תשס"ב, סימסטר א'
מועד א'
מרצה: י. פרנר

מבחן "בלוגיקה ותורת הקבוצות"

<u>חלק א'</u>: יש לענות על שתיים מתוך שלוש השאלות הבאות

(25) (1) נסחו והוכיחו את משפט קנטור-ברנשטיין

---

(2) (א) הגדירו מתי שתי קבוצות נקראות שקולות עוצמה. (5)

(ב) מהי העוצמה של קבוצת כל הסדרות הבינאריות האינסופיות שאינן מכילות את הרצף 11? הוכיחו את תשובתכם. (20)

---

(3) (א) סדרו את העוצמות הבאות לפי הסדר שלהן. אמרו מתי הן שוות:

$$\aleph_0\aleph_0, |P(\mathbb{Q})|, |\mathbb{Q}\times\mathbb{R}|, |P(\mathbb{R})|$$ (7)

(18) (ב) מהי העוצמה של קבוצת כל המלבנים במישור שצלעותיהם מקבילות לציר ה-x וציר ה-y ואורכי הצלעות שלהם הם מספרים שלמים? הוכיחו את תשובתכם.

חלק ב': יש לענות על שתיים מהשאלות הבאות

4

(5) א) נסחו את משפט הקומפקטיות לתחשיב הפסוקים

(10) ב) הוכיחו בעזרת משפט הקומפקטיות: (ל T קבוצת נוסחאות)
אם $T \models \varphi$ אז יש תת-קבוצה סופית $T_0 \subseteq T$
כך ש $T_0 \models \varphi$

(10) ג) הוכיחו בעזרת רזולוציה

$$(A \to B) \to C \models A \to (B \to C)$$

5

(10) א) הוכיחו בעזרת מבנה והשמה:

$$\exists x R(x,f(x)) \not\models R(x,f(x))$$

(15) ב) הוכיחו בעזרת מעבר לפסוקי סקולם ורזולוציה:

$$\exists y \forall x R(x,y) \models \forall x \exists y R(f(x),y)$$

6

(4) א) הגדירו מתי כותבים $S \models \varphi$ (ל S קבוצת נוסחאות בתחשיב הפסוקים ו φ נוסחה בתחשיב הפסוקים).

ב) הוכיחו או הפריכו כל אחת מהטענות הבאות.

(7) (i) אם $\varphi \models \psi$ או $\chi \models \psi$ אז $(\varphi \vee \chi) \models \psi$

(7) (ii) אם $(\varphi \wedge \chi) \models \psi$ אז $\varphi \models \psi$ וגם $\chi \models \psi$

(7) (iii) אם $\{\varphi,\psi\}$ איננה ספיקה
אז φ איננה ספיקה וגם ψ איננה ספיקה.

מס' מחברת עברית **428998**

אוניברסיטת חיפה
UNIVERSITY OF HAIFA

אוניברסיטת

מספר סידורי רץ
לשימוש משגיחה

חוג מתמטיקה

מחברת מס'

מתוך ___ מחברות

בחינה בקורס: לוגיקה

תאריך הבחינה: 20.1.05 מועד א/ב/ג

שם המורה:

לשימוש הבוחן בלבד

הערות הבוחן

1	22
3	22
6	18
5	19

ציון 81

חתימת הבוחן

$\psi = A \vee \neg B$

$A \wedge B$ $\psi = A \vee \neg B$

B • 1

1. משפט קנטור ברנשטיין:

לקבוצות X,Y: אם קיימת $f:X\to Y$ חח"ע וגם קיימת $g:Y\to X$ חח"ע, אזי $X\sim Y$.

המשפט המצומצם: אם $Y\subseteq X$ וקיימת $f:X\to Y$ חח"ע אזי $X\sim Y$.

הוכחת המשפט המצומצם:

נגדיר A: $A=X\setminus Y$.

ברור כי $f[A]\subseteq Y$.

ומן ברור גם כי $f[f[A]]\subseteq Y$

ובאופן כללי לכל n $f^n[A]\subseteq Y$.

22/25

מכיוון ש f חח"ע, לכל n $f^n[A]\cap f^{n+1}[A]=\phi$. (מדוע? זה כלל לא מיידי) אין בזה צורך מן

נגדיר את איחוד כל ה $f^n[A]$ בקבוצה בשם B.

נסתכל על f כך:

$f|_{A\cup B}:A\cup B\to B$ ברור כי היא עדיין חח"ע (כי f המקורית כזו).

הטווח הוא אכן B: לכל $x\in A\cup B$: אם $x\in A$ אזי $f(x)\in B$ (כך הגדרנו את B).

אם $x\in B$ אזי קיים n כך ש $x\in f^n[A]$,

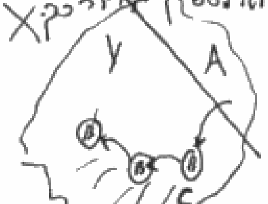
ולכן $f(x)\in f^{n+1}[A]\in B$.

