm{Im}\,T$.

ב. B בת"ל.

א. נוכיח ש-B פורש את $\mathrm{Im}\,T$:

לפי משפט עבור הבסיס של V $\{V_1,V_2\dots V_k,V_{k+1}\dots V_n\}$

מתקיים:

$$\mathrm{Im}\,T=\mathrm{span}\{\underbrace{\overset{0_w}{T(V_1)},\overset{0_w}{T(V_2)}\dots\overset{0_w}{T(V_k)}}_{\substack{V_1,V_2\dots V_k\in\ker T\\ 1\le i\le k\quad T(V_i)=0_w}},T(V_{k+1})\dots T(V_n)\}$$

ולכן - $T(V_1)\dots T(V_k)$ אינם תורמים לפריסה ולכן:

$$\mathrm{Im}\,T=\mathrm{span}\{T(V_{k+1})\dots T(V_n)\}$$

ב. נוכיח ש-B בת"ל:

על מנת להוכיח ש-B בת"ל, ניקח צ"ל של איברי B, נשווה לוקטור ה-0_w. ונראה שכל המקדמים בצ"ל הנ"ל הם אפס ל- 0_F, כלומר,

$$\alpha_{k+1}\cdot T(V_{k+1})+\alpha_{k+2}\cdot T(V_{k+2})\dots+\alpha_n\cdot T(V_n)=0_w$$

הנחה מתקיים: $\alpha_{k+1}=\alpha_{k+2}\dots=\alpha_n=0_F$

$$\left.\begin{aligned}&\alpha_{k+1}\cdot T(V_{k+1})+\dots+\alpha_n\cdot T(V_n)=0_w\\&T(\underbrace{\alpha_{k+1}\cdot V_{k+1}+\alpha_{k+2}\cdot V_{k+2}\dots+\alpha_n\cdot V_n}_{v\in V})=0_w\end{aligned}\right\} \quad \text{לפי חוקי ה"ל}$$

$\Downarrow$

$$V \ni v = \alpha_{k+1}\cdot v_{k+1} + \dots + \alpha_n \cdot v_n$$

כיון ש- $v \in V$ מקיים $T(v)=0_W$, אזי $v \in \ker T$ (לפי הגדרת $\ker T$)

ולכן ניתן לכתוב את v ע"י צירוף לינארי של איברי הבסיס של $\ker T$

$$\{v_1, v_2, \dots, v_k\} \Rightarrow v = \alpha_1 \cdot v_1 + \alpha_2 \cdot v_2 + \dots + \alpha_k v_k$$

$\Downarrow$

$$\alpha_{k+1}\cdot v_{k+1} + \dots + \alpha_n \cdot v_n = \alpha_1 \cdot v_1 + \dots + \alpha_k \cdot v_k \quad / \text{ נעביר אגפים}$$

$$\alpha_1 \cdot v_1 + \dots + \alpha_k \cdot v_k - \alpha_{k+1} v_{k+1} - \dots - \alpha_n \cdot v_n = 0_V$$

קיבלנו צירוף לינארי של הבסיס של V - $\{v_1 \dots v_k, v_{k+1} \dots v_n\}$ ששווה ל- 0_V. כיון והקבוצה היא בסיס, כלומר בת"ל, אזי בהכרח:

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_k = -\alpha_{k+1} = \dots = \alpha_n = 0_F$$

$\Downarrow$

B בת"ל. מש"ל

ה. תהי מטריצה $A \in R^{m\times n}$, אזי $r(A) = r(A^t)$

הוכחה: נגדיר את $T: R^n \to R^m$ המוגדרת כך: $T(v) = A\cdot v \quad \forall v \in R^n$

של. נמצא קבוצה את ImT:

$$R^n = span\{\underbrace{\begin{pmatrix}1\\0\\0\\ \vdots \\0\end{pmatrix}_{n\times1}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\ \vdots\\0\end{pmatrix}_{n\times1}, \dots, \begin{pmatrix}0\\0\\ \vdots \\0\\1\end{pmatrix}_{n\times1}}_{n \text{ איברים}}\}$$

