ת-1 22.10.07

יום שישי 19 אוקטובר 2007
10:36

עידו:
ido@nisseboim.com
שעת קבלה: 11:00
בחדר למתרגלים של מדמ"ח.

קבוצות

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4 \ldots\}$

$\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2\}$

$\mathbb{Q} = \{\frac{n}{m} \mid m \neq 0, \ n, m \in \mathbb{Z}\}$

$\mathbb{R}$

$\mathbb{C} = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{R}\}$

סימונים:

$\forall$ לכל

$\exists$ קיים

$a \in b$ a שייך ל-b

תרגיל

הוכח כי $\sqrt{2}$ הוא מספר לא רציונלי:

נניח בשלילה כי $\sqrt{2}$ הוא מספר רציונלי.

$$\Updownarrow$$

$$\sqrt{2} = \frac{n}{m} \qquad (m \neq 0, \ n, m \in \mathbb{Z})$$

$$\Updownarrow$$

$$2 = \frac{n^2}{m^2}$$

$$2m^2 = n^2$$

$$\Downarrow$$

n^2 זוגי.

$$\Downarrow$$

n זוגי.

$$\Downarrow$$

n^2 מתחלק ב-4. (מכפלה של שני מספרים זוגיים)

$2m^2$ מתחלק ב-4

$\Downarrow$

m^2 זוגי

$\Downarrow$

m זוגי

$\Downarrow$

השבר בהגדרה $\frac{n}{m}$ אינו מצומצם וזו סתירה
כי אין $\frac{n}{m}$ כך שייצג את $\sqrt{2}$.

אינדוקציה

I הוכחה על תנאי בסיס.
II הנחה על קיום עבור n
III הוכחת קיום על $m=n+1$

תרגיל:

הוכח שלכל n טבעי, מתקיים:
$\uparrow$ $n\geq 1$

$$\frac{n}{3n+2}=\frac{2}{2\cdot 5}+\frac{2}{5\cdot 8}+\dots\dots+\frac{2}{(3n-1)(3n+2)}$$

בסיס: בדיקה עבור $n=1$:

$$\frac{1}{5}=\frac{2}{10} \quad \checkmark$$

צעד: נניח שעבור n הטענה מתקיימת.

הוכחה: נוכיח שעבור $m=n+1$ מתקיים:

$$\frac{n+1}{3n+5}=\underbrace{\frac{2}{2\cdot 5}+\frac{2}{5\cdot 8}+\dots+\frac{2}{(3n-1)(3n+2)}}_{\frac{n}{3n+2} = \text{הנחת האינדוקציה}}+\frac{2}{(3n+2)(3n+5)}$$

ת-1 01.01.07

יום שני 22 אוקטובר 2007
14:43

אגף ימין:

$$\frac{n}{3n+2} + \frac{2}{(3n+2)(3n+5)} =$$

$$= \frac{n(3n+5)+2}{(3n+2)(3n+5)} = \frac{3n^2+5n+2}{(3n+2)(3n+5)} = \frac{\cancel{(3n+2)}(n+1)}{\cancel{(3n+2)}(3n+5)}$$

$$= \frac{n+1}{3n+5}$$

הגענו לאגף שמאל.

אי שוויון ברנולי:

לכל $(-1)<\alpha\neq 0$ ולכל $n>1$ טבעי, מתקיים:

$$(1+\alpha)^n > 1+n\cdot\alpha$$

נוכיח את אי השוויון באינדוקציה:

בסיס: בדיקה עבור $n=2$:

$$(1+\alpha)^2 \overset{?}{>} 1+2\alpha$$

$$1+2\alpha+\alpha^2 \overset{?}{>} 1+2\alpha$$

$$\alpha^2 \overset{?}{>} 0 \quad \checkmark$$

כי $\alpha\neq 0$.

הנחת האינדוקציה: נניח שהטענה נכונה עבור n:

$$(1+\alpha)^n > \underline{(1+\alpha n)}$$

נוכיח:

$$(1+\alpha)^{n+1} > (1+(n+1)\alpha)$$

$$(1+\alpha)(1+\alpha)^n > (1+\alpha)\underline{(1+n\alpha)}$$ ⟵ עפ״י הנחת האינדוקציה

$$\|$$

$$(1+\alpha+n\alpha+n\alpha^2) > 1+n\alpha+\alpha$$

אגף ימין

אי-שוויונים

ערך מוחלט - המרחק מראשית הצירים.

