

# מבני נתונים

# אוסף מבחנים

נציג החוג: עילאי הנדין

054-4448698

ilai@netvision.net.il

לחומרים נוספים גלשו לאתר הסטודנטים:

[cs.haifa.ac.il/students](http://cs.haifa.ac.il/students)



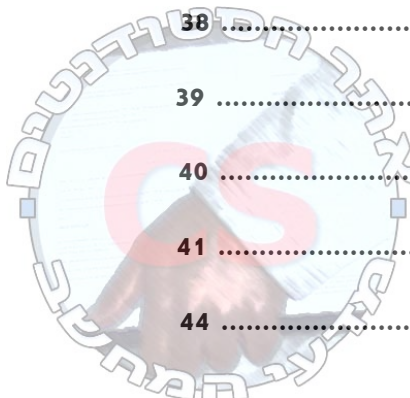
# מבני נתונים – אוסף מבחנים

איסוף ועריכה: עילאי הנדין.

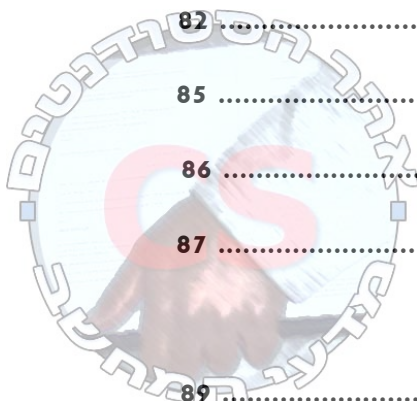
תודה לכל הסטודנטים שהשתתפו בפרוייקט פתרון המבחנים במבני נתונים לאורך השנים.  
הפתרונות אינם פתרונות רשמיים ויתכנו טעויות.

## תוכן עניינים

3	מועד א', סמסטר א' תשס"ה + פתרון
8	מועד ב', סמסטר א' תשס"ה + פתרון
12	מועד ג', סמסטר א' תשס"ה + פתרון
15	מועד א', סמסטר ב' תשס"ד + פתרון
18	מועד ב', סמסטר ב' תשס"ד + פתרון
20	מועד א', סמסטר א' תשס"ד + פתרון
23	מועד ב', סמסטר א' תשס"ד + פתרון
26	מועד ג', סמסטר א' תשס"ד + פתרון
29	מועד א', סמסטר ב' תשס"ג + פתרון
31	מועד ב', סמסטר ב' תשס"ג
32	מועד ג', סמסטר ב' תשס"ג
33	מועד א', סמסטר א' תשס"ג + פתרון
35	מועד ב', סמסטר א' תשס"ג + פתרון
37	מועד ג', סמסטר א' תשס"ג
38	מועד א', סמסטר ב' תשס"ב
39	מועד ב', סמסטר ב' תשס"ב
40	מועד ג', סמסטר ב' תשס"ב
41	מועד א', סמסטר א' תשס"ב + פתרון
44	מועד ב', סמסטר א' תשס"ב



- 46 ..... מועד ג', סמסטר א' תשס"ב
- 47 ..... מועד א', סמסטר ב' תשס"א
- 49 ..... מועד ב', סמסטר ב' תשס"א
- 51 ..... מועד א', סמסטר א' תשס"א + פתרון
- 53 ..... מועד ב', סמסטר א' תשס"א
- 55 ..... מועד ג', סמסטר א' תשס"א
- 57 ..... מועד א', סמסטר א' תש"ס
- 59 ..... מועד ב', סמסטר א' תש"ס
- 60 ..... מועד א', סמסטר א' תשנ"ט + פתרון
- 63 ..... מועד ב', סמסטר א' תשנ"ט + פתרון חלקי
- 66 ..... מועד ג', סמסטר א' תשנ"ט
- 68 ..... מועד ב', סמסטר א' תשנ"ו + פתרון
- 70 ..... מועד ג', סמסטר א' תשנ"ו + פתרון
- 73 ..... מבחן אמצע, סמסטר ב' תשס"ה
- 74 ..... מבחן אמצע, סמסטר א' תשס"ה
- 75 ..... מבחן אמצע, סמסטר ב' תשס"ד
- 76 ..... מבחן אמצע, סמסטר א' תשס"ד
- 77 ..... מבחן אמצע, סמסטר ב' תשס"ג + פתרון
- 79 ..... מבחן אמצע, סמסטר א' תשס"ג + פתרון
- 81 ..... מבחן אמצע, סמסטר ב' תשס"ב
- 82 ..... מבחן אמצע, סמסטר א' תשס"ב + פתרון חלקי
- 85 ..... מבחן אמצע, סמסטר ב' תשס"א
- 86 ..... מבחן אמצע, סמסטר א' תשס"א
- 87 ..... מבחן אמצע, סמסטר א' תש"ס
- 89 ..... אוסף תרגילים ופתרונות



203.2310.א.1

שנה"ל תשס"ה, סמס' א', מועד א', 17/1/05  
פרופ' מנחם גד לנדאו

זמן הבחינה: שעה ועשרים דקות.  
חומר עזר: דף A4 בלבד ובו תוכן ללא הגבלה.

**שאלה 1: (33 נק')**

תכנן אלגוריתם שמקבל כקלט עץ אדום שחור ובו  $n$  רשומות.  
האלגוריתם מחלק את העץ ל- $\sqrt{n}$  עצים אדומים נפרדים. בכל עץ  $\sqrt{n}$  איברים.  
נתח את סיבוכיות הזמן של האלגוריתם שתכנת.

הנח שעץ האדום שחור הוא בידך והתחיל כעץ ריק. הראה דרך שבה תוספת לפעולות  
הרגילות של העץ תאפשר אלגוריתם יעיל יותר לבעיית חלוקת העץ ל- $\sqrt{n}$  עצים שבכל אחד  
מהם  $\sqrt{n}$  רשומות.

נתח את סיבוכיות הזמן של האלגוריתם החדש שתכנת ואת סיבוכיות הזמן של כל פעולה  
חדשה בעץ האדום-שחור.

**שאלה 2: (34 נק')**

תכנן אלגוריתם שמקבל כקלט מערך ובו  $n$  רשומות.  
לכל רשומה:  
קוד – מספר ממשי  
ציון – מספר שלם

האלגוריתם יענה על מספר רב של שאילתות במבנה הבא:  
קלט: שני מספרים ממשיים  $p$  ו- $q$

פלט: הציון המינימלי בין הרשומות שהקוד שלהם גדול מ- $p$  וקטן מ- $q$

נתח את סיבוכיות הזמן של הכנת מבנה הנתונים ואת סיבוכיות הזמן של מתן  
תשובה לכל שאילתא.



**שאלה 3: (33 נק')**

תכנן אלגוריתם שמטפל ב- $n$  רשומות של תלמידים.

בכל רשומה:

- א. שם – אותיות
- ב. ת.ז. – מספר ממשי
- ג. כיתה – מספר שלם
- ד. בית-ספר – מספר שלם
- ה. ציון באנגלית – מספר ממשי

בנה מבנה נתונים שמאפשר תשובות לשאלות הבאות:

- א. הוספת תלמיד לפי ת.ז.
- ב. הוצאת תלמיד לפי ת.ז.
- ג. בהנתן מספר כיתה – שם התלמיד המצטיין באנגלית בכיתה
- ד. בהנתן מספר בית-ספר – שם התלמיד המצטיין באנגלית בבית-ספר
- ה. איחוד שתי כיתות (הקלט לפעולה – מספרי שתי הכיתות, ומספר בית-הספר)

הנח שמספר התלמידים הכללי  $n$  ומספר התלמידים בכיתה לא גדול מ- $m$   
מספר הכיתות בבית-ספר הוא לא גדול מ- $c$ , ומספר בתי-הספר הוא לא גדול מ- $s$ .

נתח את סיבוכיות הזמן הכנת מבנה הנתונים ואת סיבוכיות הזמן של התשובה לכל  
שאלתא כפונקציה של  $n, m, c, s$ .



בהצלחה !!



10 10 1000

$O(\sqrt{n})$   $O(\log n)$  } כניסה (1)  $\circlearrowleft$   
 inorder traversal  $\sqrt{n}$  גודל האבן  $\sqrt{n}$  גודל האבן  
 split  $\sqrt{n}$  גודל האבן  
 $\sqrt{n} \cdot \sqrt{n} \log n = O(n \log n)$  - כניסה  $\sqrt{n}$  גודל האבן

סה ענה ידני מדי...

הגודל של האבן  $\sqrt{n}$  גודל האבן  $\sqrt{n}$  גודל האבן  $\sqrt{n}$  גודל האבן

$O(n)$   $O(1)$   $O(\sqrt{n})$  } כניסה  
 inorder traversal  $\sqrt{n}$  גודל האבן  $\sqrt{n}$  גודל האבן  
 split  $\sqrt{n}$  גודל האבן  $\sqrt{n}$  גודל האבן  
 $\sqrt{n}$  גודל האבן  $\sqrt{n}$  גודל האבן

ידני מדי  $\sqrt{n}$  גודל האבן  
 ידני מדי  $\sqrt{n}$  גודל האבן  
 ידני מדי  $\sqrt{n}$  גודל האבן

$O(\sqrt{n} \sqrt{n}) = O(n)$  כניסה

גודל האבן  $\sqrt{n}$  גודל האבן  $\sqrt{n}$  גודל האבן  $\sqrt{n}$  גודל האבן  
 גודל האבן  $\sqrt{n}$  גודל האבן  $\sqrt{n}$  גודל האבן  $\sqrt{n}$  גודל האבן

$O(\log n)$  =  $\sqrt{n}$  גודל האבן  $\sqrt{n}$  גודל האבן

גודל האבן  $\sqrt{n}$  גודל האבן  $\sqrt{n}$  גודל האבן  $\sqrt{n}$  גודל האבן  
 גודל האבן  $\sqrt{n}$  גודל האבן  $\sqrt{n}$  גודל האבן  $\sqrt{n}$  גודל האבן

$O(\log n)$  =  $\sqrt{n}$  גודל האבן  $\sqrt{n}$  גודל האבן

$O(\log n)$   $O(\log n)$  } כניסה  
 inorder traversal  $\sqrt{n}$  גודל האבן  $\sqrt{n}$  גודל האבן  
 split  $\sqrt{n}$  גודל האבן  $\sqrt{n}$  גודל האבן  
 $\sqrt{n}$  גודל האבן  $\sqrt{n}$  גודל האבן

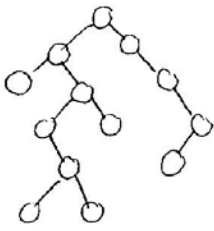
$O(\log n)$  כניסה

גודל האבן  $\sqrt{n}$  גודל האבן  $\sqrt{n}$  גודל האבן

- גודל האבן - גודל האבן  $\sqrt{n}$  גודל האבן  $\sqrt{n}$  גודל האבן
- גודל האבן - גודל האבן  $\sqrt{n}$  גודל האבן  $\sqrt{n}$  גודל האבן
- גודל האבן - גודל האבן  $\sqrt{n}$  גודל האבן  $\sqrt{n}$  גודל האבן



במקרה הכללי:  $O(n)$  -  $O(n)$



ל" -  $O(n)$  -  $O(n)$

~~במקרה הכללי:  $O(n)$  -  $O(n)$~~

במקרה הכללי:  $O(n)$  -  $O(n)$

במקרה הכללי:  $O(n)$  -  $O(n)$

LCA

$O(n)$

LCA



$O(n)$

$O(n)$

3

במקרה הכללי:  $O(n)$  -  $O(n)$

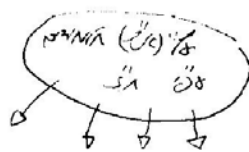
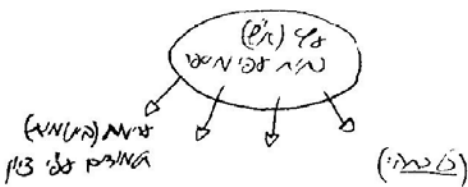
$O(n)$  -  $O(n)$

$O(n)$  -  $O(n)$

$O(n)$  -  $O(n)$



במקרה הכללי:  $O(n)$  -  $O(n)$

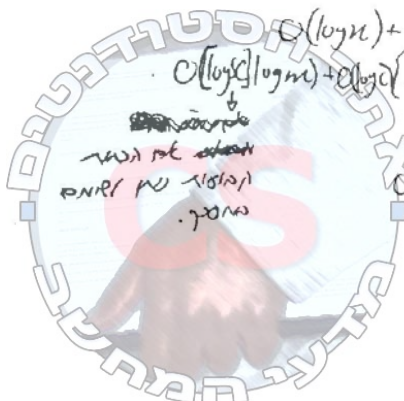


במקרה הכללי:  $O(n)$  -  $O(n)$

במקרה הכללי:  $O(n)$  -  $O(n)$

$O(n)$  -  $O(n)$

$O(n)$  -  $O(n)$



$O(\log s)$   
 $O(n)$  } • מנסה להימנע מה"ע"ם.  
• הנסיון הוא עם אבן ה (max) הנכונה

$O(\log s)$  • ~~מנסה להימנע מה"ע"ם~~  
 $O(\log c)$  • הנ"מ ה"ע"ם ה"ע"ם.  
 $O(\log c)$  • מנסה להימנע מה"ע"ם.  
 $O(\log c)$  • מנסה להימנע מה"ע"ם ה"ע"ם.

הנ"מ ה"ע"ם הוא  $O(\log s)$  - מנסה להימנע מה"ע"ם.  
הנ"מ ה"ע"ם הוא  $O(\log c)$  - מנסה להימנע מה"ע"ם.  
↓  
הנ"מ ה"ע"ם הוא  $O(\log c)$  - מנסה להימנע מה"ע"ם.





203.2310.א.1

שנה"ל תשס"ה, סמס' א', מועד ב', 17/2/05  
פרופ' מנחם גד לנדאו

זמן הבחינה : שעתיים.  
חומר עזר : דף A4 בלבד ובו תוכן ללא הגבלה.

שאלה 1: (33 נק')

הוסף לפעולות שנלמדו בכיתה לטיפול בעץ אדום-שחור את השאילתא הבאה :  
קלט : מצביע על צומת A בעץ ובו מפתח PA.  
פלט : צומת B בעץ ובו מפתח PB כך שבעץ קיימים בדיוק  $\log n$  מפתחות הגדולים מ- PA וקטנים מ-PB .  
הראה דרך לענות על השאילתא ב-  $O(1)$  זמן.  
נתח את סיבוכיות הזמן של השינויים שבצעת על שאר הפעולות בעץ האדום-שחור. הנח שהשאילתות ניתנות מספר רב של פעמים.

שאלה 2: (34 נק')

נתונה ערמה ובה  $n$  איברים.  
הראה דרך לחלק את הערמה לשתי ערמות : באחת  $\frac{n}{3}$  איברים ובשניה  $\frac{2n}{3}$ .  
התייחס בנפרד לערמה בינארית ולערמה בינומית.  
נתח את סיבוכיות הזמן של האלגוריתמים שתכנתת.

שאלה 3: (33 נק')

נתון עץ ובו  $n$  צמתים. בכל צומת מספר שלם חיובי.  
תכנן אלגוריתם שבהינתן מצביעים לשני צמתים  $a$  ו-  $b$  בעץ מחשב את סכום המספרים בצמתים על המסלול בעץ בין  $a$  ל-  $b$ .  
נתח את זמן הכנת מבני הנתונים ואת זמן התשובה לכל שאילתא.

בהצלחה!

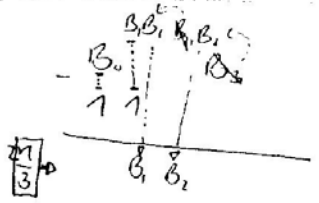
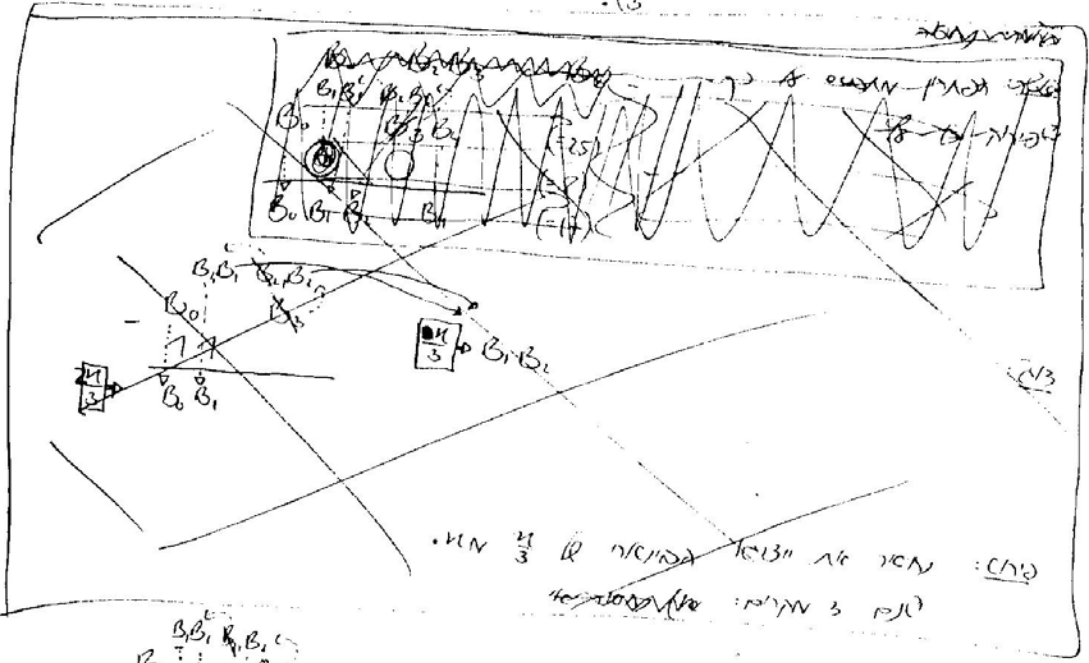




פונקציה סימטרית

הפונקציה  $f(x)$  היא סימטרית ביחס ל- $x = \frac{1}{3}$ .  
 הפונקציה  $f(x)$  היא סימטרית ביחס ל- $x = \frac{1}{3}$ .

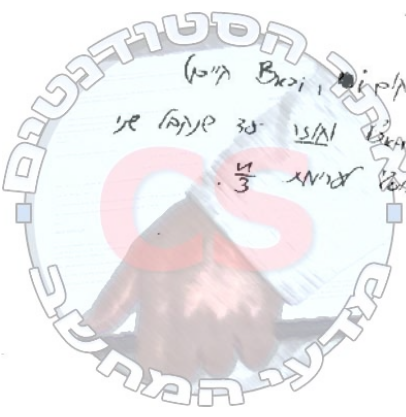
נניח  $f(x) = \frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}$ .  
 הפונקציה  $f(x)$  היא סימטרית ביחס ל- $x = \frac{1}{3}$ .



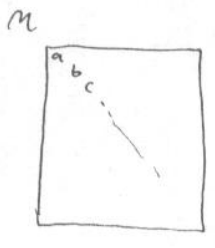
הפונקציה  $f(x)$  היא סימטרית ביחס ל- $x = \frac{1}{3}$ .  
 הפונקציה  $f(x)$  היא סימטרית ביחס ל- $x = \frac{1}{3}$ .

הפונקציה  $f(x)$  היא סימטרית ביחס ל- $x = \frac{1}{3}$ .  
 הפונקציה  $f(x)$  היא סימטרית ביחס ל- $x = \frac{1}{3}$ .

הפונקציה  $f(x)$  היא סימטרית ביחס ל- $x = \frac{1}{3}$ .  
 הפונקציה  $f(x)$  היא סימטרית ביחס ל- $x = \frac{1}{3}$ .



1.  $M[a,b]$  ו- $M[b,a]$  הם  $N \times N$  מטריצות,  $M[a,a] = V[a]$  - כל  $M[a,b] = M[b,a]$  (מטריצה סימטרית).  
 גודלן של  $M[a,b]$  הוא  $N$ .



מטריצה סימטרית.  $M[a,b]$  הוא גודל  $N$ .  
 מטריצה סימטרית -  $M[a,b] = M[b,a]$ .  
 גודל  $M[a,b]$  הוא  $N$ .

2.  $LCA$  (Lowest Common Ancestor) - גודל  $N$ .  
 גודל  $LCA$  הוא  $N$ .

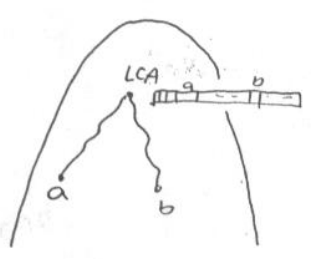


$LCA$  הוא גודל  $N$ .

3.  $LCA$  (Lowest Common Ancestor) - גודל  $N$ .

גודל  $LCA$  הוא  $N$ .  
 גודל  $LCA$  הוא  $N$ .

גודל  $LCA$  הוא  $N$ .



גודל  $LCA$  הוא  $N$ .  
 גודל  $LCA$  הוא  $N$ .

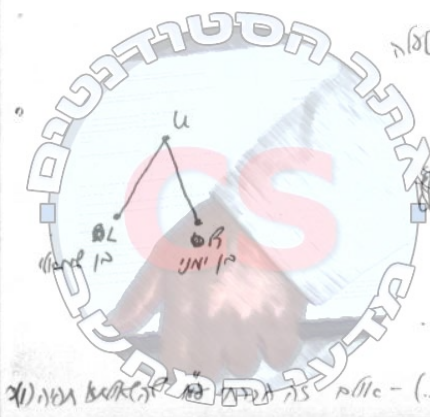
גודל  $LCA$  הוא  $N$ .

גודל  $LCA$  הוא  $N$ .

גודל  $LCA$  הוא  $N$ .

גודל  $LCA$  הוא  $N$ .

גודל  $LCA$  הוא  $N$ .



גודל  $LCA$  הוא  $N$ .

203.2310.א.1

שנה"ל תשס"ה, סמס' א', מועד ג', 1/4/05  
פרופ' מנחם גד לנדאו

זמן הבחינה: שעתיים.  
חומר עזר: דף A4 בלבד ובו תוכן ללא הגבלה.

**שאלה 1: (33 נק')**

פעולת "מצא חביב" בערמה בינומית שנלמדה בכיתה עלותה  $O(\log n)$ .  
הראה כיצד ניתן לשנותה לפעולה שזמנה  $O(1)$ , ומה משמעות השינויים שביצעת על שאר  
הפעולות בערמה הבינומית (סיבוכיות הזמן של שאר הפעולות). אין להוסיף מבני נתונים  
ומשתנים נוספים מעבר למבנה הרגיל של הערמה הבינומית.

**שאלה 2: (33 נק')**

בנה מבני נתונים שמטפל ברשומות (לכל רשומה מפתח) ומבצע את הפעולות הבאות:

א. הוסף רשומה.

ב. הוצא רשומה לפי מפתח.

ג. מוצא רשומה לפי מפתח.

2.1 הנח שמספר המפתחות השונים בכל רגע נתון הוא  $n^{1/5}$ . תאר את מבני הנתונים ונתח  
את סיבוכיות הזמן של כל פעולה.

2.2 הנח שמספר המפתחות השונים בכל רגע נתון הוא  $(\log n)^6$ . תאר את מבני הנתונים  
ונתח את סיבוכיות הזמן של כל פעולה.

**שאלה 3: (34 נק')**

נתונים  $n$  מספרים  $a_1 \dots a_n$ . תכנן אלגוריתם שעונה לשאלות שמקבלות כקלט אינדקס  $i$

ומחשבות את מספר האיברים בין האיבר  $a_i$  והאיבר  $a_j$  כך ש:

$$j < i \quad (1)$$

$$a_j < a_i \quad (2)$$

$$(3) \text{ וגם } j \text{ מקסימאלי.}$$

נתח את סיבוכיות הזמן של הכנת מבני הנתונים, ואת סיבוכיות הזמן של מתן התשובה  
לכל שאלתא.

