<u>מודלים חישוביים, דף עזר למבחן</u>

<u>אס"ד:</u> אס"ד הוא חמישיה: $M=\left(Q,\Sigma,\delta,q_0,F\right)$, אס"ד **סגור תחת משלים** (ניקח את האוטומט *M* ונהפוך כל מצב מקבל למצב לא מקבל ולהיפך), **חיתוך** (מכפלה של אוטומטים - פונקצית המעבר $\delta\left(\left(q_1,q_2\right),a\right)=\left(\delta_1\left(q_1,a\right),\delta_2\left(q_2,a\right)\right)$ ההוכחה באינדוקציה) , **איחוד** (מכפלה של אוטומטים בשינוי אחד: $F=\left\{\left(q_1,q_2\right):q_1\in F_1 \text{ או } q_2\in F_2\right\}$ או לחילופין ע"י רדוקציה: נשים לב $L_1\cup L_2=\overline{\overline{L_1}\cap\overline{L_2}}$), **חיסור** (אפשר לראות גם ש- $L_1\setminus L_2$ מתקבלת ע"י אס"ד $L_1\setminus L_2=L_1\cap\overline{L_2}$).

<u>אסל"ד:</u> הוא חמישייה: $M=\left(Q,\Sigma,\delta,q_0,F\right)$: (קיים מסלול חישוב של אוטומט על *w* שמסיים לקרוא את כל *w* ומגיע למצב מקבל).

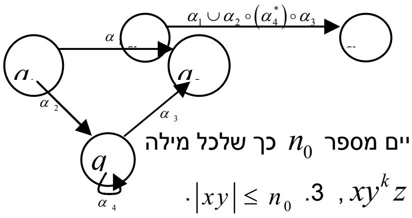
<u>משפט</u> (שקילות אסד – אסל"ד): כל שפה התקבלת ע"י אסל"ד מתקבלת גם ע"י אס"ד, כל מצב באס"ד שנבנה יהיה קבוצת מצבים של האסל"ד, בכל קריאה לאות נעבור למצב החדש באס"ד שמייצג את קבוצת המצבים החדשים באסל"ד אחרי הקריאה ($Q'=P\left(Q\right)$), הוכחה באינדוקציה של אורך המילה) , עבור מצב *q* נגדיר {אפשר להגיע מ-*q* ל-q' - ע"י מעברי ε כולל q' עצמו $E\left(q\right)=\{q':$ וזה יפתור את בעיית המילה הריקה צריך להפעיל על ההתחלה ואחרי המעברים.

<u>משפט:</u> אם L_1,L_2 **מתקבלות ע"י אס"ד אז** $L_1\circ L_2$ מתקבלת ע"י אסל"ד, (מעברי אפסילון מהמקבלים של הראשון להתחלה של השני, צריך לבטל את המקבלים של הראשון ולהפוך אותם לקודקודים רגילים).

<u>משפט: *L</u>, מעברי אפסילון מהמצבים המקבלים למצב חדש שנמצא לאחר מעבר אפסילון אחרי ההתחלה שהופכת להיות מקבלת.

<u>ביטויים רגולריים:</u> לכל תו $a\in\Sigma$ התו *a* הוא ביטוי רגולרי אטומי, "$\varnothing$" ביטוי רגולרי אטומי, "ε" ביטוי רגולרי אטומי, "$\left(\alpha_1\cup\alpha_2\right)$" הוא ביטוי רגולרי, "$\left(\alpha_1\circ\alpha_2\right)$" הוא ביטוי רגולרי, "$\left(\alpha_1^*\right)$" הוא ביטוי רגולרי, ביטויים אטומיים מיוחד $L\left(\varnothing\right)=\varnothing$, $L\left(\varepsilon\right)=\left\{\varepsilon\right\}$.