$|x|<5 \iff -5<x<5$

$|x|>5 \iff x<-5$ או $x>5$

$\{x\in\mathbb{R} \mid |x-3|<1\}$ מהי הקבוצה,

במילים: כל המספרים במרחק קטן מאחד מהנק' 3

$|x-3|<1 \iff -1<x-3<1$

$\Downarrow$

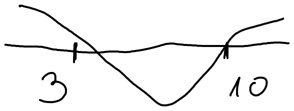
$\boxed{2<x<4}$

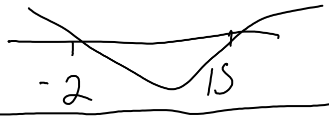
$\{x\in\mathbb{R} \mid |x^2-13x|>30\}$

$x^2-13x>30$ או $x^2-13x<-30$

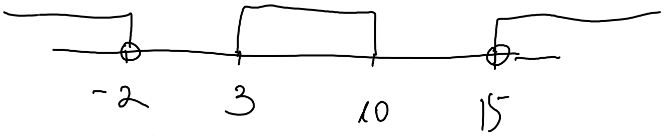
$x^2-13x-30>0$ $\qquad$ $x^2-13x+30<0$

$(x-15)(x+2)>0$ $\qquad$ $(x-10)(x-3)<0$





$\boxed{3<x<10}$ או $\boxed{x<-2 \text{ או } x>15}$



$\boxed{\begin{array}{ll} \text{או} & 3<x<10 \\ \text{או} & x<-2 \\ & x>15 \end{array}}$

ת-1 01.01.07

יום שני 22 אוקטובר 2007
15:09

תרגיל 1 הוכיחו שאם $|x-1|<\frac{1}{10}$ אז $\left|\frac{x^2-1}{x+3}\right|<\frac{1}{13}$

$$\left|\frac{(x+1)(x-1)}{x+3}\right| = |x+1||x-1|\left|\frac{1}{x+3}\right|$$

$$\Updownarrow$$

$$<\frac{1}{10}$$

$$\Downarrow$$

$$-\frac{1}{10}<x-1<\frac{1}{10}$$

נוסיף 2 לשני האגפים ונקבל:

$$+1\frac{9}{10}<x+1<2\frac{1}{10}$$

$$3\frac{9}{10}<x+3<4\frac{1}{10}$$

$$\frac{1}{4\frac{1}{10}}<\frac{1}{x+3}<\frac{1}{3\frac{9}{10}}$$

נחזור לאגף שמאל:

$$\left|\frac{(x-1)(x+1)}{x+3}\right| = |x+1||x-1|\left|\frac{1}{x+3}\right| < 2\frac{1}{10}\cdot 4\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{3\frac{9}{10}} = \frac{7}{130} < \underline{\underline{\frac{1}{13}}}$$

$$\left|\frac{2x-5}{x-6}\right|<3$$

פתרון:

מקרה א: $x-6>0 \iff x>6$

חיובי →
חיובי →

$$\frac{2x-5}{x-6}<3$$

$$2x-5<3x-18$$

$x>13 \Leftarrow \boxed{13<x}$ וגם $x>6$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{x>13}$$

מקרה ב: $x-6<0 \iff x<6$

$$\left|\frac{2x-5}{6-x}\right|<3 \iff |2x-5|<3\overset{\text{חיובי}}{\overset{\downarrow}{|6-x|}}<18-3x$$

$$3x-18<2x-5<18-3x$$

$3x-18<2x-5$ 　 $2x-5<18-3x$

$x<13$ וגם $\underline{\underline{x<6}}$ 　 $x<\frac{23}{5}$ וגם $\underline{\underline{x<6}}$

ת-1 01.01.07

יום שני 22 אוקטובר 2007
15:29

הבינום של ניוטון

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n b^0 + \binom{n}{1}a^{n-1}b^1 + \dots + \binom{n}{n}a^0 b^n$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}$$