בהצלחה!



1

הוכחה הישנה של  $\log$  (הוכחה נכונה) היא  $O(\log n)$  קטנה יותר מ- $O(n)$  (הוכחה של  $\log$  הישנה).  
 הוכחה נכונה -  $B_k$  -  $B_k$  היא הוכחה של  $\log$  הישנה.  
 הוכחה נכונה -  $B_k$  -  $B_k$  היא הוכחה של  $\log$  הישנה -  $O(1)$ .

~~הוכחה נכונה -  $B_k$  -  $B_k$  היא הוכחה של  $\log$  הישנה.~~  
~~הוכחה נכונה -  $B_k$  -  $B_k$  היא הוכחה של  $\log$  הישנה.~~  
~~הוכחה נכונה -  $B_k$  -  $B_k$  היא הוכחה של  $\log$  הישנה.~~  
~~הוכחה נכונה -  $B_k$  -  $B_k$  היא הוכחה של  $\log$  הישנה.~~

פונקציה  $O(\log)$   
 פונקציה  $O(\log)$   
 פונקציה  $O(\log)$   
 פונקציה  $O(\log)$

הוכחה נכונה -  $B_k$  -  $B_k$  היא הוכחה של  $\log$  הישנה.  
 הוכחה נכונה -  $B_k$  -  $B_k$  היא הוכחה של  $\log$  הישנה.  
 הוכחה נכונה -  $B_k$  -  $B_k$  היא הוכחה של  $\log$  הישנה.  
 הוכחה נכונה -  $B_k$  -  $B_k$  היא הוכחה של  $\log$  הישנה.  
 הוכחה נכונה -  $B_k$  -  $B_k$  היא הוכחה של  $\log$  הישנה.  
 הוכחה נכונה -  $B_k$  -  $B_k$  היא הוכחה של  $\log$  הישנה.  
 הוכחה נכונה -  $B_k$  -  $B_k$  היא הוכחה של  $\log$  הישנה.

הוכחה נכונה -  $B_k$  -  $B_k$  היא הוכחה של  $\log$  הישנה.

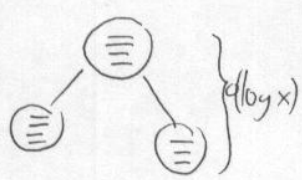
הוכחה נכונה -  $B_k$  -  $B_k$  היא הוכחה של  $\log$  הישנה.  
 הוכחה נכונה -  $B_k$  -  $B_k$  היא הוכחה של  $\log$  הישנה.

הוכחה נכונה -  $B_k$  -  $B_k$  היא הוכחה של  $\log$  הישנה.  
 הוכחה נכונה -  $B_k$  -  $B_k$  היא הוכחה של  $\log$  הישנה.  
 הוכחה נכונה -  $B_k$  -  $B_k$  היא הוכחה של  $\log$  הישנה.  
 הוכחה נכונה -  $B_k$  -  $B_k$  היא הוכחה של  $\log$  הישנה.



ע"י גישה אחרת של זכרון יחיד כי יש לה קווי חישוב של  $O(\log n)$ .  
 מה גודל זיכרון  $O(\log n)$  של המערכת  $(n, \log n)$ .  
 $O(\log n)$  - זיכרון של  $(n, \log n)$   
 $O(\log n)$  - זיכרון של  $(n, \log n)$   
 $O(\log n)$  - זיכרון של  $(n, \log n)$

(2)



① זיכרון גישה של  $O(\log n)$  - זיכרון של  $(n, \log n)$   
 $O(\log n)$  - זיכרון של  $(n, \log n)$   
 $O(\log n)$  - זיכרון של  $(n, \log n)$

② זיכרון גישה של  $O(\log n)$  - זיכרון של  $(n, \log n)$   
 $O(\log n)$  - זיכרון של  $(n, \log n)$   
 $O(\log n)$  - זיכרון של  $(n, \log n)$

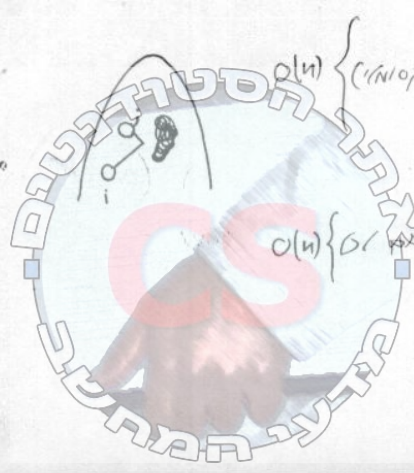
ע"י גישה אחרת של זכרון יחיד כי יש לה קווי חישוב של  $O(\log n)$ .

(1)

① זיכרון גישה של  $O(\log n)$  - זיכרון של  $(n, \log n)$   
 $O(\log n)$  - זיכרון של  $(n, \log n)$   
 $O(\log n)$  - זיכרון של  $(n, \log n)$

(3)

③ זיכרון גישה של  $O(\log n)$  - זיכרון של  $(n, \log n)$   
 $O(\log n)$  - זיכרון של  $(n, \log n)$   
 $O(\log n)$  - זיכרון של  $(n, \log n)$



203.2310.א.1

שנה"ל תשס"ד, סמס' ב', מועד א', 21.6.2004  
פרופ' מנחם גד לנדאו

זמן הבחינה: שעתיים.  
חומר עזר: דף A4 בלבד ובו תוכן ללא הגבלה.

**שאלה 1: (33 נק')**

ברצוננו להוסיף לפעולות הטיפול בעץ אדום שחור (בעל  $n$  צמתים) שנלמדו בכיתה את הפעולה  $split$ . פעולה זו מחלקת את העץ לשני עצים בעלי גודל זהה ( $\pm 1$ ). בעץ הראשון האיברים הקטנים ובעץ השני האיברים הגדולים. נתח את סיבוכיות הזמן של פעולת ה- $split$ . האם השינויים שביצעת בעץ האדום שחור השפיעו על סיבוכיות הזמן של הפעולות הרגילות? (רמז: ניתן לבצע את פעולת ה- $split$  ב  $O(\log(n))$  זמן).

**שאלה 2: (33 נק')**

נתון עץ קרטזי ובו  $n$  איברים (מינימום בראש).  
א. תכנן אלגוריתם שמוצא את  $k$  האיברים הקטנים מתוך  $n$  האיברים. נתח את סיבוכיות הזמן של האלגוריתם.  
ב. הדפס את  $n$  האיברים ממוינים. נתח את סיבוכיות הזמן של האלגוריתם שתכנתת. הוכח שלא ניתן לשפר את האלגוריתם שהצעת.

**שאלה 3: (34 נק')**

נתונות  $n$  רשומות. בכל רשומה:  
א. שם הסטודנט  
ב. מספר סידורי (מספר ממשי)  
ג. ציון במערכות הפעלה (מספר שלם 0-100)  
ד. ציון ממוצע בחוג למדעי המחשב (מספר ממשי)

בנה מבני נתונים שמאפשרים לבצע את הפעולות הבאות:

- הוסף סטודנט לפי מספר סידורי.
  - בטל סטודנט לפי מספר סידורי.
  - מצא את הסטודנט בעל המספר הסידורי הקטן ביותר מבין כל הסטודנטים בעלי הציון הממוצע הגבוה ביותר בחוג.
  - מצא את הסטודנט שהציון שלו במערכות הפעלה הוא הציון של שאר הציונים.
- נתח את סיבוכיות הזמן של הכנת מבני הנתונים. הנח שהתחלת ממבני נתונים ריקים. נתח את סיבוכיות הזמן של כל שאילתא, הנח שבזמן השאילתא מבני הנתונים מכילים  $n$  רשומות.

בהצלחה!



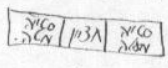


(1)

על קבוצת split הנתונה.

מציג את הוכחה: (על קבוצת split הנתונה - על קבוצת split הנתונה)

מציג את הוכחה: (על קבוצת split הנתונה - על קבוצת split הנתונה)

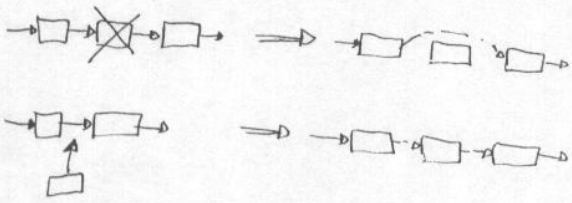


~~על קבוצת split הנתונה~~

הוכחה: (על קבוצת split הנתונה - על קבוצת split הנתונה).  
 המסקנה היא: (על קבוצת split הנתונה - על קבוצת split הנתונה).  
 המסקנה היא: (על קבוצת split הנתונה - על קבוצת split הנתונה).

לפי מ' א' (1)

על קבוצת split הנתונה.



split: (על קבוצת split הנתונה - על קבוצת split הנתונה).

(2)

הוכחה: (על קבוצת split הנתונה - על קבוצת split הנתונה).  
 המסקנה היא: (על קבוצת split הנתונה - על קבוצת split הנתונה).

הוכחה: (על קבוצת split הנתונה - על קבוצת split הנתונה).  
 המסקנה היא: (על קבוצת split הנתונה - על קבוצת split הנתונה).

הוכחה: (על קבוצת split הנתונה - על קבוצת split הנתונה).  
 המסקנה היא: (על קבוצת split הנתונה - על קבוצת split הנתונה).

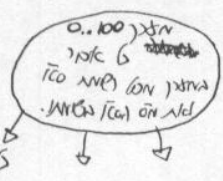


הוכחה: (על קבוצת split הנתונה - על קבוצת split הנתונה).  
 המסקנה היא: (על קבוצת split הנתונה - על קבוצת split הנתונה).

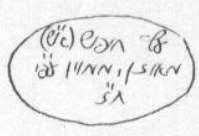
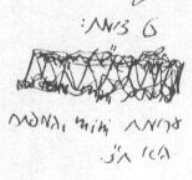
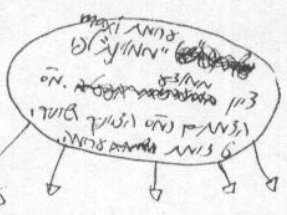
ASOF

3

נתון 3 נתיבי תחבורה, נתון מספר הרכבות  $n$  (כמה זמן נסיעה):



מסלול מסוג  $O(n)$   
 מסלול מסוג  $O(n)$   
 מסלול מסוג  $O(n)$



$O(\log n)$  - מסלול מסוג  $O(\log n)$ .  
 $O(\log n + \log n)$  - מסלול מסוג  $O(\log n + \log n)$ .  
 $O(1)$  - מסלול מסוג  $O(1)$ .

$O(\log n)$  - מסלול מסוג  $O(\log n)$ .  
 $O(\log n)$  - מסלול מסוג  $O(\log n)$ .  
 $O(1)$  - מסלול מסוג  $O(1)$ .

$O(1)$  - מסלול מסוג  $O(1)$ .  
 $O(1)$  - מסלול מסוג  $O(1)$ .

5

6

$O(100) = O(1)$  - מסלול מסוג  $O(1)$ .  
 $O(1)$  - מסלול מסוג  $O(1)$ .



נסוג: מסלול מסוג  $O(1)$ .  
 $O(1)$  - מסלול מסוג  $O(1)$ .

203.2310.א.1

שנה"ל תשס"ד, סמס' ב', מועד ב', 11/7/04  
פרופ' מנחם גד לנדאו

זמן הבחינה: שעתיים.  
חומר עזר: דף A4 בלבד ובו תוכן ללא הגבלה.

**שאלה 1: (33 נק')**

ברצוננו להוסיף לפעולות הטיפול בעץ אדום שחור (בעל  $n$  צמתים) שנלמדו בכיתה את שתי הפעולות הבאות:

- בהינתן מצביע למפתח  $P$  מצא ב-  $O(1)$  זמן האם המפתח  $P*2$  נמצא בעץ.
  - בהינתן מצביע למפתח  $P$  מצא ב-  $O(1)$  זמן את המפתח העוקב בעץ.
- האם השינויים שביצעת בעץ האדום שחור השפיעו על סיבוכיות הזמן של הפעולות הרגילות? הנח שהתחלת בעץ ריק, ובזמן מתן השאילתא בעץ  $n$  רשומות.

**שאלה 2: (33 נק')**

נתונה סדרת מספרים שלמים שונים  $a_1 \dots a_n$   
תכנן אלגוריתם שמקבל אינדקס  $q$  ומוצא את האינדקס  $j < q$  הגדול ביותר כך ש:  $a_j > a_q$   
נתח את סיבוכיות הזמן של הכנת מבנה הנתונים ואת סיבוכיות הזמן של המענה לכל שאילתא.

**שאלה 3: (34 נק')**

נתונות  $n$  רשומות. בכל רשומה:

- שם הסטודנט בעברית עד 20 אותיות
- ציון במערכות הפעלה (מספר שלם 0-100)
- ציון ממוצע בחוג למדעי המחשב (מספר ממשי)

בנה מבני נתונים שמאפשרים לבצע את הפעולות הבאות:

- הוסף סטודנט לפי שם הסטודנט.
- בטל סטודנט לפי שם הסטודנט.
- הדפס את כל השמות של התלמידים בעלי ממוצע הציונים בחוג למדעי המחשב מעל 90.
- הדפס את ממוצע הציונים במערכות הפעלה של כל התלמידים, נתח את סיבוכיות הזמן של הכנת מבני הנתונים. הנח שהתחלת ממבני נתונים ריקים. נתח את סיבוכיות הזמן של כל שאילתא, הנח שבזמן השאילתא מבני הנתונים מכילים  $n$  רשומות.

בהצלחה!



(1)

נתון:  $M = \{a, b, c\}$  ו-  $P = \{aa, ab, ba, bb\}$ .  
 מצא את כל המילים  $w \in M^*$  ש-  $w \in P^*$ .

Found/ NOT Found

מציאת מילים:

1. מציאת מילים -  $M^*$  -  $P^*$  (כל המילים במילה  $w$  הן מילים ב-  $P$ )

2. מציאת מילים -  $M^*$  -  $P^*$  (כל המילים במילה  $w$  הן מילים ב-  $P$ )

3. מציאת מילים -  $M^*$  -  $P^*$  (כל המילים במילה  $w$  הן מילים ב-  $P$ )

4. מציאת מילים -  $M^*$  -  $P^*$  (כל המילים במילה  $w$  הן מילים ב-  $P$ )

5. מציאת מילים -  $M^*$  -  $P^*$  (כל המילים במילה  $w$  הן מילים ב-  $P$ )

6. מציאת מילים -  $M^*$  -  $P^*$  (כל המילים במילה  $w$  הן מילים ב-  $P$ )

(2)

7. מציאת מילים -  $M^*$  -  $P^*$  (כל המילים במילה  $w$  הן מילים ב-  $P$ )

(3)

8. מציאת מילים -  $M^*$  -  $P^*$  (כל המילים במילה  $w$  הן מילים ב-  $P$ )



9. מציאת מילים -  $M^*$  -  $P^*$  (כל המילים במילה  $w$  הן מילים ב-  $P$ )

10. מציאת מילים -  $M^*$  -  $P^*$  (כל המילים במילה  $w$  הן מילים ב-  $P$ )

11. מציאת מילים -  $M^*$  -  $P^*$  (כל המילים במילה  $w$  הן מילים ב-  $P$ )

12. מציאת מילים -  $M^*$  -  $P^*$  (כל המילים במילה  $w$  הן מילים ב-  $P$ )

13. מציאת מילים -  $M^*$  -  $P^*$  (כל המילים במילה  $w$  הן מילים ב-  $P$ )

14. מציאת מילים -  $M^*$  -  $P^*$  (כל המילים במילה  $w$  הן מילים ב-  $P$ )

15. מציאת מילים -  $M^*$  -  $P^*$  (כל המילים במילה  $w$  הן מילים ב-  $P$ )

16. מציאת מילים -  $M^*$  -  $P^*$  (כל המילים במילה  $w$  הן מילים ב-  $P$ )



17. מציאת מילים -  $M^*$  -  $P^*$  (כל המילים במילה  $w$  הן מילים ב-  $P$ )

203.2310.א.1

שנה"ל תשס"ד, סמס' א', מועד א', 26.1.2004  
פרופ' מנחם גד לנדאו

זמן הבחינה: שעתיים.  
חומר עזר: דף A4 בלבד ובו תוכן ללא הגבלה.

**שאלה 1: (34 נק')**

נתונות  $n$  רשומות. בכל רשומה:

- א. שם הסטודנט
  - ב. תעודת זהות
  - ג. ציון במבנה נתונים (מספר שלם 0-100)
  - ד. ציון במערכות הפעלה (מספר ממשי)
- בנה מבני נתונים שמאפשרים לבצע את הפעולות הבאות:
- א. הוסף סטודנט לפי תעודת זהות.
  - ב. בטל סטודנט לפי תעודת זהות.
  - ג. מצא את הסטודנט בעל הפרש הציונים הקטן ביותר בין מבנה נתונים למערכות הפעלה.
  - ד. מצא את הציון השכיח ביותר במבנה נתונים.

**שאלה 2: (33 נק')**

ברצוננו להוסיף לפעולות הטיפול בעץ אדום שחור (בעל  $n$  צמתים) שנלמדו בכיתה את הפעולה הבאה (השאילתא תינתן מספר רב של פעמים):  
בהינתן מפתח  $i$ . בטל את  $\log n$  המפתחות העוקבים ל- $i$  בעץ.  
נתח את סיבוכיות הזמן של ביצוע הפעולה.  
האם השינויים שביצעת בעץ האדום שחור השפיעו על סיבוכיות הזמן של הפעולות הרגילות?

**שאלה 3: (33 נק')**

נתונות  $n$  מחרוזות DNA  $(s_1 \dots s_n)$ . בכל מחרוזת  $m$  אותיות ( $n > m$ ).  
בנה מבנה נתונים שמאפשר לענות על השאילתא הבאה (השאילתא תינתן מספר רב של פעמים).

קלט: 2 אינדקסים  $i$  ו- $j$   $1 \leq i, j \leq n$

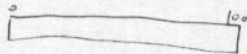
פלט: אורך הרישא הזהה של 2 המחרוזות  $s_i$  ו- $s_j$

(לדוגמא: האורך של הרישא הזהה של המחרוזות  $abcd$  ו- $abxy$  הוא 2)

נתח את סיבוכיות הזמן של בניית מבנה הנתונים ואת סיבוכיות הזמן של התשובה לכל שאילתא.

בהצלחה!





לכ לז א

1

מספר:  $O(n)$

מספר סיביות:  $O(\log n)$

מספר סיביות -  $O(\log n)$  זמן זיהוי  $O(n)$  זמן זיהוי  $O(n)$  זמן זיהוי  $O(n)$

מספר סיביות:  $O(\log n)$

מספר סיביות:  $O(\log n)$  זמן זיהוי  $O(n)$  זמן זיהוי  $O(n)$  זמן זיהוי  $O(n)$

מספר סיביות:  $O(\log n)$  זמן זיהוי  $O(n)$  זמן זיהוי  $O(n)$  זמן זיהוי  $O(n)$

1

מספר סיביות:  $O(\log n)$  זמן זיהוי  $O(n)$  זמן זיהוי  $O(n)$  זמן זיהוי  $O(n)$

מספר סיביות:  $O(\log n)$  זמן זיהוי  $O(n)$  זמן זיהוי  $O(n)$  זמן זיהוי  $O(n)$

מספר סיביות:  $O(\log n)$  זמן זיהוי  $O(n)$  זמן זיהוי  $O(n)$  זמן זיהוי  $O(n)$

מספר סיביות:  $O(\log n)$  זמן זיהוי  $O(n)$  זמן זיהוי  $O(n)$  זמן זיהוי  $O(n)$

2

מספר סיביות:  $O(\log n)$  זמן זיהוי  $O(n)$  זמן זיהוי  $O(n)$  זמן זיהוי  $O(n)$

מספר סיביות:  $O(\log n)$  זמן זיהוי  $O(n)$  זמן זיהוי  $O(n)$  זמן זיהוי  $O(n)$



מספר סיביות:  $O(\log n)$  זמן זיהוי  $O(n)$  זמן זיהוי  $O(n)$  זמן זיהוי  $O(n)$

מספר סיביות:  $O(\log n)$  זמן זיהוי  $O(n)$  זמן זיהוי  $O(n)$  זמן זיהוי  $O(n)$

מספר סיביות:  $O(\log n)$

מספר סיביות:  $O(\log n)$  זמן זיהוי  $O(n)$  זמן זיהוי  $O(n)$  זמן זיהוי  $O(n)$

מספר סיביות:  $O(\log n)$  זמן זיהוי  $O(n)$  זמן זיהוי  $O(n)$  זמן זיהוי  $O(n)$



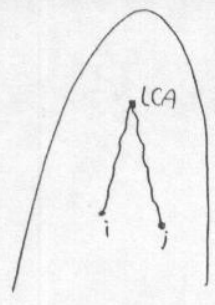
3

נתונה פונקציה  $f$  המיוערת, המהירה והזולה ביותר (ע"פ זמן) היא  $O(n \cdot \log n)$ .

נתונה פונקציה  $f$  המיוערת ל-LCA היא  $O(n)$ .

ישל:  $O(n)$  זמן

קאלק:  $O(1)$  - נשיר את המיקום ה-LCA.



203.2310.א.1

שנה"ל תשס"ד, סמס' א', מועד ב', 26.2.2004  
פרופ' מנחם גד לנדאו

זמן הבחינה: שעתיים.  
חומר עזר: דף A4 בלבד ובו תוכן ללא הגבלה.

**שאלה 1: (34 נק')**

נתונות  $n$  רשומות. בכל רשומה:

- א. שם הסטודנט
- ב. קוד אישי (מספר ממשי)
- ג. ציון במבנה נתונים (מספר שלם 0-100)
- ד. ציון במערכות הפעלה (מספר ממשי)

בנה מבנה נתונים שמאפשרים לבצע את הפעולות הבאות:

- א. הוסף סטודנט לפי קוד אישי.
  - ב. בטל סטודנט לפי קוד אישי.
  - ג. מצא מבין התלמידים הטובים במערכות הפעלה את הסטודנט בעל הציון הגבוה במבנה נתונים. (התלמידים הטובים הם אלו שנמצאים בחצי העליון של הציונים במערכות הפעלה).
  - ד. מצא מבין התלמידים הגרועים במערכות הפעלה את בעל הציון הנמוך במערכות הפעלה.
- הפעולות מתבצעות מספר רב של פעמים. הנח שהתחלת במבנה נתונים ריק.  
נתח את סיבוכיות הזמן של כל פעולה בהנחה שבעת ביצוע הפעולה נתונות  $n$  רשומות.

**שאלה 2: (33 נק')**

נתונות  $n$  רשומות של נישומים. בכל רשומה:

- א. שם
  - ב. קוד אישי - מספר שלם  $k$  שלם  $1 \leq k \leq n$  ייחודי לכל נישום.
  - ג. הכנסה - מספר שלם  $(0 - m)$  ( $m > n$ )
- הרשומות נתונות ממוינות לפי הקוד האישי.  
כתוב אלגוריתם שמחשב את המערך:  $A[1..n-p]$  כך ש:  
ההכנסה הגבוהה ביותר של נישום שהקוד האישי שלו בין  $i$  ל-  $A[i]=i+p$

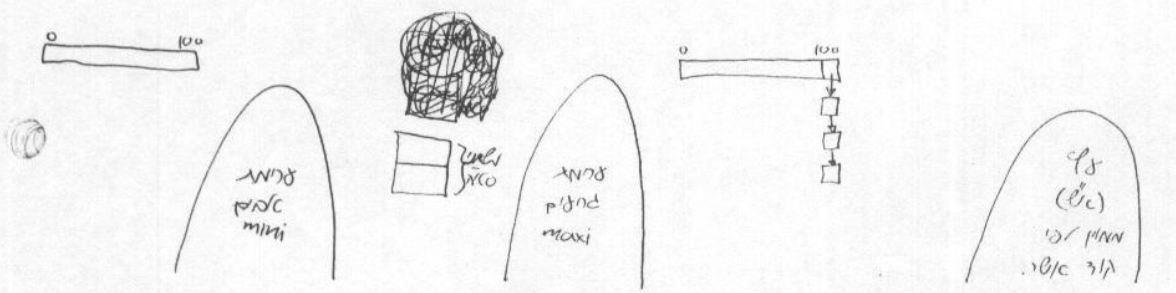
נתח את סיבוכיות הזמן של האלגוריתם שמצאת.