<u>משפט: שלושת התנאים הבאים הם שקולים:</u> 1. *L* מתקבלת ע"י אס"ד , 2. *L* מתקבלת ע"י אסל"ד , 3. *L* רגולרית (מתקבלת ע"י ביטוי רגולרי), כבר הוכח 1 ו 2 נשאר רק הוכחה בין 2-ל 3, מביטוי רגולרי לאוטומט נראה את הציורים של האוטומט המייצג את הביטויים האטומיים וסגירות לאיחוד וחיבור – וחיבור עצמי, מאוטומט לביטוי רגולרי ע"י אוטומט מוכלל (על כל חץ נמצא ביטוי רגולרי, כל להפוך אוטומט כזה בין שני מצבים לביטוי רגולרי, אפשר לצמצם את מצבי האוטומט ההתחלתי עד להגעה לשני מצבים בדרך הבאה, לכל זוג מצבים *(לאו דווקא שונים)* (פרט למקרים שיפרטו להלן) יש מעבר בין שני המצבים, אין חצים הנכנסים למצב ההתחלתי, יש רק מצב מקבל אחד ואין חצים שיוצאים ממנו, נפעיל את הטרנספורמציה הזו לכל זוג מצבים (לאו דווקא שונים) q_1,q_2 (חוץ מהמקרה ש- q_1 מקבל ו- q_2 התחלתי).



"<u>אינטואיציה</u>: זו שפה לא רגולרית מכיוון שאס"ד לא יודע לספור." $L=\left\{a^n,b^n:n\geq 0\right\}$

<u>למת הניפוח לשפות רגולריות: (להשתמש רק בהוכחה ששפה אינה רגולרית ההיפך לא נכון)</u> לכל שפה רגולרית *L* קיים מספר n_0 כך שלכל מילה $w\in L$ כך ש- $\left|w\right|\geq n_0$ קיימים $x,y,z\in\Sigma^*$ כך ש- $w=xyz$ ומתקיים:, 1. $y\neq\varepsilon$, 2. לכל $k\geq 0$ $xy^kz\in L$, 3. $\left|xy\right|\leq n_0$.

<u>משפט מייהיל-נרוד (לשפות רגולריות):</u> $\sim_L$ יחס ההסכמה: $w_1,w_2\notin L$ או $w_1,w_2\in L$ $\equiv_L \mid w_1\sim_L w_2\Leftrightarrow$ יחס השקילות: $w_1\equiv_L w_2\Leftrightarrow\forall z\in\Sigma^*\quad w_1z\sim_L w_2z$, <u>מסקנה</u>: תהי *L* שפה ויהיו $w_1 .... w_t$ מילים ב- Σ^* כך שלכל $i\neq j$ $w_i\neq w_j$ אז אין ל-*L* אס"ד עם $t-1$ מצבים || <u>מסקנה</u>: תהי *L* שפה ויהיו $\left\{w_i\right\}_{i=1}^{\infty}$ מילים ב- Σ^* כך שלכל $i\neq j$ $w_i\neq w_j$ אז *L* לא רגולרית || נסמן ב- $\#_L$ את מספר מחלקות השקילות של $\equiv_L$ || <u>הערה</u>: $\#_L$ יכול להיות אינסוף כלומר בלתי מוגדר || **<u>משפט מייהיל-נרוד:</u>** 1. *L* רגולרית $\Leftrightarrow$ $\#_L<\infty$ || 2. האוטומט המינימאלי עבור *L* הוא בעל *t* מצבים $\Leftrightarrow$ $\#_L=t<\infty$ || 1. ראינו שאם $\#_L=\infty$ $\Leftarrow$ *L* לא רגולרית. || 2. ראינו שאם $\#_L=t<\infty$ $\Leftarrow$ האוטומט המינימאלי הוא בעל לפחות *t* מצבים. || כדי להוכיח את הכיוונים החסרים די להראות שאם $\#_L=t<\infty$ אז יש ל-*L* אס"ד עם *t* מצבים.

<u>אוטומט מחסנית (לא דטרמיניסטי) (אינו סגור תחת משלים וחיתוך רק תחת איחוד כן):</u> הוא שישייה: $M=\left(Q,\Sigma,\Gamma,\delta,q_0,F\right)$ (Γ - א"ב סופי (א"ב המחסנית)) אתה רשאי לקרוא *b* מהקלט ובלבד שתוציא *a* מהמחסנית ותדחף b,a->z = z || מסלול חישוב נקרא מקבל אם הוא סיים לקרוא את המילה, אם הוא הגיעה למצב מקבל והמחסנית ריקה.