יום שני 29 אוקטובר 2007
14:11

שדה

קבוצה עם 2 פעולות $\cdot\ ;\ +$ המקיימת

① $\forall x,\ x+0=x$

② $(x+y)+z = x+(y+z)$

③ $x+y=y+x$

④ $\forall x \exists y:\ x+y=0$ נגדי

⑤ $\forall x:\ x\cdot 1=0$

⑥ $(xy)z = x(yz)$

⑦ $xy=yx$

⑧ $\forall x\neq 0 \exists y:\ xy=1$ הפכי

⑨ $x(y+z) = xy+xz$

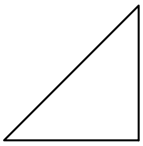
משפט ארכימדס

לכל שני מספרים ממשיים $a,b>0$ קיים n טבעי כך ש: $an>b$

או בניסוח אחר:

לכל $a>0$ ממשי קיים n טבעי כך ש: $n>a$.

אי שוויון המשולש



$$|x+y| \le |x|+|y|$$

הוכחה:

נבחין כי: $-|x|\le x\le |x|\ ,\ -|y|\le y\le |y|$

$$\Downarrow$$

$$-(|x|+|y|) = -|x|-|y| \le x+y \le |x|+|y|$$

$$\underset{\text{משל}}{\Longleftrightarrow}\quad |x+y| \le |x|+|y|$$

ת-2

יום שני 29 אוקטובר 2007
14:31

מסקנה: $|x-y| \ge |x|-|y|$

הוכחה:

נבחין כי מתקיים: $x=(x-y)+y$

$|x| = |(x-y)+y| \le |(x-y)|+|y|$

אי שוויון המשולש

לאגף שני

$|x|-|y| \le |(x-y)|$.

קבוצות חסומות

קבוצת מספרים $A\subseteq R$ נקראת חסומה מלעיל אמ"מ קיים $M\in R$ כך ש:

$$\forall x\in A : M>x$$

M נקרא חסם מלעיל של A.

קבוצת מספרים $A\subseteq R$ נקראת חסומה מלרע אמ"מ קיים $m\in R$ כך ש:

$$\forall x\in A : x>m$$

m נקרא חסם מלרע של A.

קבוצה חסומה = חסומה מלעיל וגם מלרע.

לחילופין: אם קיים M כך ש: $|x|<M$.

סופרמום = החסם מלעיל הקטן ביותר

$\Longleftrightarrow$ כל מספר שקטן ממנו איננו חסם מלעיל, כלומר:

$$\exists a\in A : a>x\ (<M)$$

אינפימום = החסם מלרע הגדול ביותר.

ת-2

יום שני 29 אוקטובר 2007
14:47

נתבונן במספר תכונות:

① הטבעיים:

חסומה מלרע , לא חסומה מלעיל

אינפימום = 0

② $[3,6]$:

חסומה מלרע , חסומה מלעיל

אינפימום = 3 , סופרמום = 6

מינימום = 3 , מקסימום = 6

קטעים מוכללים:

אם $a<b$ אז:

$$[a,b] = \{x\in R \mid a\le x\le b\}$$

$$(a,b) = \{x\in R \mid a< x< b\}$$

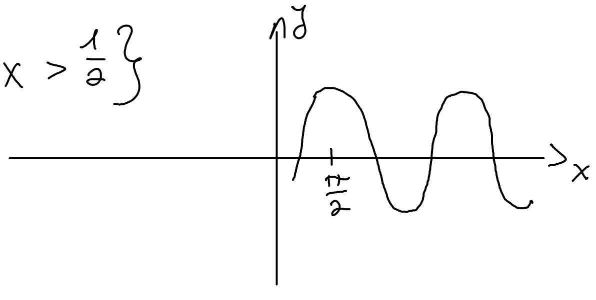
$$[a,b) = \{x\in R \mid a\le x< b\}$$

$$(a,b] = \{x\in R \mid a< x\le b\}$$

דוגמאות:

$$\{x\in R \mid x-7>0\} = (7,\underset{\inf=7}{\underset{\downarrow}{\infty}})$$

$$A=\{x\in R \mid \sin x > \tfrac{1}{2}\}$$



טענה: קבוצה A (מהסעיף הקודם) לא חסומה מלעיל.