**שאלה 3: (33 נק')**

נתונות שתי סדרות של אותיות  $A=a_1 \dots a_n$   $B=b_1 \dots b_m$   
מצא את תת הסדרה הזוהר הרציפה הארוכה ביותר. (בניגוד ל-LCS, כאן יש למצוא את תת הסדרה הרציפה הארוכה ביותר, כלומר לדוגמא  $a_i a_{i+1} \dots a_{i+k} = b_j b_{j+1} \dots b_{j+k}$ )  
בדוגמא תת סדרה רציפה זהה באורך  $k$ .  
נתח את סיבוכיות הזמן של האלגוריתם שמצאת.







מיון (Merge Sort) - מיון חציון

מעקב 3 מחזיקי זיכרון, בעזרתם נקבע אם האלמנטים הם בסדר או לא.  $O(n \log n)$  - מיון חציון

2. עיון - אמצע, ראשון, אחרון

אם ישנו אמצע (ממוצע) בין שני האיברים האחרונים במערך.  $O(n)$

3. מערך  $0.100 \times 2$ . מערך המכיל את  $O(n)$

אם ישנו אמצע במערך המכיל את  $0.100 \times 2$  - מערך  $O(n)$ .  
אם ישנו אמצע במערך המכיל את  $0.100 \times 2$  - מערך  $O(n)$ .

$O(\log n)$

$O(\log n)$

(c)  $O(n \log n)$  - מיון חציון  
 • מערך עם האיברים הראשונים והאחרונים  $O(\log n)$   
 • נוסף מערך  $O(1)$  המכיל את האמצע  $O(n)$   
 • נוסף מערך  $O(1)$  המכיל את האמצע  $O(n)$   
 • נוסף מערך  $O(1)$  המכיל את האמצע  $O(n)$   
 • נוסף מערך  $O(1)$  המכיל את האמצע  $O(n)$

(d)  $O(n \log n)$  - מיון חציון  
 • מערך עם האיברים הראשונים והאחרונים  $O(\log n)$   
 • נוסף מערך  $O(1)$  המכיל את האמצע  $O(n)$   
 • נוסף מערך  $O(1)$  המכיל את האמצע  $O(n)$



תרגילי מעורבות

3

מספר המינימום של מסלול בין A ל-B:  $A, B$  - נתיב (אם כי) ג'א'רנה היא אלס.

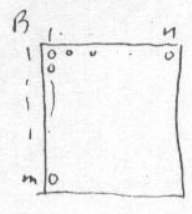
$A = 1 \dots n$   
 $B = 1 \dots m$

$$B(n, m) = \begin{cases} n \neq m & 0 \\ n = m & B(n-1, m-1) + 1 \end{cases}$$

מספר יוקלידסני:

$B(0, m) = B(n, 0) = B(0, 0) = 0$

מספר האמליון:



מספר בינומית כמספר:

מספר המינימום של מסלול מ A ל-B:  $B(n, m)$  (אם כי) ג'א'רנה היא אלס.

מספר האמליון: מספר המינימום של מסלול מ A ל-B:  $B(n, m)$  (אם כי) ג'א'רנה היא אלס.

מספר האמליון: מספר המינימום של מסלול מ A ל-B:  $B(n, m)$  (אם כי) ג'א'רנה היא אלס.

מספר האמליון: מספר המינימום של מסלול מ A ל-B:  $B(n, m)$  (אם כי) ג'א'רנה היא אלס.

מספר האמליון:



203.2310.א.1

שנה"ל תשס"ד, סמס' א', מועד ג', 22.4.2004  
פרופ' מנחם גד לנדאו

זמן הבחינה: שעהיים.  
חומר עזר: דף A4 בלבד ובו תוכן ללא הגבלה.

**שאלה 1: (34 נק')**

נתונה סדרה A של n ביטים.  
תכנן אלגוריתם שמקבל שאילתא ובה סדרה של  $\log n$  ביטים וקבע האם סדרה רציפה זהה נמצאת ב-A.  
נתח את סיבוכיות הזמן של הכנת מבנה הנתונים ואת סיבוכיות הזמן של כל שאילתא (שתינתן פעמים רבות).

**שאלה 2: (33 נק')**

נתונות שתי מחרוזות

$$A = a_1 \dots a_n$$

$$B = b_1 \dots b_n$$

של מספרים ממשיים.  
מצא את כל המספרים שמופיעים בדיוק K פעמים בכל אחת מהמחרוזות.  
נתח את סיבוכיות הזמן של האלגוריתם שהצעת.

**שאלה 3: (33 נק')**

נתונה ערמת מינימום בינומית ובה n איברים. בספר הלימוד מוצגות הפעולות הקלאסיות המבוצעות על ערמה בינומית. בהינתן מצביע לאיבר K כלשהו בערמה, ברצוננו להוסיף את הפעולות הבאות:

- הכפל את מפתח האיבר בשניים.
- בטל את תת העץ שאיבר זה הוא שורשו.
- בטל מהערמה הבינומית את כל המפתחות הקטנים מהמפתח באיבר K.



בהצלחה !!

ע"ע 302A

1

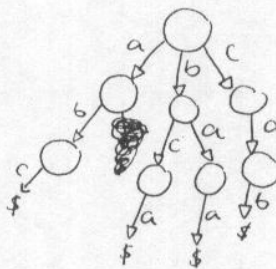
נישק על מילים TRIE עם  $O(n)$  מילים הולך וקטן

~~abcabaa~~

$n = abcabaa$

$log n = 3$

ע"ע 302A



~~מילים~~

מילה: אוסטרלה ל' של ספר, כאשר ב' מילה האורך מוגבלת

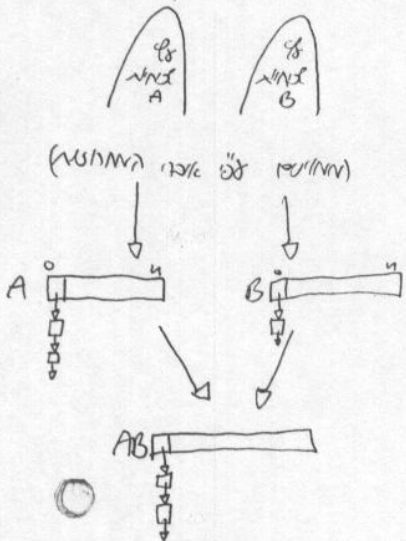
מילה הקטנה:  $O(n)$

מילה: עם כל המילים  $O(n)$

המילה: ארבעה מילים - צומח ו' צמחי ב' סאיה החמישה מילים.  
בשורה נראו מילים של הטיעון עם קומבינציות - 5 מילים.  
המילה: עם המילים גם עם אס"ס - אלו י' ארבעה מילים של ה' TRIE.

2

התהליך של חיבור שתי קבוצות A ו-B יוצר קבוצה חדשה C.  $C = A \cup B$ .  
אם A ו-B אינן חופפות, אז  $C = A \cup B$ .  
אם A ו-B חופפות, אז  $C = A \cup B$ .



אם A ו-B אינן חופפות, אז  $C = A \cup B$ .  
אם A ו-B חופפות, אז  $C = A \cup B$ .  
אם A ו-B חופפות, אז  $C = A \cup B$ .

אם A ו-B חופפות, אז  $C = A \cup B$ .  
אם A ו-B חופפות, אז  $C = A \cup B$ .  
אם A ו-B חופפות, אז  $C = A \cup B$ .

$O(n \log n)$  {  $O(n \log n)$  (א)  $O(n)$  (ב)  $O(n)$  (ג)

הכנסה:  $O(n \log n)$

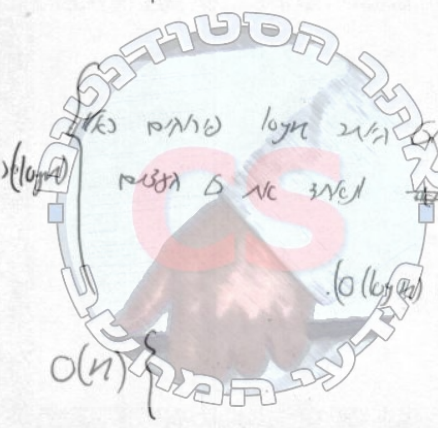
הוצאה:  $O(n)$

התהליך של חיבור שתי קבוצות A ו-B יוצר קבוצה חדשה C.

$O(n \log n)$  - הוצאה מהתהליך.

3

התהליך של חיבור שתי קבוצות A ו-B יוצר קבוצה חדשה C.  $C = A \cup B$ .  
אם A ו-B אינן חופפות, אז  $C = A \cup B$ .  
אם A ו-B חופפות, אז  $C = A \cup B$ .



אם A ו-B חופפות, אז  $C = A \cup B$ .  
אם A ו-B חופפות, אז  $C = A \cup B$ .  
אם A ו-B חופפות, אז  $C = A \cup B$ .

## מבני נתונים

203.2310.ב.1

שנה"ל תשס"ג, סמס' ב', מועד א', 15.6.2003  
פרופ' מנחם גד לנדאו

זמן הבחינה: שעתיים.

חומר עזר: דף A4 בלבד ובו תוכן ללא הגבלה.

**שאלה 1: (33 נק')**

מאגר נתונים מכיל רשומות של סטודנטים. כל רשומה מכילה את השדות הבאים:

(א) שם.

(ב) תעודת זהות.

(ג) ציון באסמבלר (מספר ממשי בין 0 ל-100).

(ד) ציון בחוג למדעי המחשב (מספר ממשי בין 0 ל-100).

בנה מבנה נתונים המאפשר:

(א) הוספת סטודנט לפי תעודת זהות.

(ב) הוצאת סטודנט לפי תעודת זהות.

(ג) תשובה לשאילתא הבאה: בהינתן מספר שלם  $K$  מצא את הסטודנט בעל הציון הגבוה

ביותר במדעי המחשב מבין כל הסטודנטים שהציון שלהם באסמבלר הוא גדול שווה מ- $K$

וקטן מ- $K+1$ .

הנח שהנך מתחיל ממבנה נתונים ריק. נתח את סיבוכיות הזמן של הטיפול בכל אחת מהפעולות

המוזכרות לעיל, בהנחה שבזמן הפעולה  $n$  רשומות במאגר.

**שאלה 2: (34 נק')**

נתונים שני עצים ( $A$  ו- $B$ ) אדומים- שחורים. הראה דרכים למזג אותם לעץ אדום- שחור אחד

במקרים הבאים:

(א) לא ידוע דבר על מפתחות העצים.

(ב) ידוע שקבוצת המפתחות החדשה מורכבת משלוש קבוצות: המפתחות הגבוהים הם מהעץ

$A$ , המפתחות הנמוכים הם מהעץ  $A$  ובאמצע המפתחות מהעץ  $B$ . לדוגמא: כל המפתחות

מהעץ  $B$  הם בין 100 ל-200 והמפתחות בעץ  $A$  הם או גדולים מ-200 או קטנים מ-100.

נתח את סיבוכיות הזמן של האלגוריתמים שתכנתת בכל אחד משני המקרים.

**שאלה 3: (33 נק')**

נתונה רשת של כבישים חד- כיווניים המחברת ערים בארה"ב. בנה מבנה נתונים המאפשר

ב- $O(1)$  זמן לענות על השאלה הבאה:

בהינתן שתי ערים  $A$  ו- $B$  ענה בחיוב על אחת מהאפשרויות הבאות:

(א) ניתן להגיע מהעיר  $A$  לעיר  $B$  וגם מהעיר  $B$  לעיר  $A$ .

(ב) לא ניתן להגיע מהעיר  $B$  לעיר  $A$ , אבל יתכן וניתן להגיע מהעיר  $A$  לעיר  $B$ .

(ג) לא ניתן להגיע מהעיר  $A$  לעיר  $B$ , אבל יתכן וניתן להגיע מהעיר  $B$  לעיר  $A$ .

נתח את סיבוכיות הזמן של הכנת מבנה הנתונים.



בהצלחה!

מועד א'

1. בונים עץ אדום שחור לפי ת.ו. ובנוסף מערך של 101 ערמות כך שבכל ערמה באינדקס  $k$  יש את כל הסטודנטים שקיבלו בין  $k$  ל- $k+1$  באסמבלר מסודרים בערמה לפי ציונם במדעי המחשב כך שיש מצביע מהרשומה בעץ אל הרשומה המתאימה במערך הערמות.  
סיבוכיות השאילתות:  
 א.  $O(\log n)$ -הוספה לעץ ופניה למערך  
 ב.  $O(\log n)$ -מחיקה מהעץ ופניה למערך  
 ג.  $O(1)$ -פניה לראש הערמה המתאימה לפי המערך.

2. א. הכנסת כל איברי הקטן לעץ הגדול ע"י הוספה של איבר אחר איבר:  $O(\log n)$ .  
 ב. פתרון עפ"י יוסי קרייזלר:

נחזיק בעץ  $B$  מצביעים לצומת המקסימלי ולצומת המינימלי.  
 האלגוריתם עצמו: נפצל את  $A$  ל-2 עצים ב- $O(\log n)$  כך שבעץ  $A1$  יהיו כל המפתחות הקטנים מ- $\min(B)$  ובעץ  $A2$  המפתחות הגדולים מ- $\max(B)$ . סה"כ  $O(\log n)$ .  
 הפיצול יילך ככה:  
 נחזיק שתי רשימות:

כל עוד פונים שמאלה שמים את הצומת ממנה יצאנו ברשימה 1 עם מצביע לבנה הימני.  
 כל עוד פונים ימינה שמים את הצומת ממנה יצאנו ברשימה 2 עם מצביע לבנה השמאלי.  
 כך ממשיכים עד שמגיעים לצומת גדולה מ- $\min(B)$ .  
 לוקחים את תת העץ המוצבע ע"י האיבר האחרון ברשימה 2 ומאחדים אותו מימין עם האיבר האחרון ומוחקים את האיבר מהרשימה (האיבר האחרון ברשימה).  
 לוקחים את תת העץ שיצרנו ומאחדים אותו מימין עם תת-העץ המוצבע ע"י האיבר האחרון העכשווי בעזרת האיבר האחרון ברשימה ומוחקים את האיבר האחרון ברשימה.  
 כך הלאה עד שנגמרים האיברים ברשימה 2 ומתקבל עץ אדום שחור מאוחן  $(A1)$  באופן דומה נבנה את  $A2$  מרשימה 1 כך שכאן האיחודים יתבצעו משמאל.

$$O(\log n) \leq$$

קיבלנו 2 תתי עצים של  $A: A1, A2$

נאחד את  $A1$  משמאל עם  $B$  ואת  $A2$  מימין עם  $B$  בפעמיים  $O(\log n)$   
 האיחוד יבוצע באופן כזה שמוצאים בעץ הנמוך הגבוה יותר נקודה בה  $B_h = \min(B)$  שמאלי מוסיפים צומת אדומה ריקה ומחברים אותה לאב של הצומת בעלת ה- $B_h$  הנתון.  
 מימין נחבר לה את תת העץ עם הערכים הגבוליים ביותר ומשמאל את העץ עם הערכים הקטנים יותר ונאזן ב- $O(\log n)$ .

נמצא קודם Predecessor לבן הימני של הצומת האדומה ונשים אותו בצומת האדומה וזו למעשה מחיקה ותיקון העץ במקרה הגרוע  $O(\log n)$   
 $\leq$  סה"כ  $O(\log n)$ .

3. גריץ SCC כדי למצוא רכיבים קשירים היטב. לכל רכיב קשירות נקרא בשם ונסמן את כל צמתיו בשם זה. אח"כ גריץ מיון טופולוגי על גרף רכיבי הקשירות (החסר מעגלים) ונשמור אותו כמערך. סה"כ  $O(V+E)$ .  
 עבור שאילתא נבדוק ב- $O(1)$  את שני הצמתים ונראה אם יש להם את אותו שם של רכיב קשירות. אם כן אז נענה על 'א' בחיוב. אחרת נבדוק את מיקום  $A$  ו- $B$  במיון הטופולוגי. אם  $B$  מקדים את  $A$  אז אולי אפשר להגיע ממנו ל- $A$  אבל בשום לא ניתן להגיע מ- $B$  ל- $A$ , אם  $A$  מקדים את  $B$ - ההיפך.



## מבני נתונים

203.2310.ב.1

שנה"ל תשס"ג, סמס' ב', מועד ב', 6.7.2003  
פרופ' מנחם גד לנדאו

זמן הבחינה: שעהיים.

חומר עזר: דף A4 בלבד ובו תוכן ללא הגבלה.

**שאלה 1: (33 נק')**

מאגר נתונים מכיל רשומות של סטודנטים. כל רשומה מכילה את השדות הבאים:

(א) שם.

(ב) תעודת זהות.

(ג) ציון בחוג למדעי המחשב (מספר ממשי בין 0 ל-100).

בנה מבנה נתונים המאפשר:

(א) הוספת סטודנט.

(ב) בהינתן אות  $X$  מצא את הסטודנט שציונו בחוג למדעי המחשב הוא החציון של ציוני כל

הסטודנטים בחוג ששם משפחתם מתחיל באות  $X$ .

הנח שהנך מתחיל ממבנה נתונים ריק, מספר הפעולות הוא רב מאוד והשמות של הסטודנטים הם בעברית. נתח את סיבוכיות הזמן של הטיפול בכל אחת מהפעולות המוזכרות לעיל, בהנחה שבזמן הפעולה  $n$  רשומות במאגר.

**שאלה 2: (34 נק')**

נתון עץ אדום-שחור ובו  $n$  רשומות של סטודנטים. מבנה הרשומה זהה לזו שבשאלה מס' 1. תעודת הזהות משמשת כמפתח הרשומה. הראה דרך לענות על השאילתא הבאה (שתינתן פעמים רבות):

בהינתן שני צמתים בעץ: באחד סטודנט בעל תעודת זהות  $A$  ובשני סטודנט בעל תעודת זהות  $B$  ( $A \leq B$ ). מצא ב-  $O(1)$  זמן את הסטודנט בעל הציון הגבוה ביותר במדעי המחשב, שתעודת הזהות שלו גדולה מ-  $A$  וקטנה מ-  $B$ .

הנח שהעץ האדום-שחור שקיבלת אינו משתנה. נתח את סיבוכיות הזמן של הטיפול הראשוני בעץ.

**שאלה 3: (33 נק')**

(א) נתון גרף מכוון  $G(V,E)$ . נתון שבין כל הקשתות קיימת קשת מהצומת  $X$  לצומת  $U$  וקשת נוספת מהצומת  $W$  לצומת  $X$ . האם יתכן (קיים גרף מכוון  $G(V,E)$  כלשהו בעל הקשתות הנ"ל) לבנות יער DFS שבו  $X$  הוא עץ בעל צומת אחת בלבד. הוכח את תשובתך.

(ב) נתון גרף לא מכוון וקשיר  $G(V,E)$ . לאחר שמצאת את העץ הפורש המינימלי של הגרף התקבל תיקון במשקל אחת הקשתות בגרף. הראה דרך לתיקון העץ הפורש המינימלי שבנית. חשב את סיבוכיות הזמן של האלגוריתם שתיארת.

בהצלחה!





## מבני נתונים

203.2310.ב.1

שנה"ל תשס"ג, סמס' ב', מועד ג', 4.9.2003  
פרופ' מנחם גד לנדאו

זמן הבחינה: שתיים.

חומר עזר: דף A4 בלבד ובו תוכן ללא הגבלה.

**שאלה 1: (34 נקודות)**

במאי הצגה מבקש לארגן זוגות (של בניס ובנות) למופע ריקוד.  $n$  הבנים מסודרים בשורה ו- $n$   $(b_1, \dots, b_n)$  הבנות מסודרות בשורה נפרדת. גובהו של כל בן וגובהה של כל בת ידועים. זוג חוקי הוא זוג ששני בני הזוג הם בדיוק בעלי אותו גובה. מטרת הבמאי למצוא את מספר הזוגות המקסימאלי (יתכן וחלק מהמשתתפים לא יופיעו בריקוד).

א. הראה אלגוריתם למקרה הכללי.

ב. הראה אלגוריתם בו אין לשנות את סדר הרקדנים בשורות, כלומר אם קים זוג  $a_i$

$b_j$  אזי לא קיימים הזוגות  $(a_k, b_p)$  או  $(a_i, b_j)$   $(k < i, p > j)$ .

נתח את סיבוכיות הזמן של הפתרונות שנתת לכל אחד מהסעיפים.

**שאלה 2: (33 נק')**

נתונה ערמת מינימום בינומית ובה  $n$  איברים. בספר הלימוד מוצגות הפעולות הקלאסיות המבוצעות על ערמה בינומית. בהינתן מצביע לאיבר  $k$  כלשהו בערמה, ברצוננו להוסיף את הפעולות הבאות:

א. בטל את האיבר.

ב. הכפל את מפתח האיבר בשניים.

ג. חלק את ערכו של האיבר בשניים.

ד. הוסיף לערמה איבר נוסף בעל אותו ערך.

ה. בטל את תת העץ שאיבר זה הוא שורשו.

לאחר כל פעולה יש להחזיר למבני הנתונים את תכונות הערמה הבינומית.

נתח את סיבוכיות הזמן של כל פעולה בנפרד.

**שאלה 3: (33 נק')**

נתונה סדרת מספרים שלמים  $A = a_1, \dots, a_n$  ופונקציה  $f(i) = (k_i, p_i)$   $(1 \leq i, k_i, p_i \leq n)$

וגם  $(k_i \leq p_i)$ . ברצוננו לחשב סדרה חדשה  $B = b_1, \dots, b_n$  כאשר  $b_i = \min(a_{k_i}, \dots, a_{p_i})$ .

נתח את סיבוכיות הזמן של האלגוריתם שתכנתת.



203.2310.א.1

שנה"ל תשס"ג, סמס' א', מועד א', 30.1.2003  
פרופ' מנחם גד לנדאו

זמן הבחינה: שעהיים.  
חומר עזר: דף A4 בלבד ובו תוכן ללא הגבלה.

**שאלה 1: (34 נק')**

נתונות k סדרות של שלמים, בכל סדרה n מספרים. המספרים לא ממוינים.  
בנה מבנה נתונים שמאפשר את הפעולות הבאות:

- א. מצא את המספר המקסימלי בסדרה מסוימת.
- ב. בהנתן שתי סדרות a ו-b ואינדקס i  
בנה 2 סדרות חדשות, במקום a ו-b: הראשונה מכילה את i האיברים הראשונים, בסדר ולא בערך, של a ו-i - n האיברים האחרונים של b. הסדרה השנייה תכיל את שאר האיברים של a ו-b.

הפעולות תתבצעה מספר רב של פעמים.

- חשב את סיבוכיות הזמן של:
1. הכנת מבני הנתונים.
  2. כל אחת מהפעולות.

**שאלה 2: (33 נק')**

נתונה ערימה ובה n (מספר זוגי של איברים). עליך לבנות ממנה שתי ערימות בנות

$$\frac{n}{2}$$

איברים כל אחת.

כתוב אלגוריתם אחד לערימה בינומית ואלגוריתם אחר לערימה בינארית.  
נתח את סיבוכיות הזמן של שני האלגוריתמים.

**שאלה 3: (33 נק')**

נתון גרף  $G(V, E)$  מכוון ללא מעגלים.