<u>דקדוקים חסרי הקשר:</u> דקדוק חסר הקשר הוא רביעייה $G=\left(V,\Sigma,R,S\right)$ || *V* – א"ב סופי כך ש- $\Sigma\subseteq V$ || Σ – א"ב סופי שאיבריו נקראים טרמינלים || ואיברי $V\setminus\Sigma$ נקראים נונטרמינלים.|| *R* – קבוצה סופית של זוגות $\left(A,\alpha\right)$ כאשר $A\in V\setminus\Sigma$, $\alpha\in V^*$ || (הפרשנות היא $\left(A,\alpha\right)\Leftarrow$ חוק $A\rightarrow\alpha$) || $S\in V\setminus\Sigma$ – נונטרמינל התחלתי.

<u>משפט:</u> שני התנאים הבאים שקולים: *L* מתקבלת ע"י אוטומט מחסנית (לא דטרמיניסטי) = *L* חסרת הקשר.

<u>למת הניפוח לשפות חסרות הקשר:</u> לכל שפה חסרת הקשר *L* קיים מספר n_0 כך שלכל מילה $w\in L$ כך ש- $\left|w\right|\geq n_0$ קיימים $u,v,x,y,z\in\Sigma^*$ כך ש- $w=u\circ v\circ x\circ y\circ z$ ומתקיים: 1. $v\circ y\neq\varepsilon$ || 2. לכל $k\geq 0$ $u\circ v^k\circ x\circ y^k\circ z\in L$ || 3. $\left|v\circ x\circ y\right|\leq n_0$.

$L=\left\{a^nb^nc^n:n\geq 0\right\}$ - לא חסרת הקשר.

<u>מכונת טורינג:</u> מ"ט *M* היא שביעייה: $M=\left(Q,\Sigma,\Gamma,\delta,q_0,q_{accept},q_{reject}\right)$, קונפיגורציה היא שלשה: $\left(w_1,q,w_2\right)$, קונפיגורציה שבה || המצב הוא q_{accept} נקראת **<u>מקבלת</u>**. || קונפיגורציה שבה המצב הוא q_{reject} נקראת **<u>דוחה</u>**, נאמר שמ"ט *M* **<u>מכריעה</u>** שפה *L* אם: לכל $w\in L$ מסלול החישוב של *M* על *w* מסתיים בקונפיגורציה מקבלת. ||לכל $w\notin L$ מסלול החישוב של *M* על *w* מסתיים בקונפיגורציה דוחה. || אם מ"ט *M* מכריעה שפה *L* אז *M* עוצרת על כל קלט. נאמר שמ"ט *M* **<u>מקבלת</u>** שפה *L* אם: לכל $w\in L$ מסלול החישוב של *M* על *w* מסתיים בקונפיגורציה מקבלת. || לכל $w\notin L$ מסלול החישוב של *M* על *w* אינו מסתיים בקונפיגורציה מקבלת. || אם *M* מכריעה את *L* אז *M* מקבלת את *L*. ההיפך לא בהכרח נכון.

משפט: כל שפה המתקבלת ע"י מ"ט לא דטרמיניסטית מתקבלת גם ע"י מ"ט דטרמיניסטית, אם $w \in L(M)$ צריך לעצור ולהגיד "כן", אם $w \notin L(M)$ מותר להיכנס ללולאה אינסופית. אלגוריתם: $i \leftarrow 1$ | סרוק את כל המסלולים מאורך *i* בעץ הקונפיגורציות אם באחד מהם יש קונפיגורציה מקבלת, עצור וקבל. | $i \leftarrow i+1$.

משפט: אם *L* שפה כריעה (כלומר יש מ"ט שמכריעה אותה) אז גם $\bar{L}$ כריעה, הוכחה: נהפוך בין q_{accept} ל- q_{reject}, הוכחה זו נכשלת לשפות ש**מתקבלות** ע"י מ"ט.