עפ"י משפט: תהי $T: V \to W$ ה"ל. אם $V = span\{v_i\}_{i=1}^n$, $v_i \in V$ אז $ImT = span\{T(v_i)\}_{i=1}^n$

$\Downarrow$

$$ImT = span\{T\begin{pmatrix}1\\0\\ \vdots\\0\end{pmatrix}_{n\times1}, T\begin{pmatrix}0\\1\\0\\ \vdots\\0\end{pmatrix}_{n\times1}, \dots, T\begin{pmatrix}0\\0\\ \vdots\\0\\1\end{pmatrix}_{n\times1}\}$$

$$= span\{A\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\ \vdots\\0\end{pmatrix}_{n\times1}, A\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\ \vdots\\0\end{pmatrix}_{n\times1}, \dots, A\begin{pmatrix}0\\0\\ \vdots\\0\\1\end{pmatrix}_{n\times1}\}$$

$$= \underbrace{span\{C_1, C_2, \dots, C_n\}}_{\text{מרחב העמודות של } A}$$

$$\dim(\text{מרחב העמודות}) = r(A^t)$$

לפי משפט - מימד מרחב העמודות של מטריצה A שווה לדרגת A^t.

XIII

ב. נכונה שמרחב ה-0 של המטריצה A שווה ל- ker T.

לפי הגדרת מרחב ה-0 של מטריצה A:

$$N(A)=\{x\in R^n \mid Ax=0 \ ; \ A\in R^{m\times n}\}$$

לפי הגדרת ker T:

$$\ker T=\{x\in R^n \mid \underbrace{T(x)}_{Ax}=0 \ ; \ A\in R^{m\times n}\}$$

$$\Downarrow$$

$$N(A)=\ker T$$

$$\dim(N(A))=n-r(A) \leftarrow$$ לפי הגדרת מימד ה-0 (משפט הפתרונות)

ג. נשתמש במשפט המימדים:

$$\dim R^n=\dim(\ker T)+\dim(\mathrm{Im}\,T)$$

$$n=n-r(A)+r(A^t)$$

$$r(A)=r(A^t)$$ מ"ל

(6) **מרחבי מכפלה פנימית**

א. קבוצה אורתוגונלית של וקטורים שונים מ-0 היא קבוצה בת"ל.

הוכחה: תהי $S=\{V_1 \dots V_n\}$ קבוצה אורתוגונלית של וקטורים שונים מ-0.

כלומר, $\underline{V_i\neq 0\ \forall i}$, $\underline{\forall i\neq j}$ $\langle V_i, V_j\rangle = 0$ $\quad 1\le i\le n,\ 1\le j\le n$

ניקח צירוף לינארי שלהם השווה ל-0_V:

$$\alpha_1 \cdot V_1 + \alpha_2 \cdot V_2 + \dots + \alpha_n \cdot V_n = 0_V$$

/ נעשה מכפלה פנימית של 2 האגפים עם V_i $\quad 1\le i\le n$

$$\langle \alpha_1 \cdot V_1 + \alpha_2 \cdot V_2 + \dots + \alpha_i V_i + \dots + \alpha_n V_n , V_i\rangle = \underbrace{\langle 0_V, V_i\rangle}_{=0}$$

$$\Downarrow$$

$$\alpha_1 \underset{\overset{\shortparallel}{0_F}}{\langle V_1, V_i\rangle} + \alpha_2 \underset{\overset{\shortparallel}{0_F}}{\langle V_2, V_i\rangle} + \dots + \alpha_i \underset{\overset{\neq}{0_F}}{\langle V_i, V_i\rangle} + \dots + \alpha_n \underset{\overset{\shortparallel}{0_F}}{\langle V_n, V_i\rangle} = 0_F$$

$$\alpha_i \underset{\overset{\neq}{0_V}}{\langle V_i, V_i\rangle} = 0_F$$

$$\Downarrow$$

$$\alpha_i = 0_F \quad \forall i$$

$$\Downarrow$$

S בת"ל

ב. יהי $S=\{V_1 \dots V_n\}$ בסיס אורתונורמלי בממ"פ V, אזי כל וקטור $v\in V$ ניתן להצגה יחידה כצ"ל של איברי הבסיס S.