תאר אלגוריתם שמוצא את המסלול הארוך ביותר בגרף.  
נתח את סיבוכיות הזמן של האלגוריתם שכתבת.



בהצלחה !!

- (1) נתונות  $k$  מחרוזות באורך  $n$  כל אחת. תכנן מבנה נתונים שיתמוך ביעילות בשאילתות הבאות:
- (א) מציאת האיבר המקסימלי במחרוזת
  - (ב) בהינתן אינדקס  $i$ , ושתי מחרוזות  $a$  ו- $b$ , יוצרת שתי מחרוזות חדשות כך שאחת בנויה מ- $i$  האיברים הראשונים של  $a$  ו- $(n-i)$  האיברים האחרונים של  $b$ , והשנייה בנויה מ- $i$  האיברים הראשונים של  $b$  ו- $(n-i)$  האיברים האחרונים של  $a$ . מחרוזות אלו מחליפות את  $a$  ו- $b$  במבנה הנתונים.
- (2) נתונה ערימת מקסימום עם מספר זוגי של איברים. בנה אלגוריתם המפצל אותה לשתי ערימות מקסימום שוות בגודלן, עבור:
- (א) ערימה בינומית
  - (ב) ערימה בינארית
- \*שאלה 3 היתה מנוסחת בצורה מעט יותר מתחכמת, אך לב השאלה מובא כאן. השכילו לקרוא תחת מעטה ה"סיפור" של השאלה ולזהות מה גדי רוצה...
- (3) נתון גרף מכוון ללא מעגלים וללא משקלות על הקשתות.
- (א) סדר את הצמתים לפי סדר חוקי כך שכל הקשתות בכיוון אחד.
  - (ב) מצא את המסלול הארוך ביותר בגרף.

פתרון

- (1) מבנה הנתונים לפתרון (המתחכם למדי חבר'ה... שני סטודנטים בלבד פתרו, אך ניקוד חלקי ניתן לתשובות שהיו לעניין...) מכיל  $k$  עצים, עץ בינארי לכל מחרוזת. העץ הוא וריאציה של ערימה, כך שמתקיימים התנאים הבאים: א. העלים של העץ הם איברי המחרוזת, לפי סדר משמאל לימין של האינדקסים שלהם. כלומר לכל עץ יש  $2n$  צמתים, לכן גובהו  $O(\log n)$ . ב. כל צומת בעץ מכילה עומק של המקסימום מבין שני בניה. לפיכך המקסימום מאיברי המחרוזת מטפס ועולה אל השורש, כמו בערימה. ביצוע השאילתא הראשונה, אם כן, מובן מאליו, מתבצע ב- $O(1)$ . ביצוע השאילתא השנייה מתבסס על מציאת אב קדמון משותף של האיבר  $i$ -ה במחרוזת (העלה ה- $i$ 'י במספר) לבין האיבר האחרון (ה- $n$ 'י במספר), וחיבור שני העצים לאורך המסלול הזה. מכיוון שכל העצים באותו גודל (ולכן, אותו מבנה פיס' בדיוק), תיקון שני העצים מצריך מעבר לאורך המסלול הזה ותיקון הפוינטרים בכל צומת שבדרך (מוטיב חוזר משאלה 7.3. בעמ' 39 בחוברת). הסיבוכיות כגובה העץ, כלומר  $O(\log n)$ . לפתרון מלא, פנו אלי אישית.
- (2) (א) ערימה בינומית: תזכורת: כל עץ בינומי,  $B_k$ , עבור  $k > 0$ , מורכב משני תתי-עצים בינומיים  $(B_{k-1})$ : הבן של השורש בעל הדרגה הגבוהה ביותר, והשורש ללא הבן הנ"ל. יש לעבור על רשימת השורשים  $(\log n)$ , ועבור כל עץ, לפצל אותו לשניים בצורה זו. כך נקבל שתי רשימות שורשים נפרדות. הפתרון עובד מכיוון שמס' האיברים זוגי, לכן לא קיים בערימה המקורית עץ  $B_0$ . סיבוכיות כוללת:  $O(\log n)$ .
- (ב) ערימה בינארית: אין מנוס, חייבים לבנות את שתי הערימות מאפס, תוך שימוש בפונקציה בניית ערימה (הכנה למבחן: שכנעו את עצמכם שזה נכון). סיבוכיות כוללת:  $O(n)$ .

- (3) (א) הרץ מיון טופולוגי על הגרף. סיבוכיות:  $O(V+E)$ .
- (ב) כפלט של המיון הטופולוגי קיבלנו מערך של כל הצמתים בו כל הקשתות בכיוון אחד. נשמור מערך עזר שיהזיק את המסלול הארוך ביותר היוצא מכל צומת. נמלא את המערך הזה בתכנון דינאמי מהסוף (הצומת שלא יוצאת ממנה קשתות) להתחלה. עבור כל צומת, נעבור על רשימת השבבים שלה ובבחר את השכן, שהמסלול היוצא ממנו הוא מקסימלי. נרשום בצומת שלנו את ערך זה ועוד אחד. אורכו של המסלול הארוך ביותר הוא המספר המקסימלי הרשום במערך (לאו דווקא האיבר הראשון במערך – תחשבו על זה...). כדי לשחזר את המסלול הארוך ביותר, ולא רק למצוא את אורכו, נשמור במערך נוסף לכל צומת את השכן שנבחר עבורה.



203.2310.א.1

שנה"ל תשס"ג, סמס' א', מועד ב', 7.3.2003  
פרופ' מנחם גד לנדאו

זמן הבחינה: שעתיים.  
חומר עזר: דף A4 בלבד ובו תוכן ללא הגבלה.

**שאלה 1: (33 נק')**

נתונות  $n$  רשומות. מפתחות הרשומות הם שלמים בתחום מ-1 עד  $k$ . מותר לך להשתמש במקום אחסון שגודלו  $O(1)$  נוסף על מערך הקלט. הראה אלגוריתמים למיין את הרשומות עבור  $k$  שונים. בכל המקרים מספר הרשומות הוא  $n$  ורק תחום המפתחות משתנה. (הערה: עליך למצוא את המקרים המעניינים. ניתן לייצג את  $k$  כפונקציה של  $n$ ).

נתח את סיבוכיות הזמן של כל אלגוריתם שנתת.

**שאלה 2: (33 נק')**

נתונות  $n$  רשומות.  
בכל רשומה השדות:

- א. ציון במבנה נתונים – 0-100 שלם.
  - ב. ציון בחוג למדעי המחשב –  $0-\log n$  שלם.
  - ג. שם באנגלית, עד 5 אותיות.
- המפתח של כל רשומה הוא

שם	ציון בחוג	ציון במבנה נתונים
----	-----------	-------------------

למשל: 80,5, dafi

בנה מבנה נתונים ואלגוריתם שמבצע את הפעולות:  
מצא רשומה, הוסף רשומה, בטל רשומה.  
נתח את סיבוכיות הזמן של בניית מבנה הנתונים ושל כל אחת מהפעולות.  
(הנח שהפעולות מתבצעות מספר רב של פעמים).

**שאלה 3: (34 נק')**

נתון גרף  $G(V, E)$  לא מכוון. משקלות על הקשתות.

- א. תכנן אלגוריתם שבודק האם הגרף קשיר.
- ב. בהנחה שהגרף קשיר תכנן אלגוריתם שיבטל את כל הקשתות היקרות ועדיין ישמור על קשירות הגרף.
- ג. עבור הגרף שקבלת בסעיף ב' תכנן אלגוריתם שמוצא עבור כל צומת  $a$  בגרף את הצומת  $b$  כך שהמסלול מ- $a$  ל- $b$  הוא בעל המשקל הנמוך ביותר.

נתח את סיבוכיות הזמן של האלגוריתמים שכתבת.

בהצלחה!!



- (1) נתונות  $n$  רשומות ו- $O(1)$  זיכרון נוסף. מייך כאשר יש  $k$  מפתחות שונים. התייחס לגדלי  $k$  שונים. *(המשפט הנכונה,  $k, 1..k$ )*
- (2) תכנן מבנה נתונים אשר תומך בשאילתות של חיפוש, הוספה ומחיקה עבור מפתח הבנוי מהשדות הבאים: שם פרטי (עד 5 תווים), ציון ממוצע (עד  $O(\log n)$  מפתחות), וציון בקורס מבני נתונים (מ-0 עד 100). הרשומה מתקבלת במלואה בשלושת השאלות.
- (3) נתון גרף לא מכוון עם משקלות על הקשתות.
- בדוק את קשירות הגרף.
  - השאר גרף קשיר עם ערכים מינימליים של סך הקשתות.
  - עבור כל צומת יש למצוא מהו המסלול הכבד ביותר מצומת זו.

פתרון

- (1) נחזיק שני אינדיקסים,  $i$  ו- $j$ , שניהם מאותחלים לאפס. נסרוק את המערך  $k$  פעמים. בכל איטרציה  $i$ , נחפש איבר שערכו  $i$ , ואם נמצא כזה, נחליף בינו לבין האיבר שנמצא במקום ה- $j$  במערך ונקדם את  $j$ . במידה ויש יותר מאיבר אחד במערך שערכו  $i$ , נמקם את השני במקום  $j+1$  (ונקדם את האינדקס שוב). הסריקה באיטרציה הבאה מתחילה ממקום  $j+1$ . האינדקס  $i$  גדל באחד בכל איטרציה.  $j$  מחזיק את המיקום הבא במערך שבו יש לאכסן איבר, ומקודם רק כאשר מצאנו איבר שערכו  $i$ . סיבוכיות מקום:  $O(1)$ . סיבוכיות זמן:  $O(k \cdot n)$ , לכן נבחר בפיתרון זה כאשר  $k = O(\log n)$ . כאשר  $k > O(\log n)$ , נשתמש במיון השוואה רגיל שאינו דורש מקום. Mergesort, quicksort פועלים בריקורסיה ולכן שומרים משתנים במחסנית ואינם מתאימים. מיון ערימה לעומת זאת אינו משתמש במקום נוסף (לאחר כל הוצאת מינימום, שם את הערך המינימלי במקום שהתפנה מהערימה) וניתן להשתמש בו.
- (2) מבנה הנתונים הרצוי: מערך מ-0 עד 100 של ציונים במבני נתונים, כל איבר במערך הוא פונקטור לעץ חיפוש מאוזן (עץ אדום-שחור) של הציונים הממוצעים (גובהו  $\log \log n$ ), וכל איבר בעץ מצביע לעץ TRIE של השמות. בניה:  $O(100)$  למערך,  $O((\log n) \cdot \log(\log n))$  לעצים לכל היותר, בניית עצי ה-TRIE – סכום של אורך כל המילים. השאילתות מתבצעות ב- $O(1)$  פעולות למערך, ב- $O(\log(\log n))$  לעץ אדום-שחור, וב- $O(5)$  לעץ TRIE. סה"כ  $O(\log(\log n))$ .
- (3)
- DFS
  - MST
- הרעיון הכללי: מסלול ארוך ביותר מצומת מסוימת הוא תמיד מהצומת לעלה – או דרך השורש או שלא. בבצע סריקת העץ postorder ונשמור לכל צומת את המשקל המקסימלי מן העלים בתת-העץ שלה ועד אליה. כעת סריקה preorder ונשמור לכל צומת את משקל מסלולה מהשורש. כעת בבצע השוואה אם המרחק מן העלה קטן מן המרחק הכולל, (מרחקי מהשורש+מרחק השורש לעלה דרך המסלול הכבד ביותר), אז מקיבלים את המרחק הכולל והעלה הכבד ביותר.



*עלה ראוי, אלהי, מן אשכול 66 עצים מתוך סתיו והאדם והעבר החדר.*

203.2310.א.1

שנה"ל תשס"ג, סמס' א', מועד מיוחד, 28.3.2003  
פרופ' מנחם גד לנדאו

זמן הבחינה: שעהיים.  
חומר עזר: דף A4 בלבד ובו תוכן ללא הגבלה.

**שאלה 1: (33 נק')**

נתון עץ אדום שחור ובו  $n$  רשומות. תכנן אלגוריתם שמקבל כקלט מפתח  $k$ , פעולה חשבונית \* ו- $c$  קבוע, ומשנה את כל המפתחות הגדולים מ- $k$ . השינוי במפתחות יהיה: מפתח ישן  $c * c =$  מפתח חדש. (לדוגמא אם הפעולה היא חילוק אז כל המפתחות הגדולים מ- $k$  יחולקו ב- $c$ ). לאחר מכן יש לעדכן את עץ האדום השחור לפי המפתחות החדשים.

נתח את סיבוכיות הזמן של האלגוריתם שתכנתת.

**שאלה 2: (34 נק')**

נתונה רשימה מקושרת חד כיוונית המתחילה ברשומה  $a$  ונגמרת ברשומה  $b$ . המצביעים הם בכיוון מ- $a$  ל- $b$ . הראה אלגוריתם שמבקר ברשומות מ- $b$  ל- $a$  אחת אחת (בסדר הפוך לכיוון הרשימה). יש לשמור על הסדר בביקור. יש להשתמש רק ב-3 מצביעים כאשר אחד מהם מצביע לתחילת הרשימה (אין להשתמש במשתנים נוספים). ניתן לסמן ברשומה באם ביקרת בה. אין לשנות את המצביעים ברשימה. ניתן לעבור ברשומה ולא לבקר בה.

נתח את סיבוכיות הזמן של האלגוריתם שתכנתת.

**שאלה 3: (33 נק')**

הצבא האמריקאי החליט לבנות יחידות מיוחדות לצורך המלחמה בעירק. בצבא  $n$  חיילים. לכל חייל מספר אישי. בנה מבנה נתונים שמאפשר:  
א. לבדוק האם שני חיילים נמצאים באותה יחידה (בהנתן שני מספרים אישיים).  
ב. לאחד יחידות קיימות ליחידות חדשות. כל יחידה מיוצגת על ידי אחד החיילים בה.

הקלט הראשוני הוא החיילים והמספרים האישיים שלהם. הנח שבתחילה כל חייל מהוה יחידה בסיסית. הנח שהפעולות מתבצעות מספר רב של פעמים.

נתח את סיבוכיות הזמן של כל אחת מהפעולות.

בהצלחה!!



203.2310.ב.1

שנה"ל תשס"ב, סמס' ב', מועד א', 23.6.2002  
פרופ' מנחם גד לנדאו

זמן הבחינה: שעתיים.  
חומר עזר: דף A4 בלבד ובו תוכן ללא הגבלה.

**שאלה 1: (34 נק')**

נתונות  $n$  רשומות של עובדים בתעשייה. כל רשומה מכילה:

- שם
  - מס' עובד (שנע בין 0 ל- $n$ )
  - שכר
- בנה מבנה נתונים שמאפשר את הפעולות הבאות:
- א. עדכון שכרו של עובד.
  - ב. בהנתן 2 מספרי עובד ( $a, b$ ) מצא את ממוצע השכר של העובדים שמספר העובד שלהם גדול מ- $a$  וקטן מ- $b$ .
  - ג. מצא את בעל המשכורת הגבוהה ביותר.

הנח שהפעולות מתבצעות פעמים רבות.  
נתח את סיבוכיות הזמן של הקמת מבנה הנתונים ואת סיבוכיות הזמן של כל אחת מ-2 הפעולות.

**שאלה 2: (33 נק')**

נתונה פונקציה  $f(i)$   $1 \leq i \leq n$   
הראה דרך לחשב את הפונקציה:  
$$P[i, j] = \max(P[i, k] + P[k + 1, j])$$
  
 $1 \leq i, j \leq n \quad i \leq k < j$

כאשר:  $P(i, i) = f(i)$

**שאלה 3: (33 נק')**

נתונות  $n$  ערים ורשת כבישי אגרה חד-כיווניים שמחברת ביניהם. כל כביש מחבר 2 ערים.  
בנה מבנה נתונים שמאפשר את השאלות הבאות:

- א. בהנתן שמות 2 ערים א' ו-ב' בדוק האם ניתן להגיע מעיר א' לעיר ב' ומעיר ב' לעיר א'.
- ב. בהנתן שם של עיר A את מספר הערים שלא ניתן להגיע מהעיר A אליהן.  
חשב את סיבוכיות הזמן של הקמת מבנה הנתונים.  
חשב את סיבוכיות הזמן של התשובה לכל שאילתא (זכור: שאילתות יכולות להנתן מספר רב של פעמים).



בהצלחה !!

203.2310.ב.1

שנה"ל תשס"ב, סמס' ב', מועד ב', 14.7.2002

פרופ' מנחם גד לנדאו

זמן הבחינה: שעהיים.  
חומר עזר: דף A4 בלבד ובו תוכן ללא הגבלה.

**שאלה 1: (34 נק')**

נתונים 2 מערכים בגודל  $x$  כל אחד.  
באחד  $m$  רשומות ממוינות של סטודנטים מאיזור חיפה (המפתח תעודות זהות).  
בשני  $n$  רשומות ממוינות של סטודנטים מצטיינים מכל הארץ (המפתח תעודות זהות).  
א. הראה דרך למצוא את כל הסטודנטים המצטיינים מאיזור חיפה. התיחס ליחסים שונים בין  $m$  ל- $n$ .  
ב. כיצד תבנה את האלגוריתם בסעיף א' באם ידוע שהמערכים גדולים מגודל זכרון המחשב בו אתה משתמש.  
ג. במקרה ו- $m$  אינו ידוע. הראה דרך שמוצאת האם סטודנט מסוים גר באיזור חיפה ב- $O(\log m)$  זמן.

נתח את סיבוכיות הזמן של האלגוריתמים שכתבת.

**שאלה 2: (33 נק')**

נתונה ערימה בינארית ובה  $n$  רשומות.  
א. הראה דרך לבנות עץ אדום שחור ל- $n$  הרשומות.  
חשב את סיבוכיות הזמן של האלגוריתם שתכנתת.  
באם הזמן שהגעת אליו גדול מ- $O(n)$  הסבר למה.  
ב. הראה דרך להוסיף לעץ האדום שחור את היכולת למצוא את העוקב בצורה מהירה.  
חשב את סיבוכיות הזמן של מציאת העוקב ואת תוספת הזמן לשאר הפעולות בעץ האדום שחור שנגרמות עקב השינויים שערכת.

**שאלה 3: (33 נק')**

נתונות  $n$  ערים ורשת כבישי אגרה דו-כיווניים שמחברת ביניהם. כל כביש מחבר 2 ערים. לכל כביש מחיר נסיעה (אגרה). תכונה א': ידוע שניתן להגיע מכל עיר לעיר אחרת. הראה:  
א. אלגוריתם שמצמצם את מספר הכבישים למספר המינימלי שעדיין שומר על תכונה א'. באלגוריתם זה שמור על כיסו של הנהג.  
ב. אלגוריתם שמקבל כקלט את הגרף שיצרת בסעיף א', ומוצא את שתי הערים שהנסיעה ביניהן היא היקרה ביותר במחירה בהשוואה לנסיעה בין כל שתי ערים אחרות.  
(הערה: בנסיעה בין שתי ערים ניתן להשתמש בכל כביש רק פעם אחת לכל היותר).



בהצלחה !!





203.2310.א.1

שנה"ל תשס"ב, סמס' ב', מועד ג', 10.9.2002  
פרופ' מנחם גד לנדאו

זמן הבחינה: שעתיים.  
חומר עזר: דף A4 בלבד ובו תוכן ללא הגבלה.

**שאלה 1: (34 נק')**

הוכח או הפרך את הטענה הבאה:  
"ניתן לתכנן מבנה נתונים ואלגוריתם שיחליפו את הערימה הבינארית ויבצעו את הפעולות: הוסף איבר, מצא מקסימום, הוצא את המקסימום, ב-  $O(1)$  פעולות כל אחת".

**שאלה 2: (33 נק')**

נתון עץ אדום שחור ובו  $n$  רשומות.  
בכל רשומה:

- א. שם
- ב. ת.ז.
- ג. שכר
- ד. גיל

מפתח הרשומות בעץ הוא תעודות הזהות.  
בנה אלגוריתם שעונה לשאלות הבאות:

- א. מיהו בעל השכר הגבוה ביותר.
- ב. בהנתן מספר תעודות זהות מצא את סכום הגילאים של כל בעלי תעודות זהות הקטנים מהנתון.
- הנח שהשאלות ינתנו מספר פעמים רב.
- נתח את סיבוכיות הזמן הנדרש לטיפול הראשוני במבנה הנתונים ואת סיבוכיות הזמן הנדרש לענות על כל שאלתא בנפרד.

**שאלה 3 (33 נק')**

יהי  $G=(V,E)$  גרף בלתי-מכוון קשיר. נקודת הפרדה (articulation point) של  $G$  היא קדקוד אשר סילוקו הופך את  $G$  לבלתי קשיר.  
בצע חיפוש לעומק על הגרף  $G$ . בסיום החיפוש החלט האם השורש של עץ החיפוש הוא נקודת הפרדה. הוכח את טענתך.



בהצלחה !!

203.2310.א.1  
שנה"ל תשס"ב, סמס' א', מועד א', 5.2.2002  
פרופ' מנחם גד לנדאו

זמן הבחינה: שעתיים.  
חומר עזר: דף A4 בלבד ובו תוכן ללא הגבלה.

שאלה 1: (33 נק')

כתוב אלגוריתם שמקבל כקלט עץ חיפוש בינארי מאוזן, אדום שחור, ומפתח  $k$ .  
(הנח שמספר האיברים לא עולה על  $n$ ).  
האלגוריתם יבנה 2 עצים אדומים שחורים. האחד ובו כל המפתחות הקטנים מ- $k$  בעץ הקלט. העץ השני יכיל את שאר המפתחות בעץ המקורי (המפתחות הגדולים או שווים ל- $k$ ).  
חשב את סיבוכיות הזמן של האלגוריתם שלך.

שאלה 2: (34 נק')

לחברת היטק רשת תקשורת.  
הרשת ובה  $y$  קווי תקשורת מחברת את  $x$  מחשבי החברה הפרושים בכל העולם.  
החברה נקלעה לקשיים כלכליים ובכוונתה לצמצם את ההוצאות.  
**א.** תאר אלגוריתם שמצמצם את מספר קווי התקשורת למינימום ההכרחי על-מנת לשמור על הקשר בין מחשבי החברה.  
**ב.** החברה מתכוונת לסגור את אחד מהמחשבים. מצא מחשב שסגירתו לא תנתק את המחשבים האחרים.  
חלק ב' יבוצע לאחר חלק א'.  
חשב את סיבוכיות הזמן של כל אחד מהאלגוריתמים.



שאלה 3: (33 נק')

נתונות 2 סדרות של מספרים  
 $a_1 \dots a_n$  ו-  
 $b_1 \dots b_n$

הראה דרך לחשב את המערך  $B[1 \dots n; 1 \dots n]$

שבו

$$B[i, j] = \sum_{x=1}^i \sum_{y=1}^j f(a_x, b_y)$$

הפונקציה

$f(a_x, b_y)$  ניתנת לחישוב ב  $O(1)$  זמן.  
חשב את סיבוכיות הזמן של האלגוריתם שפיתחת.



הצעות לפתרון:

1. העברת  $n$  האיברים הממוינים למערך בגודל  $n$  ע"י סריקת העץ האדום שחור  $O(n)$ .  
 מציאת המקום של הערך  $k$  ע"י הפוש בינארי ( $k$  עצמו לא הייב להיות במערך).  $O(\log(n))$ .  
 בניית עץ אדום שחור מכל אחד מן המערכים המחולקים ע"י  $k$  באופן הבא:  
 בניה שגודל אחד המערכים הוא  $k$ , נשים את  $k/2$  להיות שורש העץ האדום שחור,  
 בניו יהיו  $k/4$  ו  $3k/4$ , וכך הלאה, בניו של כל צומת הם האיברים של אמצעי המערך שהצומת מחלקת.  
 כך בונים את העץ האדום שחור ושומרים על כל תכונותיו: ממון, ובעובה  $O(\log(n))$ .  
 סיבוכיות כל אחד משני המערכים, לכל היותר  $O(n)$ .  
 סיבוכיות כוללת:  $O(n) + O(\log(n)) + O(n) = O(n)$ .  
 (קיים פתרון מסובך גם ב  $O(\log^2(n))$ ).