משפט: אם L_1, L_2 שפות כריעות אז $L_1 \cap L_2$ כריעה, הוכחה: נבנה מ"ט שקודם כל מריצה את המכונה הראשונה על הקלט, ואחר-כך מריצה את השנייה על הקלט. ואם שתיהן קיבלו אז נקבל.

משפט: אם L_1, L_2 שפות מתקבלות אז $L_1 \cap L_2$ מתקבלת. הוכחה: נבנה מ"ט שקודם כל מריצה את המכונה הראשונה על הקלט, ואחר-כך מריצה את השנייה על הקלט. ואם שתיהן קיבלו אז נקבל.

משפט: אם L_1, L_2 שפות כריעות אז $L_1 \cup L_2$ כריעה, הוכחה: נבנה מ"ט שקודם כל מריצה את המכונה הראשונה על הקלט, ואחר-כך מריצה את השנייה על הקלט. ואם אחת מהן קיבלה אז נקבל.

משפט: אם L_1, L_2 שפות מתקבלות אז $L_1 \cup L_2$ מתקבלת, אם נשתמש בפתרון הקודם ייתכן ונכנס ללולאה אינסופית, פתרון: נריץ במקביל, נבנה מ"ט דו-סרטית,ונבדוק בכל שלב האם אחת מהן הגיעה למצב מקבל. ואם כן אז נקבל.

מ"ט *U* נקראת "אוניברסאלית"."*U* מסמלצת את פעולת *M* על *w*", אם *M* מקבלת את *w* אז *U* מקבלת את $< M, w >$, אם *M* דוחה את *w* אז *U* דוחה את $< M, w >$, אם *M* נכנסת ללולאה אינסופית על *w* אז *U* נכנסת ללולאה אינסופית על $< M, w >$.

***ACCEPT* ניתנת לקבלה**, נריץ את U. |||||| ***HALT* ניתנת לקבלה**, בהינתן קלט $< M, w >$ אז נריץ את *U* על $< M, w >$ בשינוי אחד – כאשר *U* רוצה להיכנס ל- q_{reject} ניכנס ל- q_{accept}. |||||| ***NOT-EMPTY* ניתנת לקבלה:** $i \leftarrow 0$ | עבור על כל המילים *w* מאורך $i \geq$. | הרץ את *M* על *w* למשך *i* צעדים (הרצה מבוקרת) |אם *M* עצרה וקיבלה אז עצור וקבל | $i \leftarrow i+1$. |||||| **משפט: אם *HALT* כריעה אז *ACCEPT* כריעה:** נריץ את HALT על הקלט אם היא עונה בלא נדחה את עונה בכן נריץ את M בעזרת U. |||||| **מסקנה: אם *ACCEPT* לא כריעה, אז *HALT* לא כריעה.**

שיטת הלכסון של קנטור: נגדיר שפה: $< M > D = \{< M >:$ *M* מ"ט ו-*M* מקבלת את $\{M$ || $< M > \bar{D} = \{< M >:$ *M* מ"ט ו-*M* לא מקבלת את $\{M$,

משפט: $\bar{D}$ לא ניתנת לקבלה. הוכחה: נניח בשלילה ש- $\bar{D}$ ניתנת לקבלה. כלומר יש מ"ט *M* שמקבלת אותה.|| או ש- *M* מקבלת את $< M >$:
$< M > \in D \Leftarrow < M > \notin \bar{D}$ סתירה. || או ש- *M* לא מקבלת את $< M >$: $< M > \in \bar{D} \Leftarrow < M > \notin D$ סתירה.

טענה: אם *ACCEPT* כריעה אז $\bar{D}$ כריעה. || מסקנה: *ACCEPT* לא כריעה. || הוכחה : נניח ש ACCEPT כריעה נריץ את $M_{ACCEPT}(< M, < M >>)$ בהכרח M_{ACCEPT} תעצור. ותענה האם *M* מקבלת את $< M >$. ואני אענה ההיפך ממה שהוא עונה. מסקנה: *HALT* לא כריעה.