והפונקציה כמו שאמרנו היא גם על (מאחר שלכל $b\in B$ קיים $x\in A\cup B$ כך ש $f(x)=b$. (נובע מאופן הגדרת B)

יש צורך להוכיח "על"
זה לא מספיק ברור

קיימת פונקציה חח"ע ועל $A\cup B\to B$

$\Leftarrow$ $A\cup B\sim B$.



נגדיר C: $C=Y\setminus B$.

ברור כי $X=A\cup Y$ (כך הגדרנו).

$Y=B\cup C$ " "

$\Leftarrow$ א. $X=A\cup B\cup C$

ב. $Y=B\cup C$

מכיוון ש $A\cup B\sim B$ וברור $C\sim C$

נקבל $X\sim Y$.

מ.ש.ל. המשפט המצומצם.

הוכחת המשפט: אם קיימת $g:Y\to X$ חח"ע, נסתכל על A: [redacted] התמונה של g ב X. $A\subseteq X$, ובנוסף קיימת פונקציה חח"ע $h:X\to A$ - הרכבה של שתי הפונקציות החח"ע f,g.

לכן הגענו לתנאי המשפט המצומצם ונקבל $X\sim A$.

ברור כי $Y\sim A$ כי g חח"ע, והיא על ביחס ל A (כך הגדרנו את A).

$X\sim A$ $Y\sim A$

$\Downarrow$

$X\sim Y$

מ.ש.ל.

3. א.

$$|P(R)| > |P(Q)| \geq |Q\times R| > \aleph_0 \cdot \aleph_0$$

5/7

ב. נגדיר A קב' כל המלבנים בשאלה.
לפי הנתון (מקבילים לציר x,y), כל מלבן מוגדר ייחודית
ע"י נקודה אחת (נניח פינה שמאלית תחתונה), אורך ורוחב (ז.א. שלמים ומקיימים טבעיים).
כל נקודה במישור מתוארת ע"י הקואורדינאטות (x,y) שלה.

$\Leftarrow$ ניתן לייצג כל $a\in A$ ע"י רביעיה סדורה (x,y,l,w),

$x,y\in R$ (קואורדינאטות פינה שמאלית תחתונה)

$l\in N$ אורך

$w\in N$ רוחב.

$\Leftarrow$ קיימת $f: R\times R\times N\times N \to A$ חח"ע ועל.

$f(x,y,l,w) \stackrel{\text{def}}{=}$ המלבן ב-A שאורכו l ורוחבו w ופינה שמאלית תחתונה ב-(x,y)

$f(x,y,l,w) = a$
המלבן a שאורכו l
שרוחבו w
ושפינתו השמאלית התחתונה
נמצאת ב-(x,y).

חח"ע:

$\cancel{f(x)=f(y)\to x=y}$

$f(x_1)=f(x_2) \to x_1 = x_2$

נניח בשלילה כי לא מתקיים, כלומר לאותו מלבן יש שני ייצוגים
שונים ב-$R\times R\times N\times N$.
אבל זה לא ייתכן! מכיוון שנוגע כי לכל מלבן פינה שמאלית תחתונה אחת ויחידה,
אורך יחיד ורוחב יחיד.
לכן בהכרח x_1 ו-x_2 המתארים רביעיות אלו שווים.

סתירה בשל 3 כך.

על: נניח בשלילה ש-f לא על, כלומר קיים $a\in A$ ולא קיים $x\in R\times R\times N\times N$
כך ש-$f(x)=a$.
זה לא יתכן, מכיוון שלכל מלבן ב-A יש נק' שהיא הפינה השמאלית התחתונה
שלו במישור, ואורך ורוחב שהם מס' טבעיים (ז.א.),
לכן בהכרח חייבת קיימת רביעיה סדורה x ב-$R\times R\times N\times N$ שמתארת אותו,
כך ש-$f(x)=a$.

$\Leftarrow A \sim R\times R\times N\times N \quad \Leftarrow \quad |A| = |R\times R\times N\times N|$

$R\times R\sim R,\ N\times N\sim N \quad \Leftarrow \quad R\times N \sim R\times R\times N\times N$

$\Leftarrow \quad |A| = |R\times N| = |\mathbb{R}|$

מ.ש.ל.

17/18

4/4

6. א. נותנים $\varphi \models S$ אם לכל השמה המספקת את S (כלומר נותנת ערך 1 לכל הנוסחאות ב-S), גם ערכה של φ בהשמה זו הוא 1.

ב. iii הפרכה: $\varphi = A$ $\psi = \neg A$.
ברור כי לא תתכן השמה בה φ וגם ψ מסופקות,
לכן $\{\varphi, \psi\}$ אינה ספיקה כנדרש,
אבל φ ספיקה (עבור השמה $A=1$),
וגם ψ ספיקה (עבור השמה $A=0$).