2. א. עושים DFS בכדי לקבל עץ מהגוף. נקבל רכיב קשירות אחד בעל  $x-1$  קווי חקשורת במקום  $y$ .  
 סיבוכיות  $O(x + y)$ .  
 ב. מנתקים את אחד העלים של העץ.  
 אם עושים זאת תוך כדי שלב א, סיבוכיות  $O(1)$ .  
 אם עושים זאת בפרד, סיבוכיות  $O(x)$ .

3. תכנון דינאמי: עבור כל איבר  $B(i,j)$  נעשה את החישוב הבא:  
 $B(i,j) = B(i,j-1) + B(i-1,j) - B(i-1,j-1) + f(a_i, b_j)$   $O(1)$ .  
 וזה נכון כי:

$$\sum_{x=1}^i \sum_{y=1}^j f(a_x, b_y) = \sum_{x=1}^i \sum_{y=1}^{j-1} f(a_x, b_y) + \sum_{x=1}^{i-1} \sum_{y=1}^j f(a_x, b_y) - \sum_{x=1}^{i-1} \sum_{y=1}^{j-1} f(a_x, b_y) + f(a_i, b_j)$$

נמלא את המערך באופן הבא: נחיל ב  $B(1,1)$  שווה ל  $f(a_1, b_1)$ .  
 נמלא את  $B$  כאשר לולאה פנימית הייצוגית רצות מ  $1$  עד  $n$ .  
 סיבוכיות כוללת  $O(n^2)$ .



203.2310.א.1

שנה"ל תשס"ב, סמס' א', מועד ב', 28.2.2002  
פרופ' מנחם גד לנדאו

זמן הבחינה: שעתיים.  
חומר עזר: דף A4 בלבד ובו תוכן ללא הגבלה.

**שאלה 1: (33 נק')**

נתונות  $n$  רשומות של סטודנטים. כל רשומה מכילה:

- א. שם.
- ב. ת.ז.
- ג. מין הסטודנט (בן/בת)
- ד. ציון במבני נתונים.

החוג למדעי המחשב התבקש לשלוח  $k$  סטודנטים לארה"ב. המשלחת תיבחר לפי 2 קריטריונים:

- א. יחס הבנים/בנות לא יהיה גדול מ-60% 40%, כלומר: לא יהיו יותר מ-60% בנים או יותר מ-60% בנות.
- ב. הצטיינות במבני נתונים.

תכנן אלגוריתם שבוחר את חברי המשלחת. נתח את סיבוכיות הזמן של האלגוריתם שבחרת.

**שאלה 2: (34 נק')**

תאר אלגוריתם המטפל במסד נתונים ובו רשומות. כל רשומה מכילה:

- א. שם.
- ב. ת.ז.
- ג. מסי טלפון.
- ד. חשבון בנק.
- ה. יתרה בחשבון הבנק.

האלגוריתם מבצע את הפעולות הבאות:

- א. מצא איבר לפי ת.ז.
- ב. מצא איבר לפי חשבון הבנק.
- ג. הוסף איבר לפי ת.ז.
- ד. הוסף איבר לפי חשבון בנק.
- ה. בטל איבר לפי ת.ז.
- ו. בטל איבר לפי חשבון בנק.
- ז. מצא את מספר הרשומות שמש' הטלפון שלהן הוא 04.

ח. בהנתן 2 תעודות זהות  $a$  ו- $b$  ( $b > a$ ), מצא את בעל חשבון הבנק ובו יתרת זכות הגבוהה ביותר מבין כל בעלי תעודות הזהות הגדולות מ- $a$  וקטנות מ- $b$ .



### שאלה 3: (33 נק')

נתונה רשת קווי תעופה. כל קו מצוין על-ידי שם עיר המוצא, שם עיר היעד, מחיר הטיסה. כתוב אלגוריתם שמוצא את כל הערים בעולם אותן ניתן לבקר תחת התנאים הבאים:

- א. תחילת המסע ישראל (בן-גוריון).
- ב. סוף המסע ישראל (בן-גוריון).
- ג. מחיר כל טיסה לא יעלה על \$500.

הערות:

- א. אין הגבלה על מחיר הטיול כולו.
- ב. ניתן לחזור הביתה להפסקת מנוחה במהלך הטיול. חשב את סיבוכיות הזמן של האלגוריתם שתכנתת.



בהצלחה !!



203.2310.א.1

שנה"ל תשס"ב, סמס' א', מועד ג', 11.4.2002  
פרופ' מנחם גד לנדאו

זמן הבחינה: שעתיים.  
חומר עזר: דף A4 בלבד ובו תוכן ללא הגבלה.

**שאלה 1: (34 נק')**

מבנה הנתונים של עץ אדום שחור מאפשר לענות על השאלות הבאות:  
מצא איבר, הוסף איבר, הורד איבר.

ברצוננו להוסיף את הפעולה עוקב איבר. פעולה זו מוצאת עבור איבר מסוים (הנח שהגישה לאיבר מתבצעת ב-  $O(1)$  זמן) את האיבר העוקב בעץ. בהנתן איבר בעל מפתח  $k_1$  התשובה תצביע אל האיבר בעץ בעל המפתח המינימלי  $k_2$  כך ש  $k_2 > k_1$ .

א. תאר דרך לחשב את העוקב ללא שינוי במבנה ובפעולות הידועות עבור עץ אדום שחור.

ב. כיצד תשנה את מבנה הנתונים של עץ האדום שחור כך שפעולת העוקב תהיה מהירה יותר מהתשובה לסעיף א'?

חשב את סיבוכיות הזמן של מציאת העוקב בסעיף א', ואת זו של מציאת העוקב בסעיף ב', כמו כן חשב את העלות של השינוי בסעיף ב' על שאר הפעולות בעץ האדום שחור.

**שאלה 2: (33 נק')**

נתונים  $n$  מספרים שלמים  $a_1 \dots a_n$  לא ממוינים. הנח ש:

1.  $n = 2^i$

2. לא ניתן לשנות את סדר האיברים.

תאר מבנה נתונים שיאפשר לענות על השאלות הבאות:  
בהנתן  $p$  ו-  $q$  מצא את המספר הקטן ביותר מבין האיברים  $a_p$  עד  $a_q$ .  
(כלומר, המספר הקטן מבין כל האיברים שהאינדקס שלהם גדול שווה ל- $p$ , קטן שווה ל- $q$ ).

חשב את סיבוכיות הזמן של בניית מבנה הנתונים ואת סיבוכיות הזמן לחישוב התשובה לכל שאלתא.

**שאלה 3 (33 נק')**

יהי  $G=(V,E)$  גרף בלתי-מכוון קשיר. נקודת הפרדה (articulation point) של  $G$  היא קדקוד אשר סילוקו הופך את  $G$  לבלתי קשיר.  
בצע חיפוש לעומק על הגרף  $G$ . בסיום החיפוש החלט האם השורש של עץ החיפוש הוא נקודת הפרדה. הוכח את טענתך.

בהצלחה!



203.2310.א.1

שנה"ל תשס"א, סמס' ב', מועד א', 24/6/2001  
פרופ' מנחם גד לנדאו

זמן הבחינה: שעתיים  
חומר עזר: דף A4 בלבד ובו תוכן ללא הגבלה.

**שאלה 1: (25 נק')**

בנה אדום שחור לנתונים הבאים (התחל מעץ ריק):

200	1. הכנס
100	2. הכנס
150	3. הכנס
125	4. הכנס
110	5. הכנס
120	6. הכנס
100	7. בטל
110	8. בטל

עליך להראות 8 עצים שונים, עץ לכל שלב.

**שאלה 2: (25 נק')**

נתונה רשת כבישי אגרה בין  $n$  ערים בארה"ב. לכל קטע כביש ישיר בין שתי ערים יש מחיר אגרה (Toll). טבלת הכבישים והאגרות נתונה. הנח שהכבישים הם חד כיווניים.

חברת משאיות אוסרת על נהגיה לנסוע בכבישים שהנסיעה עליהם יקרה מ-100\$.

כתוב אלגוריתם שעונה על השאילתות הבאות:

בהינתן שתי ערים (A ו-B). מצא האם ניתן לנסוע מ-A ל-B ומ-B ל-A תחת הנחיות החברה (מספר השאילתות אינו ידוע). שים לב שסה"כ האגרות לנסיעה בין שתי ערים רשאי להיות גבוה מ-100\$, וזאת מאחר והנסיעה יכולה להשתרע על יותר מקטע כביש אחד.

נתח את סיבוכיות הזמן של הקמת מבני הנתונים שיאפשר את התשובות לשאילתות, ואת סיבוכיות הזמן של תשובה לכל שאילתא.

**שאלה 3: (25 נק')**

הסבר מדוע בהנתן  $n$  מפתחות לא ניתן בשום אופן לבנות עץ אדום שחור של מפתחות אלו בפחות מ  $O(n \log n)$  פעולות.





#### שאלה 4: (25 נק')

נתונים  $n$  מספרים שלמים  $a_1 \dots a_n$  לא ממוינים. הנח ש:

1.  $n = 2^i$

2. לא ניתן לשנות את סדר האיברים.

תאר מבנה נתונים שיאפשר:

א. לענות על השאלות הבאות:

בהנתן  $p$  ו- $q$  מצא את סכום האיברים מ- $a_p$  עד  $a_q$ .

ב. לעדכן איברים, בהנתן אינדקס  $p$  וערך  $t$   $a_p \leftarrow t$

חשב את סיבוכיות הזמן של בניית מבנה הנתונים, ואת סיבוכיות הזמן לחישוב התשובה לכל שאלתא, ולכל עדכון.



בהצלחה !!



203.2310.א.1

שנה"ל תשס"א, סמס' ב', מועד ב', 19/7/2001  
פרופ' מנחם גד לנדאו

זמן הבחינה: שעה  
חומר עזר: דף A4 בלבד ובו תוכן ללא הגבלה.

**שאלה 1: (25 נק')**

הסבר בקצרה באיזה מיון תשתמש בכל אחד מהמקרים הבאים. נתח את סיבוכיות הזמן של האלגוריתם שבחרת.

1. 1,000,000 מספרים ממשיים.
2. 100,000 תעודות זהות.
3. 1,000,000 סטודנטים לבנים לחוד ובנות לחוד.
4. 1,000,000 מספרים שלמים חיוביים.
5. 500 מספרים ממשיים.
6. 1,000,000,000 מספרים טבעיים.

**שאלה 2: (25 נק')**

מדינת ישראל מבקשת לרכוש נפט. בידי משרד האנרגיה רשימה ובה  $n$  מדינות, בכל מדינה מספר החביות שניתן לרכוש ממנה, ומחיר כל חבית (רשימת המדינות לא משתנה). בנה מבנה נתונים שמאפשר:

- א. לקבל עדכונים לגבי כמות החביות העומדות למכירה במדינה מסוימת.
- ב. לקבל עדכונים לגבי מחיר החבית במדינה מסוימת.

- מספר העדכונים רב מאוד.

ג. כאשר האוצר מבקש לרכוש  $x$  חביות, התכנית תמצא את המדינות בהן העסקה תהיה הזולה ביותר. יתכן ועל-מנת לרכוש  $x$  חביות יש לרכוש אותן מיותר ממדינה אחת.

- הרכישות יתבצעו מספר רב מאוד של פעמים.

נתח את סיבוכיות הזמן של בניית מבנה הנתונים ואת זמן העדכונים והשאלות.



### שאלה 3: (25 נק')

הראה את טבלת התכנות הדינמי שמחשבת את תת הסדרה המשותפת הארוכה ביותר של המחרוזת ABCDAB ו-XYDB.

### שאלה 4: (25 נק')

אורח מארה"ב מבקר את משפחתו בארץ. הוא מבקש לתכנן את סדר הביקורים. במשפחתו n קרובים.

נמצאת ברשותו רשימה של בני המשפחה שליד כל אחד מצוינים גילו ושמות הוריו שעדיין חיים. במשפחה התקיימו נישואי קרובים. האורח מבקש לפגוש כל אחד מבני המשפחה בנפרד. התנאי היחידי שהוא מבקש לפגוש הורים לפני ילדים. כלומר, הוא יפגוש עם בן משפחה רק בתנאי שפגש כבר את הוריו והוריהם.

א. תכנן אלגוריתם שיבנה את רשימת המפגשים. נתח את סיבוכיות הזמן של האלגוריתם שלך.

ב. באחד הביקורים לארץ הצטרפה אל אורחנו אשתו שגם לה משפחה ענפה (אין קשר בין המשפחות), וגם היא מבקשת לפגוש אותם לפי התנאים של בעלה. במשפחה m קרובים. הפעם האורחים רוצים ללכת למפגשים יחדיו. בהנחה שסיימת את סעיף א', הראה אלגוריתם שמשלב את המפגשים עם משפחת האישה במפגשים עם משפחת הבעל. נתח את סיבוכיות הזמן של האלגוריתם.



בהצלחה !!



203.2310.א.1

שנה"ל תשס"א, סמס' א', מועד א', 29.1.2001  
פרופ' מנחם גד לנדאו

זמן הבחינה: שעה  
חומר עזר: דף A4 בלבד ובו תוכן ללא הגבלה.

**שאלה 1: (25 נק')**

נתון עץ חיפוש בינארי מאוזן (אדום שחור).  
כתוב אלגוריתם שמשנה את העץ כך שעבור כל צומת המפתח שלה יהיה קטן מהמפתחות בתת העץ השמאלי שלה; וגדול מהמפתחות בתת העץ הימני שלה.  
חשב את סיבוכיות הזמן של האלגוריתם שכתבת.

**שאלה 2: (25 נק')**

נתון גרף  $G(V,E)$  לא מכוון וקשיר.  
נקודת הפרדה היא צומת אשר סילוקו הופך את  $G$  לבלתי קשיר.  
כתוב אלגוריתם שמוצא צומת אחת אשר אינה נקודת הפרדה.  
חשב את סיבוכיות הזמן של האלגוריתם שכתבת.

**שאלה 3: (25 נק')**

נתון מערך דו מימדי,  $A$ , של מספרים שלמים.  
כתוב אלגוריתם שבהנתן מספר שלם  $c$  מחשב מערך, דו מימדי חדש,  $M$  ובו עבור כל  $i$  ו  $j$

$$M[i, j] = \max_{j-c \leq k \leq i} [A[k, j-c]]$$

חשב את סיבוכיות הזמן של האלגוריתם שכתבת.

**שאלה 4: (25 נק')**

בהנתן  $n$  איברים ניתן לבנות ערימה בינארית ב  $O(n)$  זמן.  
כתוב אלגוריתם שמקבל  $n$  מספרים שלמים ובונה ערימה בינומית (מינימום בראש).  
חשב את סיבוכיות הזמן של האלגוריתם שכתבת.

בהצלחה !!



## פתרונות מועד א', סמסטר א' 2001

1. לצורך הפתרון נכתוב פונקציה רקורסיבית על צומת בודד שפעולתה כך: א. קרא לפונקציה עם בני השמאלי. ב. קרא לפונקציה עם בני הימני. ג. הפוך את הפונקציות כך שבני הימני והשמאלי יתחלפו. **תנאי עצירה:** קראנו לפונקציה עם צומת NULL. **פתרון:** נקרא לפונקציה הזו עם השורש, ובסיומה העץ יקיים את התנאי.
2. נריץ DFS. בסיום ההרצה, כל עלה שבעץ ה-DFS אינו נקודת הפרדה. סיבוכיות:  $O(V+E)$ .
3. **האלגוריתם יתבצע בכמה שלבים. א.** נבנה מערך עזר B, ש-c השורות הראשונות בו ריקות. ב-B כל תא יחזיק את המקסימום מבין c האיברים שמעליו ב-A, כלומר חישוב כל תא עולה c. סיבוכיות:  $O(n^2c)$ . **ב.** נמלא את M, עם c שורות ועמודות ראשונות ריקות, כך שכל תא יחזיק את המקסימום שבין c האיברים משמאלו ב-B. סיבוכיות:  $O(n^2c)$ . **סיבוכיות כוללת:  $O(n^2c)$ .**
4. נתייחס לכל האיברים בקלט כאל עצי  $B_0$ . נאחד זוגות-זוגות של עצים לעצי  $B_1$ , כאשר אנו עלולים להישאר עם עץ  $B_0$  בודד שיכנס לערימה. את עצי  $B_1$  נאחד לעצי  $B_2$  מלבד השאריות, שתכנס (אם קיימת) לערימה. נמשיך כך עד  $B_k$ . כל איחוד עולה  $O(1)$  ומתבצעים  $n/2$  איחודים בשלב הראשון,  $n/4$  בשלב השני,  $n/8$  בשלישי וכך הלאה. **סיבוכיות כוללת:  $O(n)$ .** **פתרון חלופי:** למרות שהוספת איבר לערימה בינומית עולה במקרה הגרוע  $\log n$ , ניתן להוכיח שהוספת האיברים אחד-אחד לערימה לא עולה  $n \log n$ . למעשה "טפטוף" של האיברים אחד-אחד גוררת איחוד של עצי  $B_0$  במהצית הפעמים, של עצי  $B_1$  ברבע הפעמים, של  $B_2$  בשמינית הפעמים וכך הלאה. **סיבוכיות כוללת:  $O(n)$ .**



203.2310.א.1

שנה"ל תשס"א, סמס' א', מועד ב', 23.2.2001  
פרופ' מנחם גד לנדאו

זמן הבחינה: שעהיים  
חומר עזר: דף A4 בלבד ובו תוכן ללא הגבלה.

**שאלה 1: (25 נק')**

מבנה הנתונים של עץ אדום שחור מאפשר לענות על השאלות הבאות:  
מצא איבר, הוסף איבר, הורד איבר.

ברצוננו להוסיף את הפעולה עוקב איבר. פעולה זו מוצאת עבור איבר מסוים (הנח שהגישה לאיבר מתבצעת ב-  $O(1)$  זמן) את האיבר העוקב בעץ. בהנתן איבר בעל מפתח  $k_1$  התשובה תצביע אל האיבר בעץ בעל המפתח המינימלי  $k_2$  כך ש  $k_2 > k_1$ .

א. תאר דרך לחשב את העוקב ללא שינוי במבנה ובפעולות הידועות עבור עץ אדום שחור.

ב. כיצד תשנה את מבנה הנתונים של עץ האדום שחור כך שפעולת העוקב תהיה מהירה יותר מהתשובה לסעיף א'?

חשב את סיבוכיות הזמן של מציאת העוקב בסעיף א', ואת זו של מציאת העוקב בסעיף ב', כמו כן חשב את העלות של השינוי בסעיף ב' על שאר הפעולות בעץ האדום שחור.

**שאלה 2: (25 נק')**

נתונים  $n$  מספרים שלמים  $a_1 \dots a_n$  לא ממוינים. הנח ש:

1.  $n = 2^i$

2. לא ניתן לשנות את סדר האיברים.

תאר מבנה נתונים שיאפשר לענות על השאלות הבאות:

בהנתן  $p$  ו-  $q$  מצא את המספר הקטן ביותר מבין האיברים  $a_p$  עד  $a_q$ .

(כלומר, המספר הקטן מבין כל האיברים שהאינדקס שלהם גדול שווה ל- $p$ , קטן שווה ל- $q$ ).

חשב את סיבוכיות הזמן של בניית מבנה הנתונים ואת סיבוכיות הזמן לחישוב התשובה לכל שאלתא.

**שאלה 3: (25 נק')**

נתון גרף  $G(V,E)$  קשיר ולא מכוון, וצומת  $u$  בגרף זה.

תאר אלגוריתם שמחשב לכל הצמתים האחרות בגרף את מרחקן מ-  $u$ . (מרחק בין הצומת  $u$  לצומת  $w$  כלשהי הוא מספר הקשתות במסלול הקצר ביותר מ-  $u$  ל-  $w$ ).

חשב את סיבוכיות הזמן של האלגוריתם שכתבת.



#### שאלה 4: (25 נק')

חברה A מייצרת סדרת מוצרים  $a_1, \dots, a_n$

חברה B מייצרת סדרת מוצרים  $b_1, \dots, b_n$

נתונה פונקציה  $\text{Grade}(a, b_i)$  (שמחשבת ב- $O(1)$  זמן עבור צמד של מוצרים (אחד מכל חברה) את התאמתם. הציון הוא מספר שלם.

תאר אלגוריתם שמחשב עבור כל הצמדים  $1 \leq i, j \leq n$  את:

$$\text{MAX}(\text{Grade}(a_k, b_p) \mid 1 \leq k \leq i, 1 \leq p \leq j)$$

חשב את סיבוכיות הזמן של האלגוריתם שכתבת.



בהצלחה !!



203.2310.א.1

שנה"ל תשס"א, סמס' א', מועד ג', 22/3/2001  
פרופ' מנחם גד לנדאו

זמן הבחינה: שעתיים  
חומר עזר: דף A4 בלבד ובו תוכן ללא הגבלה.

**שאלה 1: (25 נק')**

בנה אדום שחור לנתונים הבאים (התחל מעץ ריק):

1	1. הכנס
10	2. הכנס
20	3. הכנס
15	4. הכנס
16	5. הכנס
25	6. הכנס
1	7. בטל
10	8. בטל
20	9. בטל

עליך להראות 9 עצים שונים, עץ לכל שלב.

**שאלה 2: (25 נק')**

נתונים  $n$  איברים. הראה כיצד למצוא את האיבר ה- $k$  ( $k-1$  איברים גדולים ממנו) ב- $O(k \log k)$  פעולות. הנח ש- $k$  קטן בסדר גודל מ- $n$ .  
חשב את סיבוכיות הזמן של האלגוריתם שכתבת.

**שאלה 3: (25 נק')**

א. נתון עץ חיפוש אדום שחור ובו  $n$  רשומות. המפתח לרשומות הוא מספר שלם. הראה כיצד ניתן בצורה יעילה לבנות מרשומות אלו ערימה שבראשה המפתח המינימלי. חשב את סיבוכיות הזמן של האלגוריתם שכתבת.

ב. נתונה ערימה ובה  $n$  רשומות. המפתח לרשומות הוא מספר שלם. בראש הערימה המפתח המינימלי. הראה כיצד ניתן בצורה יעילה לבנות מרשומות אלו עץ אדום שחור. (השתמש באותם מפתחות).  
חשב את סיבוכיות הזמן של האלגוריתם שכתבת.

ג. האם ניתן לבצע את חלק א' בזמן  $O(\log n)$ ? הסבר את תשובתך.  
האם ניתן לבצע את חלק ב' בזמן  $O(n)$ ? הסבר את תשובתך.





### שאלה 4: (25 נק')

נתון גרף  $G(V,E)$  לא מכוון וקשיר.  
הגדרה: גרף דו-צדדי הוא גרף בו הצמתים מחולקים ל-2 קבוצות  $V_1$   $V_2$  והקשתות מקשרות רק צמתים שאינם באותה קבוצה.  
הראה כיצד בעזרת האלגוריתם DFS ניתן לבדוק האם הגרף  $G$  הוא גרף דו-צדדי.  
חשב את סיבוכיות הזמן של האלגוריתם שכתבת.



בהצלחה !!



## מבני נתונים

203.2310.א.1

203.2310.א.2

שנה"ל תש"ס, סמס' א', מועד א', 30.1.2000  
פרופ' מנחם גד לנדאו

זמן הבחינה: שעותיים  
חומר עזר: שני דפי A4 בלבד ובהם תוכן ללא הגבלה.

### שאלה 1: (25 נק')

נתונות 2 רשימות ממוינות A, B של סטודנטים. ברשימה A n סטודנטים, וברשימה B m סטודנטים. הרשימות ניתנות במערכים (הרשימות ממוינות לפי מספרים אישיים).