הוכחה: נניח בשלילה שקיים $M>0$ טבעי חסם מלעיל של A

$$M < \frac{\pi}{2} + 2\lceil M \rceil \pi$$

ברור כי: $\sin\left(\frac{\pi}{2} + n\cdot\pi\right) = 1$

$$\Downarrow$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + 2\lceil M \rceil \pi\right) = 1$$

$$\Downarrow$$

$$\left(\frac{\pi}{2} + 2\lceil M \rceil \pi\right) \in A$$

$$\Downarrow$$

M לא חסם עליון.

סתירה.

אקסיומת השלמות: לקבוצה חסומה מלעיל תמיד יש סופרמום
מלרע אינפימום

תרגיל: יהי $\{x\in\mathbb{R} \mid \forall n\in\mathbb{N}: |x|<\frac{1}{n}\}$

הוכח: $x=0$.

נניח בשלילה כי: $|x|>0$.

$$\forall n: \quad 0<|x|<\frac{1}{n} \quad / \cdot \frac{n}{|x|}$$

$$\Downarrow$$

$$\forall n: \quad n<\frac{1}{|x|}$$

סתירה לתכונת ארכימדס כי פה $\frac{1}{|x|}$ הוא חסם עליון לטבעיים.

ת-2

יום שני 29 אוקטובר 2007
15:13

תרגיל:

יהיו $A,B\subseteq R$ חסומות מלעיל ולא ריקות. הוכח/הפרך:

$$\exists b\in B: \forall a\in A \quad a<b \Rightarrow \sup A<\sup B$$

לא נכון: $B=[3,6]$ $A=(3,6)$

מתקיים $\forall a\in A: \quad a<6$

אבל: $\sup A=\sup B=\underline{6}$

משפט

נאמר שהרציונליים $\mathbb{Q}$ צפופה בתוך $\mathbb{R}$, כלומר:

לכל $a,b\in R$ $(b>a)$ קיים $q\in\mathbb{Q}$ כך ש:

$$a<q<b$$

הוכחה:

נחלק לשני מקרים:

☐ ⓐ $b-a>1$

☐ ⓑ $b-a\le 1$

א

אם $b-a>1$, אזי קיים $z\in\mathbb{Z}$ (שלם) כך ש: $a<z<b$.

ב

אם $b-a\le 1$, נחלק ב-$(b-a)$ ונקבל:

$$1\le\frac{1}{b-a}$$

לפי תכונות ארכימדס קיים n טבעי כך ש:

$$n>\frac{1}{b-a}$$

נכפול ב-$\left(\frac{b-a}{n}\right)$ ונקבל:

$$\boxed{b-a>\frac{1}{n}}$$

לכן קיים:

$$a<\frac{z}{n}<b$$

ת-2

יום שני 29 אוקטובר 2007
15:35

תרגול:

$$A=\left\{\frac{1}{2},\frac{2}{3},\dots,\frac{n}{n+1}\right\}=\left\{\frac{n}{n+1}\;\middle|\; n\in\mathbb{N}, n>0\right\}$$

האם A חסומה? כן.

$$\inf(A)=\min(A)=\frac{1}{2}\left(=a_1\right)$$

$$\sup(A)=1$$

אין מקסימום.

פורמלית:

$$\frac{n}{n+1}\overset{?}{<}\frac{n+1}{n+2}\quad /\cdot(n+1)(n+2)$$

$$n(n+2)\overset{?}{<}(n+1)^2$$

$$n^2+2n\overset{?}{<}n^2+2n+1$$

אמת.

1 חסם מלעיל כי $n<n+1$ ומכאן: $\frac{n}{n+1}<1$

נראה שהוא גם סופרמום:

ניקח $b<1$ ונראה שקיים n כך ש: $b<\frac{n}{n+1}$

אם $b<1$ אזי קיים רציונלי $\frac{p}{q}$ כך ש: $b<\frac{p}{q}<1$ (עפ״י משפט קודם)

$$b<\frac{p}{q}\underset{\uparrow}{\leq}\frac{q-1}{q}<1$$

p הוא לכל היותר $q-1$

ו- $\frac{q-1}{q}$ הוא איבר ב- a.