רדוקציות מיפוי : נאמר שיש רדוקצית מיפוי מ- L_1 ל- L_2 $(L_1 \leq_m L_2)$ אם קיימת מ"ט *R* שעוצרת על כל קלט ומתקיים לכל $x \in \Sigma^*$
$x \in L_1 \Leftrightarrow \underbrace{R(x)}_{\text{מחרוזת}} \in L_2$ || משפט: אם $L_1 \leq_m L_2$ אז מתקיים: 1. אם L_2 כריעה אז L_1 כריעה. || 2. אם L_1 לא כריעה אז L_2 לא כריעה. || 3. אם L_2 ניתנת לקבלה אז L_1 ניתנת לקבלה. || 4. אם L_1 לא ניתנת לקבלה אז L_2 לא ניתנת לקבלה.

טענה: $EMPTY \leq_m EQUAL$ || טענה: $ACCEPT \leq_m NOT-EMPTY$, טענה: *REGULAR* אינה כריעה.

משפט RICE: הגדרה: שפה *L* נקראת **טריוויאלית** אם $L = \varnothing$ או $L = TM$

"משפט ***Rice***": לכל $L \subseteq TM$ כך ש-*L* לא טריוויאלית ו-*L* תכונה של שפות אז *L* לא כריעה.

הגדרה: שפה $L \subseteq TM$ נקראת תכונה של שפות אם: לכל שתי מ"ט M_1, M_2 כך ש- $L(M_1) = L(M_2)$ מתקיים ש- או $< M_1 > \in L$ ו- $< M_2 > \in L$ או $< M_1 > \notin L$ ו- $< M_2 > \notin L$

דוגמאות לשפות ב-*P* | **משפט**: $PATH \in P$ | **משפט**: לכל שפה רגולרית *L* אז $L \in P$. (טריביאלי) | **משפט**: לכל שפה חסרת הקשר *L* אז $L \in P$. | $PATH = \{< G, s, t >:$ *G* גרף וקודקודים *s,t* ויש מסלול מ-*s* ל-*t*$\}$

דוגמאות לשפות ב-*NP*.$HAM-PATH = \{< G, s, t >:$ *G* גרף מכוון ויש מסלול המילטוני מ-*s* ל-*t*$\}$ | $CLIQUE = \{< G, k > :$ *G* גרף, *k* מספר וב-*G* יש קליקה מגודל *k*$\}$ קליקה בגרף היא קבוצת קודקודים שכל שנים מהם מחוברים בקשת.

מוודא פולינומי: נאמר שלשפה *L* יש מוודא פולינומי אם קיים קבוע *c* ומ"ט דטרמיניסטית *V* שרצה בזמן פולינומי כך שמתקיים שלכל $x \in \Sigma^*$ ||| $x \in L \Leftrightarrow \exists y : |y| \leq |x|^c, V(x, y) = 1$ || בפרט: $x \notin L \Leftrightarrow \forall y : |y| \leq |x|^c, V(x, y) = 0$ *(כל שפה שיש לה מוודא פולינומי היא כריעה.*

משפט: $L \in NP \Leftrightarrow$ ל-*L* יש מוודא פולינומי. | *נשים לב שההפך לא בהכרח נכון)* NP = $\{\varphi$ נוסחא בצורת *3-CNF* ספיקה $3-SAT = \{\varphi :$ || $\}\varphi$ נוסחא ספיקה $SAT = \{\varphi :$.

רדוקציה פולינומיאלית: בהינתן שתי שפות L_1, L_2, נאמר שיש **רדוקציה פולינומיאלית** מ- L_1 ל- L_2 ונסמן $L_1 \leq_p L_2$ אם קיימת מ"ט *R* שעל כל קלט *x* עוצרת ופולטת פלט $R(x)$ ומתקיים $x \in L_1 \Leftrightarrow R(x) \in L_2$

ו-*R* רצה בזמן פולינומי.