רשומת סטודנט מכילה:

א. שם.

ב. מספר אישי בצבא (סטודנט שלא שירת בצבא יקבל את המספר -1)

כתוב אלגוריתמים שמדפיסים לכל סטודנט ברשימה A את מספר הסטודנטים ברשימה B "שהיו איתו בבקו"ם".

נגדיר סטודנט ("שהיה איתו בבקו"ם") כסטודנט שמספרו האישי גדול או קטן לכל היותר ב-  $\log n$  מספרים ממספרו האישי של הסטודנט ברשימה A. כלומר, עבור מספר אישי X את מספר הסטודנטים בעלי מספר אישי Y כך ש:

$$X - \log n - 1 < Y < X + \log n + 1$$

סטודנט ברשימה A שלא שירת בצבא יקבל את הערך 0.

אלגוריתם אחד יטפל במקרה ש  $n=O(m)$

אלגוריתם שני יטפל במקרה ש  $n=O(\log m)$

חשב את סיבוכיות הזמן של כל אחד מהאלגוריתמים.

### שאלה 2: (25 נק')

תאר אלגוריתם המטפל במסד נתונים ובו מספרים שלמים. האלגוריתם מבצע את הפעולות הבאות בקלט (מסד הנתונים מאותחל כריק):

א. הוסף איבר למסד הנתונים.

ב. בטל איבר במסד הנתונים.

ג. הדפס את K האיברים הגדולים במסד הנתונים. K משתנה בין שאילתא לשאילתא.

ד. מצא את ממוצע המספרים הזוגיים.

ה. מצא איבר Q והדפס את K האיברים הקטנים ביותר שגדולים ממנו, ואת K האיברים הגדולים ביותר שקטנים ממנו. K ו Q משתנים בין שאילתא לשאילתא

חשב את סיבוכיות הזמן של כל אחד מהפעולות בהנחה שמספר האיברים הוא n.



### שאלה 3 : (25 נק')

נתונות 2 סדרות מספרים שלמים  $A = a(1) \dots a(n)$   $B = b(1) \dots b(n)$

בנה אלגוריתם שמסוגל לענות על השאלות הבאות:  
קלט 2 אינדקסים  $i$  ו  $j$   $0 < i, j < n+1$   
פלט

$$p(i, j) = \begin{cases} 0 & \text{if } i=0 \text{ or } j=0 \\ \max [a(i) + b(j) ; p(i-1, j-1)] & \text{אחרת} \end{cases}$$

חשב את סיבוכיות הזמן של האלגוריתם.

### שאלה 4 : (25 נק')

נתונה רשת של  $m$  כבישים חד-כיווניים בין  $n$  ערים בארה"ב.

- כתוב אלגוריתם שמוצא את קבוצת הערים הגדולה ביותר בה ניתן להגיע מעיר לעיר.
- כתוב אלגוריתם שעונה על השאלות הבאות: בהינתן 2 ערים  $A$  ו  $B$  האם ניתן להגיע מ  $A$  ל  $B$  ומ  $B$  ל  $A$ . ישאלו שאלות רבות.

(רמז - האלגוריתם השני יתבצע לאחר הראשון.)

חשב את סיבוכיות הזמן של שני האלגוריתמים. באלגוריתם השני חשב את סיבוכיות הזמן של השלב המקדים ושל חישוב התשובה לכל שאלתה.



בהצלחה !!



203.2310.א.1

203.2310.א.2

שנה"ל תש"ס, סמס' א', מועד ב', 30.1.2000  
פרופ' מנחם גד לנדאו

זמן הבחינה: שעתיים  
חומר עזר: שני דפי A4 בלבד ובהם תוכן ללא הגבלה.

**שאלה 1: (33 נק')**

תאר אלגוריתם "המשפר" את עץ האדום שחור. בנוסף לפעולות הרגילות של מציאה, הוספה, וביטול, תבוצענה הפעולות הבאות (העץ מאתחל כריק):  
א. מצא את גובה העץ.  
ב. בהינתן צומת (בצומת רשומה ובה מפתח K) מצא את הצומת העוקבת (הצומת ובה המפתח הקטן ביותר שגדול מ K) ב  $O(1)$  זמן.

תאר גם את השינויים שתבצע בבניית עץ האדום שחור.  
חשב את סיבוכיות הזמן של כל פעולה, ושל השינויים בעץ האדום שחור, בהנחה שבזמן הביצוע היו בעץ n איברים.

**שאלה 2: (33 נק')**

נתונות 2 סדרות של מספרים שלמים  
 $A = a(1) \dots a(n)$  ;  $B = b(1) \dots b(m)$

בנה מבנה נתונים שמסוגל עבור כל  $i$  ו  $j$   $(0 < i < n+1 ; 0 < j < m+1)$  לחשב ב  $O(1)$  זמן את:

$$\max [a(x) + b(y)], \quad 0 < x < i + 1 ; 0 < y < j + 1$$

תאר את מבנה הנתונים שבחרת ואת האלגוריתם שבונה אותו.

חשב את סיבוכיות הזמן של האלגוריתם.

**שאלה 3: (34 נק')**

נתונה תוכנית לימודים ובה n קורסים. לכל קורס רשימת קורסים (מתוך n הקורסים) שהוא מהווה דרישת קדם עבורם.

סטודנט רשאי ללמוד בכל סמסטר במספר קורסים גדול כרצונו בתנאי שעמד בדרישות הקדם.

תאר אלגוריתם שמוצא את מספר הסמסטרים הקטן ביותר בהם ניתן לסיים את הלימודים (כל n הקורסים).

חשב את סיבוכיות הזמן של האלגוריתם.



בהצלחה !!

210.2760.א.1

210.2760.א.2

שנה"ל תשנ"ט, סמס' א', מועד א', 1.3.99  
פרופ' מנחם גד לנדאו

זמן הבחינה: 3 שעות  
חומר עזר: דף A4 אחד בלבד ובו תוכן ללא הגבלה.

שאלה 1: (25 נק')

כתוב אלגוריתם המקבל כקלט ערמה ובה  $n$  איברים המאוכסנים במערך  $A$ .  
האלגוריתם מטפל בפעולות הבאות:

**א. פעולת שינוי.**

האלגוריתם מקבל אינדקס  $p$ ,  $p < n$  וערך  $b$ . האלגוריתם משנה ערכו של האיבר במקום  $p$  ב- $A$  ל- $b$  ולאחר מכן מחזיר למערך את תכונות הערימה. כל זאת ב- $O(\log n)$  זמן.

**ב. פעולת ביטול.**

האלגוריתם מקבל אינדקס  $p$ ,  $p < n$  ומבטל בערמה את הערך במקום  $p$  במערך  $A$ . ולאחר מכן מחזיר למערך את תכונות הערימה. כל זאת ב- $O(\log n)$  זמן.

**ג. פעולת החלפת סדר.**

האלגוריתם מחליף את הסדר בערמה. כלומר אם בראש היה המינימום הופך את הערמה לערמה ובה בראש המקסימום ולהפך. כל זאת ב- $O(n)$  זמן.

שאלה 2: (25 נק')

בחברת היי-טק  $n$  עובדים.

רשומת עובד מכילה:

1. שם ושם משפחה.

2. ת.ז.

3. שכר.

4. רשומה מקושרת של המנהלים הישירים שלו. (לעובד ייתכנו יותר ממנהל אחד).

בחברה מונה נשיא חדש המבקש לפגוש את כל העובדים. הוא בקש ממזכירתו לקבוע לו את הפגישות תחת שני תנאים:

- הוא יפגוש כל עובד בנפרד.
- הוא יפגוש עובד רק לאחר שפגש את כל המנהלים שלו.

א. כתוב אלגוריתם שבודק שאין שני עובדים המנהלים אחד את השני ולו גם בדרך עקיפה (מעגל ניהול). נתח את סיבוכיות הזמן של האלגוריתם.

ב. כתוב אלגוריתם היוצר סדר פגישות חוקי. חשב את סיבוכיות הזמן של האלגוריתם.

ג. כתוב אלגוריתם שמקבל כקלט שם של עובד ומוצא את השכר הכולל של העובד והכפופים לו. כלומר העובד הכפופים הישירים שלו, הכפופים להם וכו'.



### שאלה 3 : (25 נק')

תאר אלגוריתם המטפל במסד נתונים ובו מספרים שלמים. האלגוריתם מבצע את הפעולות הבאות בקלט.

- א. הוסף איבר למסד נתונים.
- ב. מצא איבר במסד נתונים.
- ג. בטל איבר במסד נתונים.
- ד. בהינתן 2 מספרים  $a$  ו- $b$ , מצא את סכום כל האיברים במסד הנתונים הקטנים מ- $b$  וגם גדולים מ- $a$ .
- ה. מצא את האיבר המקסימלי במסד נתונים.
- ו. מצא את ממוצע האיברים במסד נתונים.

חשב את סיבוכיות הזמן של כל פעולה בהנחה שבזמן הביצוע היו במסד הנתונים  $n$  איברים.

### שאלה 4א': (12 נק')

בנה עץ 2-3-4 לנתונים הבאים (התחל מעץ ריק):

100	1. הכנס
200	2. הכנס
150	3. הכנס
125	4. הכנס
110	5. הכנס
60	6. הכנס
200	7. בטל
110	8. בטל

עליך להראות 8 עצים שונים, עץ לכל שלב.

### שאלה 4ב': (13 נק')

בנה עץ אדום - שחור לנתונים הבאים (התחל מעץ ריק):

100	1. הכנס
200	2. הכנס
150	3. הכנס
125	4. הכנס
110	5. הכנס
60	6. הכנס
200	7. בטל
110	8. בטל

עליך להראות 8 עצים שונים, עץ לכל שלב.



בהצלחה !!

1. התשובות בהנחה שהערימה היא ערימת מקסימום. א. יש לבדוק האם האיבר גדול מאביו, אם כן יש לבעבע אותו מעלה. אם הוא לא גדול מאביו, יש לבדוק האם הוא קטן מבניו, ואם כן יש לבעבע אותו מטה. הבעבוע באמצעות סדרה של פעולות בסיסיות על ערימה. ב. יש לשים את הערך "אינסוף" באיבר שרוצים למחוק, ע"י קריאה לפונקציה השינוי (סעיף א'). אחר-כך יש לקרוא לפונקציה "הוצא מקסימום". ג. הערימה מיוצגת במערך: יש לבנות את הערימה מחדש ע"י פעולת Build heap, שמתבצעת בסיבוכיות  $O(n)$ .
2. א. גריץ DFS נחפש קשתות אחורה: אם קיימה אפילו אחת, יש מעגל גיהיל. סיבוכיות  $O(V+E)$ . ב. גריץ מיון טופולוגי על הגרף. סיבוכיות  $O(V+E)$ . ג. נבנה את  $G^T$  כדי להשיג את היחס "העובדים הכפופים לי", סיבוכיות  $O(V+E)$  (ברשימת שכנויות). מעתה בכל פעם שתבצע השאילתא גריץ BFS על צומת העובד הרצוי, ונסכום את המשכורות בכל צומת שעברנו ב-BFS (כלומר העובדים הכפופים לו), בסיבוכיות  $O(V+E)$ . (הערה: לא ניתן לבצע תכנון דינמי של סכימה post-order מכיוון שכל עובד מנהל ע"י כמה מנהלים, וסכימה מוז תספור את העובדים האלו פעמיים).
3. א, ב, ג. עץ חיפוש מאוזן כגון עץ אדום-שחור, ששומר בכל צומת את סכום כל האיברים בתת-העץ שלו (איתחול בשיטת post-order). בשמור גם מצביע לאיבר המקסימלי, ומשתנה count הסופר את מספר האיברים. יש לשנות את פעולת הרוטציה בהתאמה כדי שלא תפגום במידע על הסכומים (הערה: בפתרון מלא יש להסביר כיצד תשתנה הרוטציה). כל הכנסה וביטול יעדכנו את המסלול עד לצומת המבוקש, יורידו או יוסיפו אחד ממשנתה המניה. בנוסף, בכל הכנסה נבדוק האם המפתח החדש גדול מהמקסימום, אם כן נעדכן. במחיקה יש לבדוק האם מחקנו מקסימום; אם כן, יש למצוא את הקודם לו ( $O(\log n)$ , לא מוסיף סיבוכיות). סיבוכיות מציאה, הוספה, ביטול:  $O(\log n)$ . ד. מציאת סכום האיברים בין  $a$  ל- $b$  מתבצעת בכמה שלבים, בהנחה ש- $a < b$ . i. מצא אב קדמון משותף,  $z$ , של  $a$  ו- $b$ , ע"י חיפוש שניהם במקביל מהשורש: בפעם הראשונה שהחיפוש מתפצל, כלומר  $a$  הולך שמאלה ו- $b$  הולך ימינה, זהו האב הקדמון המשותף הנמוך ביותר -  $z$ . ii. עבור על המסלול מ- $z$  ל- $a$ . עבור כל צומת  $v$  במסלול, אם ירדת ממנה שמאלה [כלומר: (תת-עץ ימני של  $v$ ) ולכן  $a < v < b$  ותת-העץ הימני שלו צריכים להיכלל], הוסף את עצמה ואת סכום האיברים בתת-העץ הימני שלה לסכום המצטבר. אם ירדת ממנה ימינה [כלומר: (תת-עץ שמאלי של  $v$ ) ולכן  $a > v > b$  ותת-העץ השמאלי שלו לא צריכים להיכלל], אל תוסיף כלום. iii. באותה צורה עבור על המסלול מ- $z$  ל- $b$ . עבור כל צומת במסלול, אם ירדת ממנה ימינה, הוסף את עצמה ואת סכום האיברים בתת-העץ השמאלי שלה לסכום המצטבר. אם ירדת ממנה שמאלה, אל תוסיף כלום. (הערות: הפתרון מגיש ש- $a$  ו- $b$  איברים בעץ, וש- $z$  שונה מ- $a$  או מ- $b$ . פתרון מלא ידאג לטפל במצבים אלו. ציור שווה אלף מלים וכדי לצייר את הפתרון בכתיבה). סיבוכיות השאילתא:  $O(\log n)$ . ה. מכיוון ששמרנו מצביע, הסיבוכיות  $O(1)$ . ו. נחלק את הסכום תת-העץ של השורש (שהוא סכום כל האיברים בעץ) במס' האיברים בעץ. סיבוכיות:  $O(1)$ .



מבני נתונים

210.2760.א.1

210.2760.א.2

שנה"ל תשנ"ט, סמס' א', מועד ב', 24.3.99  
פרופ' מנחם גד לנדאו

זמן הבחינה: 3 שעות  
חומר עזר: דף A4 אחד בלבד ובו תוכן ללא הגבלה.

שאלה 1: (25 נק')

כתוב אלגוריתם המקבל כקלט ערמה ובה  $n$  איברים המאוכסנים במערך  $A$ , ומספר שלם  $K, K < N$ .  
בראש הערימה נמצא המקסימום. כתוב אלגוריתם המוצא ומדפיס את  $K$  האיברים הגדולים בערימה,  
בזמן  $O(K \log K)$ .

שאלה 2: (25 נק')

נתונה כבישי אגרה בין  $n$  ערים בארה"ב. לכל כביש בין שתי ערים יש מחיר אגרה (Toll). טבלת  
הכבישים והאגרות נתונה. הנח שהכבישים הם חד כיווניים. (לא בין כל שתי ערים יש כביש).  
חברת משאיות אוסרת על נהגיה לנסוע בכבישים הנסיעה עליהם יקרה מ- \$100.

כתוב אלגוריתם שעונה על השאלות הבאות:

בהינתן שתי ערים  $A$  ו- $B$ . מצא האם ניתן לנסוע מ- $A$  ל- $B$  ומ- $B$  ל- $A$  תחת הנחיות החברה (מספר  
השאלות אינו ידוע).

נתח את סיבוכיות הזמן של הקמת מבני הנתונים שיאפשר את התשובות לשאלות, ואת סיבוכיות הזמן  
של תשובה לכל שאלתא.





**שאלה 3 : (25 נק')**

נתונות  $n$  רשומות של סטודנטים, בכל רשומה:

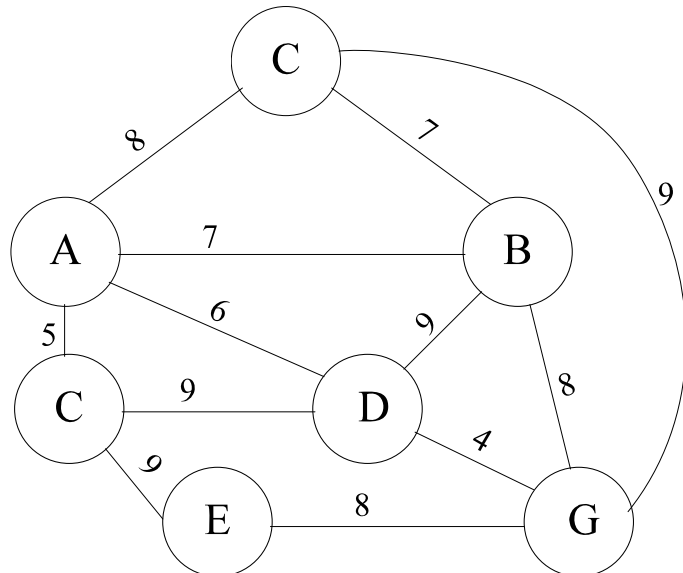
- א. שם הסטודנט.
- ב. ת.ז.
- ג. ציון במבני נתונים, מספר שלם בין 0 ל-100.
- ד. ממוצע ציונים (מספר ממשי).

הסבר כיצד תבצע את כל אחת מהפעולות הבאות, אין קשר בין הפעולות, הנח שכל פעולה היא חד-פעמית:

- A. מיון הסטודנטים לפי הציון במבני נתונים.
- B. מיון הסטודנטים לפי ת.ז.
- C. מיון הסטודנטים לפי ממוצע הציונים.
- D. לאחר ביצוע C נוסף תלמיד חדש, כיצד תוסיף אותו לנתונים תוך שמירת הסדר של הסטודנטים לפי ממוצע הציונים.
- E. לאחר ביצוע C נוסף  $m$  סטודנטים חדשים. הראה כיצד תיצור מצב בו  $m+n$  הסטודנטים ממיונים לפי ממוצע הציונים.

- הראה כיצד תפעל כאשר  $m < \log n$ .
- הראה כיצד תפעל כאשר  $\log n < m < n$ .
- הראה כיצד תפעל כאשר  $m > n^2$ .

**שאלה 4 : (25 נק')**



בהינתן הגרף: מצא את העץ הפורש המינימלי בעזרת האלגוריתם של פריים. החל בצומת A. הראה את סדר הוספת הקשתות לעץ הפורש המינימלי.



אחת ד - מעצב

A. אין סלוגנלים לפי ציון בקורס

B. " " " " " "

C. " " " " " "

D. טלוח הוצא ל נוסף תלמידי תכנית

הוא הוצא תספורת אנו לעגת התעוה חוק איות סדר הסלוגנים לפי ממוצע הציונים.

E. זאת ביצע ל נוסף א סלוגנלים תלמידי

הוא הוצא ליוזם מלב בו הוא הסלוגנים המונים לפי המצב

1  $n < K$

2  $n < K < n^2$

3  $n^2 > K$

בתוך

A) האנו מקדום הציון באנו אמי אלא גן {טלוגנים} אולי במקרה

אין מניב אלא אין לנו יביק מביד ביותר

B) אין לפי תבנית יתבצע כמין גמים האחר ואם להכחית תשובה

C)  $n^2$  (או לפחות ספרת הקצרת) וכל סכרי הסוגיה בלוח  $n^2$

לאק אם אין זה יביק לנושא

C



גלי אינו מסתפק על התפלגות ציונים ממוצעת ולכן פתרון bucket-sort אינו פתרון מתאים לסעיף C, אלא פתרון השוואה רגיל כגון mergesort, בסיבוכיות  $O(n \log n)$ , הוא הפתרון הנכון.

## מבני נתונים

210.2760.א.1

210.2760.א.2

שנה"ל תשנ"ט, סמס' א', מועד ג', 6.6.99  
פרופ' מנחם גד לנדאו

זמן הבחינה: 3 שעות  
חומר עזר: דף A4 אחד בלבד ובו תוכן ללא הגבלה.

### שאלה 1: (25 נק')

נתונות  $n$  רשומות,  $(n=2)$   $-1^i$  לכל רשומה:

- שם.
- מס' זהות.
- ציון באנגלית.
- ציון במחשבים.

בנה מבנה נתונים החוסך בזיכרון שמאפשר את הפעולות הבאות:

- בהינתן מס' זהות מחליף את הציון באנגלית בציון חדש.
- מוצא את ממוצע ציוני המחשבים של הסטודנטים.
- מוצא את התלמיד בעל ההפרש הגבוה ביותר בין ציוניו.

חשב סיבוכיות הזמן של שלב ההכנה ואת סיבוכיות הזמן לתשובה לכל אחת מהשאלות.

### שאלה 2: (25 נק')

כתוב אלגוריתם המקבל כקלט ערמה ובה  $N$  איברים המאוכסנים במערך  $A$ , ומספר שלם  $K$ ,  $K < N$ .  
בראש הערימה נמצא המקסימום.

- כתוב אלגוריתם המוצא ומדפיס את  $K$  האיברים הגדולים בערימה, בזמן  $O(K \log K)$ .
- כתוב אלגוריתם המוצא את האיבר המינימלי בערימה. חשב סיבוכיות הזמן של האלגוריתם.

### שאלה 3: (25 נק')

נתונה רשת כבישים חד כיווניים ( $m$  כבישים) המחברת  $n$  ערים.

- כתוב אלגוריתם הבודק שניתן לעבור בין כל הערים.
- הנח שלתיקון כל כביש יש מחיר ידוע. חברה מע"צ רוצה לבצע תיקונים בסוף השבוע על פי שלושה עקרונות:

- הערים עדיין יהיו מחוברות.
- אין תנועה בכביש בתיקון.
- עלות התיקון של הכבישים היא מקסימלית.



### שאלה 4א': (12 נק')

בנה עץ 2-3-4 לנתונים הבאים (התחל מעץ ריק):

15	1. הכנס
25	2. הכנס
20	3. הכנס
19	4. הכנס
17	5. הכנס
12	6. הכנס
25	7. בטל
17	8. בטל

עליך להראות 8 עצים שונים, עץ לכל שלב.

### שאלה 4ב': (13 נק')

בנה עץ אדום - שחור לנתונים הבאים (התחל מעץ ריק):

15	1. הכנס
25	2. הכנס
20	3. הכנס
19	4. הכנס
17	5. הכנס
12	6. הכנס
25	7. בטל
17	8. בטל

עליך להראות 8 עצים שונים, עץ לכל שלב.

בהצלחה !!



37~4

30

מבוא למבני נתונים - מתמטיקה ומדעי המחשב, אביב 1996, מועד ב  
פרופ' גד לנדאו

3 שעות

ענה על כל השאלות

חומר פתוח

יש להפחית את השאלון עם הזמרה המחילה!

שאלה 1 (20 נקודות)

תכנן אלגוריתמים שמקבל כקלט עץ חיפוש בינארי ובו  $n$  אברים שונים, ומוצא את החציון של  $n$  האברים.  
חשב את סיבוכיות הזמן של האלגוריתמים.

①

$\frac{1}{2} \log n$

שאלה 2 (20 נקודות)

בהינתן 2 מערכים ממוינים -  $A=A[1] \dots A[n]$  ו  $B=B[1] \dots B[m]$  תכנן 2 אלגוריתמים שמוציאים  
החיתוך של  $A$  ו  $B$ . כלומר את כל האברים המופיעים בשני המערכים.  
1. אלגוריתמים א למקרה ובו  $m$  קטנה מאד יחסית ל  $n$ . וכמשל  $(n < \log m)$   
2. אלגוריתמים ב למקרה ובו  $m$  ו  $n$  בעלי אותו סדר גודל

$\frac{1}{2} \log n$

חשב את התחום של  $m$ , כפונקציה של  $n$ , בו כדאי להשתמש באלגוריתמים א ולא באלגוריתמים ב.