7/7

ii הפרכה: ~~$\varphi = A$ $\chi = \neg A$~~
~~לכן $(\varphi \wedge \chi)$ סתירה.~~
~~$\Leftarrow$ $(\varphi \wedge \chi)$ מספקת כל נוסחה, ובפרט $(\varphi \wedge \chi) \models \psi$.~~
~~אבל לא יתכן כי מתקיים $\varphi \models \psi$ וגם $\chi \models \psi$~~
~~שאין שבכל השמה בה φ מקבל 1 χ בהכרח מקבל 0, וההיפך,~~

בעמוד מימין $\rightarrow$

i הוכחה: מקרה א' $\varphi \models \psi$, כלומר לכל I השמה בה ~~[illegible]~~
תוצאת φ היא 1, אזי $\psi=1$.
אבל: אם תוצאת φ 1, בהכרח (לפי הגדרת $\vee$)
תוצאת $(\varphi \vee \chi)$ גם 1 (ללא קשר ל-χ),

0/7

~~[illegible]~~

מקרה ב' $\chi \models \psi$ כלומר לכל I השמה בה תוצאת χ היא 1,
אזי $\psi=1$.
ושוב: לפי הגדרת $\vee$, אם תוצאת χ היא 1,
בהכרח תוצאת $(\varphi \vee \chi)$ גם 1.

$(\varphi \vee \chi)$ מקבל ערך 1 רק אם φ הוא 1 או χ הוא 1.
לכן כל השמה המספקת את $(\varphi \vee \chi)$ בהכרח מתאימה את
מקרה א' או מקרה ב' (או שניהם),
כלומר מתקיים $\varphi \models \psi$ או $\chi \models \psi$ (או שניהם),
לכן במקרים אלו $\psi=1$.

סך הכל בכל השמה בה $(\varphi \vee \chi)$ מקבלת 1 גם ψ מקבלת 1
ולפי הגדרת $\models$ ניתן לומר במקרים אלו
$(\varphi \vee \chi) \models \psi$.

6.ב.

ii הערכה: $\varphi = A$ $\quad \chi = B$ $\quad \psi = A \vee \neg B$

מתקיים: $A \wedge B \models A \vee \neg B$

אבל <u>לא</u> מתקיים

$B \models A \vee \neg B$

(כלומר $\chi \models \psi$

עבור השמה $B=1$, $A=0$

$\chi = 1$

$\psi = 0$

7/7

5 א.

המבנה: $U = \mathbb{N}$

$R = <$ (היחס "קטן מ")

$f(x) = 2$

השמה: $\alpha(x)$: $x=8$

$\exists x R(x, f(x))$ הופך ל: $\exists x\ x<2$ (קיים x כזה ב $\mathbb{N}$: 1).

לכן כ[illegible]- זה נכון.

אבל

$R(x, f(x))$ אומר $8<2$ איננו נכון בהשמה ובמבנה.

לכן $\exists x R(x,f(x)) \nvDash R(x,f(x))$

במבנה ובהשמה המתאימים.

מ.ש.ל.

המשך במחברת הבאה

10/10

5. ב. כדי להוכיח $\overbrace{\exists y\forall x R(x,y)}^{\varphi} \models \overbrace{\forall x\exists y R(f(x),y)}^{\psi}$

נראה כי $\varphi\wedge\neg\psi$ אינה ספיקה:

$$\exists y\forall x R(x,y)\wedge\neg(\forall x\exists y R(f(x),y))$$

נעבור לנוסחה מתוקנת:

$$\exists y\forall x R(x,y)\wedge\neg(\forall z\exists w R(f(z),w))$$

נעבור לנוסחת RPF:

$$\exists y\forall x\exists z\forall w\ R(x,y)\wedge\neg R(f(z),w)$$

נעבור לנוסחת סקולם: נגדיר קבוע c, ופונקציה g_1

$$\forall x\forall w\ R(x,c)\wedge\neg R(f(g(x)),w)$$

3/15

ניקח מופע יסודי $w=c$ $x=c$ $f(c)=c$ $g(c)=c$

ונקבל פסוקיות:

$f(c)$ $g(c)$ הם קבועים אסור להציב בהם!!

$C_1=\{R(c,c)\}$ $C_2=\{\neg R(c,c)\}$

מרזולוציה של C_1,C_2 מתקבלת $\square$ $C_3=\square$

מותר להציב רק בתנאים מסוימים אחרת נקבל הרבה טענות לא נכונות שצריך להוכיח אותן.

כלומר יש סדרת הוכחה ל$\square$ מהפסוקיות המתאימות את הנוסחה

$\Leftarrow$ הנוסחה אינה ספיקה.

$\Leftarrow$ $\exists y\forall x R(x,y)\models\forall x\exists y R(f(x),y)$

מ.ש.ל.