$$\forall v\in V \qquad V = a_1 V_1 + a_2 V_2 + \dots + a_n \cdot V_n$$

כאשר $a_i = \langle V, V_i\rangle$ $\ 1\le i\le n$ (מקדמי פוריה)

הוכחה: $V = a_1 \cdot V_1 + \dots + a_n \cdot V_n$ / נבצע מ"פ של 2 האגפים עם V_i

לפי חוקי ממ"פ

$$\langle V, V_i\rangle = \langle a_1 V_1 + \dots + a_i V_i + \dots + a_n V_n\rangle$$

$$= a_1 \underset{\overset{\shortparallel}{0}}{\langle V_1, V_i\rangle} + a_2 \underset{\overset{\shortparallel}{0}}{\langle V_2, V_i\rangle} \dots a_i \underset{\overset{\shortparallel}{1}}{\langle V_i, V_i\rangle} \dots + a_n \underset{\overset{\shortparallel}{0}}{\langle V_n, V_i\rangle}$$

S קבוצה אורתונורמלית

$\Downarrow$

$$\langle V_i, V_j\rangle = \begin{cases} 0 ; & i\neq j \\ 1 ; & i=j \end{cases}$$

$$a_i = \langle V, V_i\rangle$$

מש"ל

XV

ג. יהי W תת"מ של V מעל שדה F, אזי המשלים האורתוגונלי $W^\perp$ הינו תת מרחב של V.

הוכחה: $W^\perp$ הינו תת קבוצה של V ולכן נוכיח:

א. $W^\perp \neq \phi$ ובפרט $0_V \in W^\perp$.

ע"פ הגדרת המשלים האורתוגונלי:

$$W^\perp = \{\forall v \in V \mid \langle v, w\rangle = 0 \quad \forall w \in W\}$$

$$0_V \in V$$

$$\langle 0_V, \underset{W}{\underset{\cap}{w}} \rangle = 0 \longleftarrow \overset{\text{לפי משפט}}{\langle 0,u\rangle = \langle u,0\rangle = 0} \quad \forall u \in V$$

$$\Downarrow$$

$0_V \in W^\perp$ מש"ל

ב. סגירות תחת חיבור: צ"ל

$$\forall v_1, v_2 \in W^\perp$$
$$v_1 + v_2 \in W^\perp$$

$$v_1 \in W^\perp \implies \langle v_1, w\rangle = 0 \quad \forall w \in W$$
$$v_2 \in W^\perp \implies \langle v_2, w\rangle = 0 \quad \forall w \in W$$

$$\langle v_1 + v_2, \underset{W}{\underset{\cap}{w}} \rangle \underset{\text{לפי תכונות מ"פ}}{=} \langle v_1, w\rangle + \langle v_2, w\rangle = 0 + 0 = 0$$

$$\Downarrow$$

$v_1 + v_2 \in W^\perp$ מש"ל

ג. סגירות תחת כפל בסקלר: צ"ל

$$\forall v \in W^\perp \quad \forall \alpha \in F$$
$$\alpha v \in W^\perp$$

$$v \in W^\perp \implies \langle v, w\rangle = 0 \quad \forall w \in W$$

$$\langle \alpha v, \underset{W}{\underset{\cap}{w}} \rangle \underset{\text{לפי תכונות מ"פ}}{=} \alpha \langle v, w\rangle = \alpha \cdot 0 = 0$$

$$\Downarrow$$

$\alpha v \in W^\perp$ מש"ל

א+ב+ג

$\Downarrow$

$W^\perp$ תת מרחב של V