שאלה 3 (20 נקודות)

נתון גרף  $G(V,E)$  לא מכוון, לא קשיר, וללא משקלות על הקשתות.  
א. הראה כיצד כאשר הגרף ממומש במטריצת שכנויות ניתן לממש אותו בשימת שכנויות  
ב. הראה כיצד כאשר הגרף ממומש בשימת שכנויות ניתן לממש אותו במטריצת שכנויות.  
חשב את סיבוכיות הזמן של האלגוריתמים.



פתרונות מועד ב', אביב 1996

1. בסרוק את העץ inorder ונבנים אותו למערך. האיבר במקום  $n/2$  יהיה החציון. סיבוכיות:  $O(n)$ .
2. במקרה ש-  $m \ll n$  נערוך  $m$  חיפושים בינאריים, עבור כל איבר ב- $B$  נחפש האם הוא קיים ב- $A$ . הסיבוכיות  $O(m \log n)$ . במקרה ש  $n=O(m)$ , נריץ את הפונקציה merge בגירסה משופרת, שתשמור איברים שהופיעו בשני המערכים (ולכן שייכים לאיחוד). סיבוכיות  $O(n+m)=O(n)$ . התחום בו כדאי להשתמש באלגוריתם א':  $n+m > m \cdot (\log n)$ , כלומר  $n > m(\log n - 1)$ , ששקול ל-  $m = O(n / \log n)$ .
3. א. נעבור על כל שורה וטור במטריצה, אם כתוב בתא  $(i,j)$  '1' אז ניצור רשומה עבור  $j$  ונשרשר אותה לרשימת השכנים של תא  $i$ . סיבוכיות:  $O(V^2)$ . ב. עבור כל צומת,  $i$ , נעבור על רשימת שכניו  $(j)$ , ונכתוב '1' בתא  $(i,j)$ . סיבוכיות:  $O(V+E)$ . אם יש לאפס את המטריצה, הדבר ידרוש  $O(V^2)$ .



37<sup>31</sup>

מבוא למבני נתונים - מתמטיקה ומדעי המחשב, אביב 1996, מועד ג

פרופי גד לדאו

3 שעות

ענה על כל השאלות

חומר פתוח

יש להוציא את המבחן עם החומר הנתיב 1

שאלה 1 (20 נקודות)

נתונים  $n$  מספרים שלמים, מספר המספרים השונים הוא  $n \log$ , כלומר ישנן כמיליון רבות חבני אלגוריתם שיש את המספרים.

חשב את סיבוכיות הזמן של האלגוריתם.

שאלה 2 (20 נקודות)

נתון מערך  $A$  בגודל  $n$ .  $B$  הוא  $(n \times n)$  אינו דליל המקומות הראשונים במערך נמצאים מספרים שלמים ממונים. במקום  $n \dots n+1$  סטובה האות  $X$  שמשמשת מקום דיוק. תכנן אלגוריתם שיהיה מסדר  $k$  מוצא האם אתו  $m$  האברים הראשונים במערך שווה לו. (זכור הערך של  $n$  אינו ידוע).

חשב את סיבוכיות הזמן של האלגוריתם. הנה ש  $n$  קטנה מאד יחסית ל  $n$ .

שאלה 3 (20 נקודות)

נתון גרף  $G(V,E)$  לא מכוון, קשיר. הקשתות עלות ממון רב. תכנן אלגוריתם שמצמצם את מסר הקשתות בגרף. תוך כך שמירת הקשירות של הגרף.

חשב את סיבוכיות הזמן של האלגוריתם.



שאלה 4 (10 נקודות)

בנה עץ 2-3-4 למתונים הבאים (התחל מעץ ריק):

- |            |             |             |
|------------|-------------|-------------|
| 1. הוסף 10 | 5. הוסף 40  | 9. הוסף 60  |
| 2. הוסף 50 | 6. הוסף 80  | 10. הוסף 90 |
| 3. הוסף 70 | 7. הוסף 30  | 11. הוסף 35 |
| 4. הוסף 20 | 8. הוסף 100 |             |

עליך להראות 11 עצים שונים, עץ לכל שלב.

שאלה 4 ב (10 נקודות)

בנה עץ אדום-שחור למתונים הבאים (התחל מעץ ריק):

- |            |             |             |
|------------|-------------|-------------|
| 1. הוסף 10 | 5. הוסף 40  | 9. הוסף 60  |
| 2. הוסף 50 | 6. הוסף 80  | 10. הוסף 90 |
| 3. הוסף 70 | 7. הוסף 30  | 11. הוסף 35 |
| 4. הוסף 20 | 8. הוסף 100 |             |

עליך להראות 11 עצים שונים, עץ לכל שלב.





1. האלגוריתם יתבצע בכמה שלבים. א. בנה עץ חיפוש מאוזן (כגון עץ אדום-שחור), כאשר לכל צומת נשרשר את הרשומות בעלות מפתח זהה. גובה העץ יהיה  $\log(\log n)$ , ואליו נכניס  $n$  רשומות: כלומר ההכנסה תעלה  $O(n \log(\log n))$ . ב. בעבור על העץ בשיטת inorder, ונציא כפלט את כל האיברים בסיבוכיות  $O(n)$ . ניתן לייעל ע"י שמירת מצביע לסוף הרשימה בכל צומת, ואז הפלט יהיה רשימה מקושרת, בסיבוכיות  $O(\log(\log n))$ . סיבוכיות סללת:  $O(n \log(\log n))$ .
2. האלגוריתם יתבצע בכמה שלבים. א. בתחיל לבדוק בלולאה מתחילת המערך, בתאים 1, 2, 4, וכן הלאה בתא ה- $2^i$ . אם בתא כתוב x (המסמן תא ריק) או איבר הגדול מהמפתח שאנו מחפשים, נצא מהלולאה. סיבוכיות: לכל היותר הגענו לתא  $2m$ , כלומר  $O(\log m)$ . ב. אם נעצרנו בתא ה-k, נבצע חיפוש בינארי בין  $k/2$  ל-k. סיבוכיות  $O(\log m)$ . סיבוכיות סללת  $O(\log m)$ .
3. נריץ BFS או DFS. מכיוון שהגרף קשיר ולא מכוון, נקבל רכיב קשירות יחיד שהוא עץ, כלומר זהו עץ פורש. סיבוכיות:  $O(V+E)$  ברשימת שכנויות,  $O(V^2)$  במטריצת סמיכויות. (הערה: אם הגרף לא קשיר, מחלקים לרכיבי קשירות, ולכל רכיב מפעילים את האלגוריתם הנ"ל).



203.2310.א.1

שנה"ל תשס"ה, סמס' ב', בחינת אמצע, 11/4/05  
פרופ' מנחם גד לנדאו

זמן הבחינה: שעה ועשרים דקות.  
חומר עזר: דף A4 בלבד ובו תוכן ללא הגבלה.

**שאלה 1: (50 נק')**

נתונה ערמה בינומית ובה  $n$  איברים. הראה דרך לפרק אותה לשלוש ערמות בינומיות בעלות מספר איברים שווה  $(\frac{n}{3})$  [רמז: ניתן לבצע את הפעולה ב-  $O(\log n)$ ].

**שאלה 2: (50 נק')**

בכיתה נלמדו שלוש פעולות בעת חיפוש בינארי (מצא, הוסף, בטל). ברצוננו להוסיף את פעולת העוקב שתבצע ב-  $O(1)$ .

קלט: מצביע לצומת בעץ (נניח צומת  $V$  ומפתח  $P$ ).

פלט: צומת  $W$  בעץ שהמפתח שנמצא ב-  $Q$  מקיים:

(א)  $Q > P$

(ב) לא נמצא מפתח בעץ שערכו  $A$  ומקיים  $Q > A > P$

תאר את השינויים שתבצע בעץ ואת עלות השינויים על שאר הפעולות.



בהצלחה !!



203.2310.א.1

שנה"ל תשס"ה, סמס' א', בחינת אמצע, 6/12/04  
פרופ' מנחם גד לנדאו

זמן הבחינה: שעה ועשרים דקות.  
חומר עזר: דף A4 בלבד ובו תוכן ללא הגבלה.

**שאלה 1: (50 נק')**

נתונות  $n$  רשומות. תחום המפתחות של הרשומות הוא בגודל  $\log \log n$ .  
בנה מבנה נתונים שמאפשר:

1. מציאת ה"חביבי"
2. הוצאת ה"חביבי"
3. הוספת איבר
4. בניה של מבנה הנתונים עבור  $n$  רשומות

נתח את סיבוכיות הזמן של כל אחת מהפעולות שבצעת בהנחה שבזמן ביצוען יש במבנה  $n$  רשומות.

השווה את ביצועי מבנה הנתונים שהצעת לאלו שנלמדו בכיתה.

**שאלה 2: (50 נק')**

נתונות 2 סדרות של מפתחות ממוינים.

בסדרה A קיימים  $n$  איברים ובסדרה B קיימים  $m$  איברים.

תכנן אלגוריתמים שמוצאים את המפתחות שנמצאים ב-2 הסדרות גם יחד. כלומר, איברים שנמצאים גם בסדרה A וגם בסדרה B.

התיחס ליחסים שונים בין  $m$  ל- $n$ .

נתח את סיבוכיות הזמן של כל אלגוריתם שתכנת.



בהצלחה !!



203.2310.ב.1

שנה"ל תשס"ד, סמס' ב', בחינת אמצע, 03.05.2004  
פרופ' מנחם גד לנדאו

זמן הבחינה: שעה ועשרים דקות.  
חומר עזר: דף A4 בלבד ובו תוכן ללא הגבלה.

**שאלה 1: (50 נק')**

נתונה ערמת מינימום בינומית ובה  $n$  איברים. בספר הלימוד מוצגות הפעולות הקלאסיות המבוצעות על ערמה בינומית. בהינתן מצביע לאיבר  $K$  כלשהו בערמה, ברצוננו להוסיף את הפעולות הבאות:

- א. הכפל את מפתח האיבר בשניים.
- ב. בטל את תת העץ שאיבר זה הוא שורשו.
- ג. בטל מהערמה הבינומית את כל המפתחות הקטנים מהמפתח באיבר  $K$ .

נתח את סיבוכיות הזמן של כל פעולה (הפעולות תינתנה מספר רב של פעמים).

**שאלה 2: (50 נק')**

נתון עץ 4-2-3 בעל גובה  $h$ .

תכנן אלגוריתם שיבנה עץ 4-2-3 בעל גובה מינמלי  $h_1$  ( $h_1 < h$ ) ומינמלי (ובו אותן הרשומות כבעץ הקלט. האם יתכן ותכשל? (הסבר).

נתח את סיבוכיות הזמן של האלגוריתם שתכננת.



בהצלחה !!



203.2310.א.1

שנה"ל תשס"ד, סמס' א', בחינת אמצע, 17.12.2003  
פרופ' מנחם גד לנדאו

זמן הבחינה: שעה ועשרים דקות.  
חומר עזר: דף A4 בלבד ובו תוכן ללא הגבלה.

**שאלה 1: (50 נק')**

נתונות  $n$  רשומות של סטודנטים.

בכל רשומה: 1. שם הסטודנט

2. ממוצע הציונים במדעי המחשב – מספר ממשי

3. ציון במבוא למדעי המחשב – מספר שלם (0-100)

- א. הראה דרך למיין את הרשומות, כאשר המפתח הוא ממוצע הציונים במדעי המחשב.
- ב. כיצד תבצע את המיון בסעיף א', אם ידוע לך שמספר הציונים השונים הוא קטן מ- $\log \log n$ .
- ג. הראה דרך למיין את הרשומות כאשר המפתח הוא הציון במדעי המחשב.
- ד. כיצד תבצע את סעיפים א' ו-ג' אם ידוע לך שזכרון המחשב לא יכול להכיל את כל הרשומות.

נתח את סיבוכיות הזמן של כל אחד מהאלגוריתם שהצעת.

**שאלה 2: (50 נק')**

נתונה ערמה בינומית ובה  $n$  רשומות.

הראה דרך לפצל את הערמה ל- $k$  ערמות בגודל  $2^i$ ,  $n/2^i = k$ , ולערמה נוספת שיתכן ותהיה קטנה מ- $2^i$  (הערה:  $n, k, i$  נתונים).

נתח את סיבוכיות הזמן של האלגוריתם שבחרת.



בהצלחה !!



203.2310.ב.1

שנה"ל תשס"ג, סמס' ב', בחינת אמצע, 9.4.2003  
פרופ' מנחם גד לנדאו

זמן הבחינה: שעה ועשרים דקות.  
חומר עזר: דף A4 בלבד ובו תוכן ללא הגבלה.

**שאלה 1: (50 נק')**

נתונות  $n$  רשומות של סטודנטים.

בכל רשומה: שם

ת.ז.

ציון במבני נתונים – 0-100 (שלם)

ציון בחוג למדעי המחשב – מספר ממשי

בנה מבנה נתונים שמבצע את הפעולות הבאות:

א. מצא את הסטודנט בעל הציון הגבוה ביותר במדעי המחשב במבנה הנתונים, והוצא אותו ממבנה הנתונים.

ב. הוסף סטודנט למבנה נתונים.

ג. בהנתן שלם  $k$ , חלק את מבנה הנתונים לשני מבנים: באחד  $k$  רשומות ובשני  $n-k$  רשומות. לאחר החלוקה ניתן לבצע על כל אחד ממבני הנתונים את כל הפעולות.

ד. קבל 2 "קבוצות של רשומות" במבנה הנתונים שבחרת (בכל אחת  $n$  איברים) ואחד אותן למבנה נתונים חדש ובו ניתן לבצע שוב את כל הפעולות.

נתח את סיבוכיות הזמן של הקמת מבנה הנתונים ואת סיבוכיות הזמן של כל אחת מהפעולות.

**שאלה 2: (50 נק')**

נתונים 2 עצי 2-3-4. בכל אחד מהעצים  $n$  רשומות. לכל רשומה מפתח.

הראה דרך בהנתן מספר שלם  $k$  ( $0 < k < n$ ) להחליף את  $k$  האיברים הקטנים בכל עץ. כלומר, להעביר את  $k$  האיברים הקטנים בעץ הראשון לעץ השני ואת  $k$  האיברים הקטנים בעץ השני לעץ הראשון. בסוף התהליך יוצרו 2 עצי 2-3-4.

הראה דרכים שונות ל- $k$  שונים.

נתח את סיבוכיות הזמן של כל דרך שבחרת.



בהצלחה !!

מבחן אמצע

1. מבנה הנתונים: ערמה בינומית מקסימלית. סיבוכיות:
- א.  $O(n)$ -הוצאה
  - ב.  $O(\log n)$ -הוספת רשומה
  - ג.  $O(\log n)$ -כמו חיסור בבסיס בינארי
  - ד.  $O(\log n)$ -איחוד עצים בינומיים

2. עבור  $k=O(n)$ :

- נפרק את העצים למערך בגודל  $n$  ע"י סיוור in-order בכל אחד מהם- $O(n)$ .
- ניקח  $k$  איברים ממערך אחד ונחליף עם  $k$  איברים מהמערך השני ע"י מיזוג- $O(n)$ .
- נבנה שוב את העצים מהמערכים- $O(n)$ .

עבור  $k=O(\log n)$ :

- ע"י הכנסה והוצאה טריוויאליים מעץ 2-3-4. סיבוכיות:  $h \cdot \log n = O(\log^2 n)$



203.2310.א.1

שנה"ל תשס"ג, סמס' א', בחינת אמצע, 4.12.2002  
פרופ' מנחם גד לנדאו

זמן הבחינה: שעה ועשרים דקות.  
חומר עזר: דף A4 בלבד ובו תוכן ללא הגבלה.

**שאלה 1: (50 נק')**

נתונות  $n$  רשומות, לכל רשומה מפתח.

תחום המפתחות הוא  $m$ .

מספר המפתחות השונים בפועל הוא  $p$ .  
(יתכנו מפתחות כפולים).

1.1. כיצד תמייין את הרשומות כאשר ידוע  $m = n^k$  (מספרים שלמים). התיחס ל- $k$  שונים. ( $p$  לא ידוע).

1.2. כיצד תמייין את הרשומות כאשר ידוע מראש  $p \leq \log n$ , ו- $m$  מרחב המספרים הממשיים.

1.3. כיצד תמייין את הרשומות כאשר ידוע מראש  $p = n$  ו- $m$  מרחב המספרים הממשיים.

נתח את סיבוכיות הזמן של האלגוריתם שבחרת בכל סעיף.

**שאלה 2: (50 נק')**

נתונים 2 עצי 2-3-4  
בכל אחד  $O(n)$  מפתחות.

הראה אלגוריתם שבונה עץ 2-3-4 חדש ובו כל המפתחות מ-2 העצים.

נתח את סיבוכיות הזמן של האלגוריתם שבחרת.



בהצלחה !!



מבחנים של גדי לבדאו, סמסטר א' תשס"ג

מבחן אמצע

- (1) מין  $n$  רשומות כאשר תחום המספרים הממוינים הוא  $m$  ומס' המפתחות השונים ידוע כ- $p$ .
- (א)  $m = O(n^k)$ ,  $p$  לא ידוע. התייחס לגדלי  $k$  שונים.
- (ב)  $m, p = O(\log n)$  כל המספרים הממשיים.
- (ג)  $m, p = O(n)$  כל המספרים הממשיים.
- (2) כתוב אלגוריתם שמאחד שני עצי 4-3-2 (בגודל  $m$  ו- $n$ ) לעץ 4-3-2 יחיד, כאשר  $m = O(n)$ .

פתרון:

(1)

- (א) הפתרון: עבור  $k = O(\log n)$  (כלומר שווה או קטן מ- $\log n$ ), נשתמש במיון בסיס שירוך בסיבוכיות  $O(k \cdot n)$ . עבור  $k > O(\log n)$ , נשתמש במיון השוואה רגיל כגון merge-sort שרץ ב- $O(n \log n)$ .
- (ב) ראה עמ' 32, שאלה 1.
- (ג) נשתמש במיון השוואה רגיל כגון merge-sort שרץ ב- $O(n \log n)$ .

- (2) האלגוריתם יתבצע בכמה שלבים. א. נסרוק כל אחד מהעצים inorder לתוך שני מערכים. סיבוכיות:  $O(n)$ . ב. נריץ את הפונקציה merge ובאחד את שניהם למערך יחיד. סיבוכיות:  $O(n)$ . ג. נעביר את המערך חזרה לעץ 4-3-2 בדומה לפתרון של עמ' 10, שאלה 1, חלק ג'. כל איבר יושב בצומת משל עצמו עם שני בנים, כאשר את השאריות (בניגוד לפתרון הנ"ל) נכניס לצמתים מעליהם כצמתים של 2 איברים. כך נבטיח שכל העלים באותו גובה.



203.2310.ב.1

שנה"ל תשס"ב, סמס' ב', בחינת אמצע, 20.5.2002  
פרופ' מנחם גד לנדאו

זמן הבחינה: שעה ועשרים דקות.  
חומר עזר: דף A4 בלבד ובו תוכן ללא הגבלה.

**שאלה 1: (50 נק')**

משרד החינוך בחיפה מבקש לשלוח משלחת לחו"ל של תלמידים מבת-הספר  
התיכוניים בעיר.

בחיפה  $n$  תלמידים ו- $m$  בתי-ספר. בכל בית-ספר  $p$  תלמידים.  
רשומת תלמידים מכילה:

- שם.
- ת.ז.
- ממוצע ציונים (מספר ממשי).

במשלחת  $k$  תלמידים שייבחרו לפי 2 קריטריונים:

א. התלמידים המצטיינים בחיפה.

ב. מכל בית-ספר לפחות  $L$  תלמידים (אנו מניחים ש-  $k > L * m$  ו-  $L < p$ )

כתוב אלגוריתם שבוחר את חברי המשלחת.  
נתח את סיבוכיות הזמן של האלגוריתם.

**שאלה 2: (50 נק')**

נתונת  $n$  רשומות של סטודנטים.  
רשומה מכילה:

- א. שם.
- ב. ת.ז.
- ג. קוד אישי של הסטודנט (מספר שלם בין  $0$  ל- $n^2$ )

הראה אלגוריתם שבונה עץ 2-3-4 של רשומות סטודנטים כאשר המפתח הוא הקוד האישי  
של הסטודנטים.

חשב את סיבוכיות הזמן של האלגוריתם שבחרת.



בהצלחה !!

203.2310.א.1

שנה"ל תשס"ב, סמס' א', בחינת אמצע, 9.1.2002  
פרופ' מנחם גד לנדאו

זמן הבחינה: שעה ועשרים דקות.  
חומר עזר: דף A4 בלבד ובו תוכן ללא הגבלה.

**שאלה 1: (30 נק')**

בנה עץ 2-3-4 לנתונים הבאים (התחל מעץ ריק):

- |    |         |
|----|---------|
| 18 | 1. הכנס |
| 25 | 2. הכנס |
| 45 | 3. הכנס |
| 30 | 4. הכנס |
| 50 | 5. הכנס |
| 35 | 6. הכנס |
| 18 | 7. בטל  |
| 25 | 8. בטל  |
| 45 | 9. בטל  |
| 30 | 10. בטל |

עליך להראות 10 עצים שונים, עץ לכל שלב.

**שאלה 2: (40 נק')**

נתונה ערימה ובה  $n$  איברים.  
תאר אלגוריתם שמקבל  $k$  איברים חדשים ויוצר ערימה ובה האיברים הישנים והחדשים גם יחד. סה"כ  $n+k$  איברים.  
נתח את סיבוכיות הזמן של האלגוריתם שתכנת.

הנחיות: א. עליך לבחור בין ערימה בינומית וערימה בינארית.  
ב. התיחס לגדלים שונים של  $k$ .



### שאלה 3: (30 נק')

- נתונות  $n$  רשומות ממוינות של סטודנטים במערך. בכל רשומה:
- א. שם הסטודנט.
  - ב. מספר זהות.
  - ג. ציון בקורס מבני נתונים (0-100).
  - ד. ממוצע כל הציונים של הסטודנט (מספר ממשי).

#### סעיף 1 (10 נק')

- א. הנח שהסטודנטים ממוינים לפי ממוצע הציונים.
- ב. כתוב אלגוריתם שמקבל  $k < n$  סטודנטים נוספים ומייצר מערך חדש ובו הסטודנטים הישנים והחדשים ממוינים לפי ממוצע הציונים.

#### סעיף 2 (10 נק')

- א. הנח שהסטודנטים ממוינים לפי ציון בקורס מבני נתונים.
- ב. כתוב אלגוריתם שמקבל  $k < n$  סטודנטים נוספים ומייצר מערך חדש ובו הסטודנטים הישנים והחדשים ממוינים לפי הציון בקורס מבני נתונים.

#### סעיף 3 (10 נק')

- א. הנח שהסטודנטים ממוינים לפי תעודות זהות.
- ב. כתוב אלגוריתם שמדפיס את כל הסטודנטים שהציון שלהם בקורס מבני נתונים גבוה ב-10 נקודות מהציון הממוצע שלהם.

נתח את סיבוכיות הזמן של כל אחד מהסעיפים בנפרד, כפונקציה של  $n$  ו- $k$ .



בהצלחה !!



2. נבחר ערימה בינומית. אם  $k \ll n$  נבנים את האיברים אחד אחד, בסיבוכיות  $O(k \log n)$ . אם  $k \geq O(n)$  נבנה ערימה בגודל  $k$  ונאחד את שתי הערימות, בסיבוכיות  $O(k + \log(n+k))$ .
3. א. נמיינ את  $k$  האיברים ב- $k \log k$  ונאחד את המערכים ב-merge, סיבוכיות:  $O((n+k) + k \log k) = O(n + k \log k)$ . ב. נמיינ במיון לינארי (מיון מניה) ואז נבצע merge, סיבוכיות:  $O(n)$ . ג. מעבר על כל הרשומות ובדיקה עבור כל אחת בנפרד.



שנה"ל תשס"א, סמס' ב', מועד אמצע, 15.5.01  
פרופ' מנחם גד לנדאו

זמן הבחינה: שעה ועשרים דקות  
חומר עזר: דף A4 אחד בלבד ובו תוכן ללא הגבלה.

**שאלה 1: (35 נק')**

ברצוננו לבצע פעולות נוספות (בנוסף למצא, הוסף, בטל) בעץ 2-3-4. פעולות אלו יתבצעו פעמים רבות.

- בהנתן 2 מפתחות  $p$  ו- $q$  ( $p < q$ ) הדפס את כל הרשומות בעץ שהמפתח שלהן גדול מ- $p$  וקטן מ- $q$ .
- מצא את מספר הרשומות בעץ.
- תאר אלגוריתמים שמבצעים את הפעולות הנ"ל ונתח את סיבוכיות הזמן שלהם.

**שאלה 2: (35 נק')**

נתונות  $n$  רשומות של סטודנטים בחוג למדעי המחשב. בכל רשומה:  
א. מספר סטודנט.

- ציון בקורס "מבני נתונים" (0-100).
- ציון פסיכומטרי (0-800).
- ציון ממוצע בחוג (מספר ממשי).

ברצוננו לבדוק האם המצטיינים במבחן הפסיכומטרי מצליחים בקורס "מבני נתונים".  
נגדיר את קבוצת "המצטיינים במבחן הפסיכומטרי" כ- $k$  התלמידים בעלי הציון הפסיכומטרי הגבוה בחוג ( $1000 < k < n$ ).  
הדפס את קבוצת המצטיינים פעם אחת לפי ציוניהם בקורס "מבני נתונים" ופעם שניה לפי ממוצע ציונים בחוג, בשני המקרים בסדר יורד.  
נתח את סיבוכיות הזמן של האלגוריתמים שתיארת.

**שאלה 3: (30 נק')**

- נתונות 2 ערימות:  $A$  ובה  $n$  איברים ו- $B$  ובה  $m$  איברים.  
בנה ערימה חדשה  $C$  הממזגת את הערימות  $A$  ו- $B$ .  
א. תאר אלגוריתם שבונה את  $C$  כאשר  $n=m$ .  
ב. תאר אלגוריתם שבונה את  $C$  כאשר  $n=O(\log m)$ .

הנך רשאי להניח שהמערכים  $A$  ו- $B$  הם בגודל  $m+n$  כל אחד (למרות שמספר האיברים ב- $A$  הוא  $n$  וב- $B$  הוא  $m$ ).

נתח את סיבוכיות הזמן של כל אחד מהאלגוריתמים שתכנתת.



בהצלחה !!

מבני נתונים  
בחינת אמצע

203.2310.א.1

שנה"ל תשס"א, סמס' א', מועד א', 25.12.99  
פרופ' מנחם גד לנדאו

זמן הבחינה: שעה ועשרים דקות  
חומר עזר: דף A4 אחד בלבד ובו תוכן ללא הגבלה.

**שאלה 1: (30 נק')**

בנה עץ 2-3-4 לנתונים הבאים (התחל מעץ ריק):

1	1. הכנס
10	2. הכנס
20	3. הכנס
15	4. הכנס
25	5. הכנס
16	6. הכנס
1	7. בטל
10	8. בטל
20	9. בטל
15	10. בטל

עליך להראות 10 עצים שונים, עץ לכל שלב.

**שאלה 2: (40 נק')**

נתונות  $n$  ( $n > 10,000$ ) רשומות של סטודנטים (הרשומות נתונות כרשימה מקושרת). בכל רשומה:  
א. מספר סטודנט.  
ב. ציון בקורס מבני נתונים (0-100).  
ג. ממוצע ציונים בחוג למדעי המחשב (מספר ממש).

סעיף 1 (12 נקודות):  
כתוב אלגוריתם שבהנתן  $k$  (מספר שלם) מוצא את  $k$  הסטודנטים המצטיינים בקורס מבני נתונים.

סעיף 2 (12 נקודות):  
כתוב אלגוריתם שבהנתן  $k$  (מספר שלם) מוצא את  $k$  הסטודנטים המצטיינים בחוג למדעי המחשב.

סעיף 3 (16 נקודות):  
כתוב אלגוריתם שמדפיס את כל הסטודנטים שממוצע ציוניהם גדול מ-70 וקטן מ-90.

חשב את סיבוכיות הזמן של כל אחד מהאלגוריתמים.

**שאלה 3: (30 נק')**

נתונה ערמה מאופסנת במערך ובה  $n$  איברים. הראה כיצד אתה מטפל בפעולות הבאות:  
א. הוסף 2 איברים.  
ב. הוסף  $m$  ( $m > n$ ) איברים.  
ג. בהנתן מצביע לאיבר, שנה את ערכו ושמור על תכונות הערמה.  
ד. הפוך את הערמה ממינימום למקסימום ולהפך.



מבני נתונים  
בחינת אמצע

203.2310.א.1

203.2310.א.2

שנה"ל תש"ס, סמס' א', מועד א', 17.12.99  
פרופ' מנחם גד לנדאו

זמן הבחינה: שעה וחצי  
חומר עזר: דף A4 אחד בלבד ובו תוכן ללא הגבלה.

שאלה 1: (25 נק')

כתוב אלגוריתם המקבל כקלט ערמה ובה  $n$  איברים המאוכסנים במערך A. האלגוריתם מטפל בפעולות הבאות:

**א. פעולת שינוי.**

האלגוריתם מקבל אינדקס  $p$ ,  $p < n$  וערך  $b$ . האלגוריתם משנה ערכו של האיבר במקום  $p$  ב- $A$  ל- $b$  ולאחר מכן מחזיר למערך את תכונות הערימה. כל זאת ב- $O(\log n)$  זמן.

**ב. פעולת ביטול.**

האלגוריתם מקבל אינדקס  $p$ ,  $p < n$  ומבטל בערמה את הערך במקום  $p$  במערך A. ולאחר מכן מחזיר למערך את תכונות הערימה. כל זאת ב- $O(\log n)$  זמן.

**ג. פעולת החלפת סדר.**

האלגוריתם מחליף את הסדר בערמה. כלומר אם בראש היה המינימום הופך את הערמה לערמה ובה בראש המקסימום ולהפך. כל זאת ב- $O(n)$  זמן.

שאלה 2: (25 נק')

בחברת היי-טק  $n$  עובדים.

רשומת עובד מכילה:

1. שם ושם משפחה.

2. ת.ז.

3. שכר.

4. רשומה מקושרת של המנהלים הישירים שלו. (לעובד ייתכנו יותר ממנהל אחד).

בחברה מונה נשיא חדש המבקש לפגוש את כל העובדים. הוא בקש ממזכירתו לקבוע לו את הפגישות תחת שני תנאים:

- הוא יפגוש כל עובד בנפרד.
- הוא יפגוש עובד רק לאחר שפגש את כל המנהלים שלו.

א. כתוב אלגוריתם שבודק שאין שני עובדים המנהלים אחד את השני ולו גם בדרך עקיפה (מעגל ניהול). נתח את סיבוכיות הזמן של האלגוריתם.

ב. כתוב אלגוריתם היוצר סדר פגישות חוקי. חשב את סיבוכיות הזמן של האלגוריתם.

ג. כתוב אלגוריתם שמקבל כקלט שם של עובד ומוצא את השכר הכולל של העובד והכפופים לו. כלומר העובד הכפופים הישירים שלו, הכפופים להם וכו'.





### שאלה 3 : (25 נק')

תאר אלגוריתם המטפל במסד נתונים ובו מספרים שלמים. האלגוריתם מבצע את הפעולות הבאות בקלט.

- א. הוסף איבר למסד נתונים.
- ב. מצא איבר במסד נתונים.
- ג. בטל איבר במסד נתונים.
- ד. בהינתן 2 מספרים  $a$  ו- $b$ , מצא את סכום כל האיברים במסד הנתונים הקטנים מ- $b$  וגם גדולים מ- $a$ .
- ה. מצא את האיבר המקסימלי במסד נתונים.
- ו. מצא את ממוצע האיברים במסד נתונים.

חשב את סיבוכיות הזמן של כל פעולה בהנחה שבזמן הביצוע היו במסד הנתונים  $n$  איברים.

### שאלה 4א' : (12 נק')

בנה עץ 2-3-4 לנתונים הבאים (התחל מעץ ריק):

- |     |         |
|-----|---------|
| 100 | 1. הכנס |
| 200 | 2. הכנס |
| 150 | 3. הכנס |
| 125 | 4. הכנס |
| 110 | 5. הכנס |
| 60  | 6. הכנס |
| 200 | 7. בטל  |
| 110 | 8. בטל  |

עליך להראות 8 עצים שונים, עץ לכל שלב.

### שאלה 4ב' : (13 נק')

בנה עץ אדום - שחור לנתונים הבאים (התחל מעץ ריק):

- |     |         |
|-----|---------|
| 100 | 1. הכנס |
| 200 | 2. הכנס |
| 150 | 3. הכנס |
| 125 | 4. הכנס |
| 110 | 5. הכנס |
| 60  | 6. הכנס |
| 200 | 7. בטל  |
| 110 | 8. בטל  |

עליך להראות 8 עצים שונים, עץ לכל שלב.



בהצלחה !!

### מבני נתונים - תרגיל בית מס' 3: עצי חיפוש (בינאריים ו-B-Tree)

#### שאלה 1

נתון מערך ממוין בסדר עולה בגודל  $n$ . כתוב אלגוריתם שמארגן את איברי המערך בעץ חיפוש בינארי מאוזן במימוש דינמי (בכל צומת מצביע לבן שמאלי ולבן ימני).

#### שאלה 2

נתונות  $n$  נקודות במישור. הצע מבנה נתונים לאחסון הנקודות, שיתמוך בפעולות הבאות:

- $Insert(x, y)$  – בזמן  $O(\lg n)$ .
  - $Delete(x, y)$  – בזמן  $O(\lg n)$ .
  - $Print Line(m)$  – הדפס את כל הנקודות  $(x_i, y_i)$ , המקיימות:  $x_i + y_i = m$ .  
(הערה: כל הנקודות הניל נמצאות על הישר  $x + y = m$ .)
- סיבוכיות הזמן:  $O(k + \lg n)$ , כאשר  $k$  הוא מספר נקודות הפלט.
- חשבו כיצד תתבצע כל פעולה.

#### שאלה 3

נתונים  $n$  איברים. עליך למצוא מהו האיבר ה- $i$ , כאשר ניתן לבצע שאילתא זו הרבה פעמים, על  $i$ -ים שונים.

האיבר ה- $i$  הוא האיבר שיהיה במיקום ה- $i$  ברשימה ממוינת של האיברים.

השתמש בעץ חיפוש בינארי. מותר להוסיף שדה לכל צומת.

- תאר את העץ שתכנתת.
- תאר כיצד תבצע הוספה וביטול.
- הסבר כיצד תמצא את האיבר ה- $i$ , וכתוב פסיאודו-קוד.

מה סיבוכיות.

#### שאלה 4

ממש עץ חיפוש בינארי.



הנח כי קיים קובץ בתיקיית הקוד שלך, שעל פיו נבנה העץ. כל שורה בקובץ מכילה קוד-פקודה וערך  $x$  (אם צריך).  
המרת הקוד לפקודה היא עפיי הטבלה הבאה:

1. Find ( $x$ )
2. Insert ( $x$ )
3. Successor ( $x$ )
4. Predecessor ( $x$ )
5. Delete ( $x$ )
6. min ()
7. max ()
8. print\_tree ()
9. backwards () – הדפסת כל המפתחות שבעץ בסדר יורד

עליך להדפיס הודעות מתאימות למסך.

הערה: פקודה 8 תדפיס את העץ לפי תרמורת, כלומר כל רמה בעץ תהיה בשורה חדשה, ובין הצמתים יחזו פסיקים.

### שאלה 5

נתח סיבוכיות.

הסבר כיצד ביצעת (או התכוונת לבצע...) את הדפסת העץ

להגיש פתרונות, דיסקט עם קובץ C/C++, והדפסה של התכנית, עד יום ב' 21.1 שעה 15:00.

בהצלחה, מירית.



### מבני נתונים - תרגיל בית מס' 3: פתרונות

#### שאלה 1

שורש העץ יהיה האיבר האמצעי במערך. קוראים רקורסיבית לבנות תת העץ השמאלי מתוך החצי הראשון של המערך, ולבנות תת העץ הימני מתוך החצי השני של המערך. במהלך האלגוריתם מחלקים את המערך שוב ושוב עד שמגיעים לחלקים בגודל 1.  
הסיבוכיות –  $O(n)$ .

#### שאלה 2

נחזיק את הנקודות בעץ חיפוש בינארי מאוזן – עץ אדום שחור. העץ יהיה מאורגן לפי  $m$ . בכל צומת יש לאחסן את כל הנקודות בעלות אותו  $m$ , ולכן כל צומת יהיה עץ חיפוש המאורגן לפי  $x$ .  
בהוספה ובביטול: ראשית נחפש את הצומת המבוקש עפ"י  $m=x+y$ . אח"כ נחפש בתוך העץ הפנימי לפי  $x$ . מכיון שמדובר בשני מסלולים בשני עצים מאוזנים, הסיבוכיות היא עדיין  $O(\lg n)$ .  
הדפסת הקו  $m$ : מחפשים את הצומת עם ה-  $m$  המבוקש, ואחרי כן מדפיסים את כל העץ הפנימי שבאותו צומת, ע"י סריקת  $\text{InOrder}$ . הסיבוכיות היא  $O(\lg n + k)$ .

#### שאלה 3

(לידיעתכם: אם עוד לא גיליתם, אז הפתרון המלא נמצא בפרק 15 בספר. כדאי לקרוא, יש שם עוד דברים שימושיים.)  
נחזיק את האיברים בעץ אדום שחור ( $\leq$  עץ חיפוש בינארי מאוזן), ולכל צומת נסיף את השדה  $\text{size}$ . נציב בשדה את גודל תת העץ המושרש בצומת זה (מספר הצאצאים כולל עצמו). ברור כי  $\text{root} \rightarrow \text{size} = n$ .  
הצבת הערך בשדה  $\text{size}$  של כל הצמתים בעץ קיים נעשית ע"י סריקת  $\text{PostOrder}$ .

#### הוספת איבר:

נסיף 1 לשדה  $\text{size}$  של כל צומת במסלול מהשורש ועד למקום בו מוסיפים את האיבר. לאיבר החדש ניתן ערך 1 בשדה זה. לאחר מכן, כשמתקנים את העץ, בכל חטציה יש להחליף את השדות  $\text{Size}$  של הצמתים שזזו. כל השינויים הנ"ל לא ייקחו יותר מ-  $O(\lg n)$  ולכן סיבוכיות החוספה נשארת  $O(\lg n)$ .

#### ביטול איבר:

אם מחליפים את  $x$  בעוקב של  $y$ , מחליפים את הרשומות, אך משאירים את השדה  $\text{size}$  המקורי של  $x$ . עוברים על המסלול מהשורש ועד הצומת שמחקנו פיזית ( $x$  - אם הוא עלה,  $y$  - אם החלפנו בעוקב) ומורידים 1 מהשדה  $\text{size}$  של כל צומת במסלול. לאחר מכן, בזמן תיקון העץ - משנים את  $\text{size}$  של צמתים שעברו חטציה. כל השינויים הנ"ל לא ייקחו יותר מ-  $O(\lg n)$  ולכן סיבוכיות הביטול נשארת  $O(\lg n)$ .

#### מציאת האיבר ה- $i$ :

מתחילים מהשורש. מיקומו של השורש שווה לגודל תת העץ השמאלי שלו ועוד 1. אם זה בדיוק ה-  $i$  המבוקש, סיימנו.



אחרת, אם  $i >$  מיקומו של השורש, סימן שהאיבר המבוקש נמצא בתת העץ השמאלי של השורש, לכן עוברים לבן השמאלי ומבצעים את אותה בדיקה.

אם  $i <$  מיקומו של השורש, סימן שהאיבר המבוקש נמצא בתת העץ הימני של השורש, לכן עוברים לבן הימני, אבל ממחיתים מ- $i$  את מיקומו של השורש. (כיון שזה יהיה מיקום האיבר המבוקש בתת העץ הימני בלבד). מספר הצמתים שנעבר דרכם ובדוק את מיקומם הוא מכסימום כגובה העץ, ולכן הסיבוכיות היא  $O(\lg n)$ .

להלן הקוד, שימו לב שזוהי פונקציה רקורסיבית.

```
find_i (node, i)
{
    node_pos = node->left->size + 1
    if i = node_pos
        return node
    if i < node_pos
        find_i (node -> left, i)
    if i > node_pos
        find_i (node -> right, i - node_pos)
}
```

### שאלה 5

הערה: הדפסת העץ נעשית בשיטה דומה ל- BFS על גרף.

משתמשים בתור. מכניסים את השורש לתור. מכניסים אחריו סימן מיוחד לסוף רמה (למשל סולמית).

מבצעים את הפעולות הנייל בלולאה כל עוד התור אינו ריק:

שולפים איבר מהתור.

אם זו סולמית: מדפיסים שורה חדשה. אם התור אינו ריק – מכניסים לסוף סולמית (כי סיימנו להכניס לתור את כל

הרמה הבאה בעץ). אם התור ריק – העץ כולו מודפס. הלולאה תסתיים.

אם זה איבר: מדפיסים אותו, ומכניסים לתור את הבנים שלו.

הלולאה תעבור על כל הצמתים בעץ. כל צומת ייכנס לתור רק פעם אחת. לכן הסיבוכיות היא כמספר הצמתים –  $O(n)$ .



מבני נתונים

תרגיל

1.

עץ כתומס (Threaded binary tree) הוא עץ בינארי שבו מצביע Right של קדקוד שיהיה לו בן ימני מראה על איבר הבא בסדר Inorder. בכל קדקוד קיים שדה Thread המגדיר:

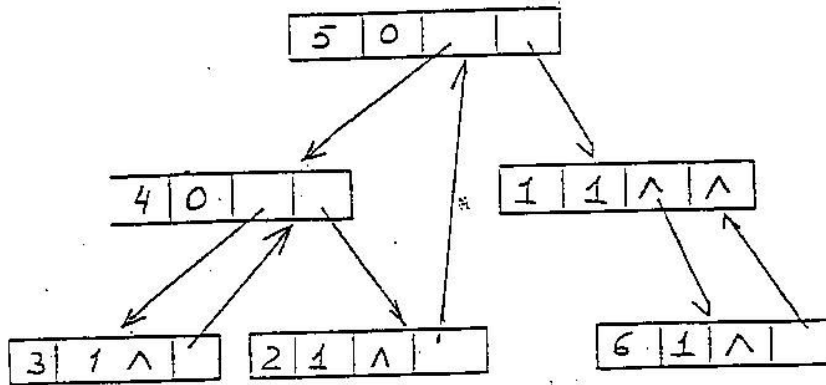
Thread = 0 אם לקדקוד יש בן ימני

Thread = 1 אם לקדקוד אין בן ימני

לספר אם Thread = 0 אז מצביע Right מראה על בן הימני ואחרת הוא מראה על איבר הבא בקדר Inorder

Val Thread Left Right

דוגמא:



איבר אחרון בסדר Inorder מצביע Right שווה ל-NULL (דוגמה זה קדקוד עם ערך -). כתוב פונקציה ב C++ המקבלת כפרמטר מצביע על שורש של עץ כתומס ומחזירה את איברי העץ בסדר Inorder. הפונקציה צריכה להשתמש בתוטים. אין להשתמש ברקורסיה או מחסנית או בצבע אב. זמן ריצה של אלגוריתם הוא  $O(n)$  (אשר n בספר קדקודים בסך).

4. נתונה רשימת מקושרת הדי-כווניה באורך n שהיא מבונית לפי מספרה k. הצע במנה נתונים זיכשתמש ב-  $O(m)$  מקום נוסף פרט לרשימה (  $m \leq n$  ) הכאפשר גישה לאיבר עם המפתח k ברשימה מקושרת בזמן  $O(n/m + \log m)$ . הבה: הנה שמבנה כבר באותחל ( זמן הבניה שלו לא נכנס לזמן החימוש ) ותוך בפעולות החימוש לא מתבצעות פעולות אחרות על רשימה מקושרת.

גורמים לחיזוק קטעים פנימים ימים על הישר. כל קטע מוצג ע"י קצותיו [a,b] שהם מספרים מסוג float. על המבנה הנתונים מוגדרות שתי פעולות: insert(a,b) - מכניסה את הקטע [a,b] כמבנה. left(y) - מחזירה נקודה הבינומלית x של קטע y- אם y נמצא מ. אם y לא נמצא באף קטע מחזירה NULL. האר מבנה נתונים לבימוש הפעולות החיל כך שכל פעולה תהיה ב-  $O(\log n)$  כאשר n הוא מספר קטעים במבנה. ( תאר גם ק את הפעולות )

הנשה: בזוגות עד ל- 12.12.96



מבני נתונים  
פתרון

1.

```

inorder ( node * T.
{
while( T!= NULL)
{
while(T->Left != NULL)
T = T-> Left;

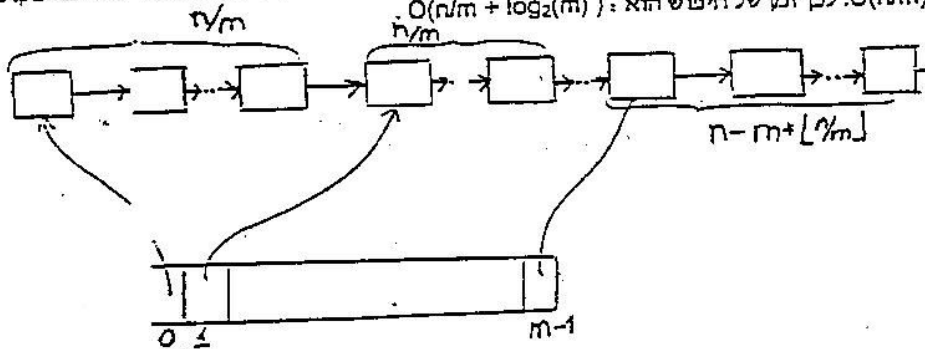
cout << T->Val;

while( T->Thread != NULL)
{ T = T-> Right; cout << T->Val; }

T = T-> Right;
}
}

```

2. מחלקים רשימה מקושרת ל- m חלקים כך שכל אחד מכיל  $\lfloor n/m \rfloor$  איברים (תוך מאתחון - הוא מכיל  $\lfloor n/m \rfloor - m$ ). מבזירים מערך בודל m שמכיל מבצעים על תחילת כל חלק של רשימה מקושרת כדי לבצע חיפוש קודם מחפשים עיני חיפוש בינארי במערך - זמן החיפוש הוא  $O(\log_2(m))$ . אם לא מוצאים את הערך בין אברי המערך אז מוצאים את החלק של רשימה מקושרת שהערך נמצא בו ואז מבצעים חיפוש ליניארי ברשימה מקושרת שזה לוקח  $O(n/m)$ . לכן זמן של חיפוש הוא:  $O(n/m + \log_2(m))$ .



3. מבנה הנתונים הוא שרשרת של 2-3 קטעים נשמור זוגות של מספרים וערך הראשון בוג (הערך המינימלי) הוא המפתח (x,y). הוא יזמיע בתור מפתח בקודקודים המינימליים).

insert(x,y)

- עישים חיפוש כמו בעץ 2-3.
  - אם  $k_1 < x, y$  או ממשיכים חיפוש בתת עץ הראשון.
  - אם  $x < k_1 < y$  אז קטע  $[x,y]$  לא יהיה זר לקטעים אחרים במבנה - ממשיכים חיפוש.
  - אם  $k_1 < x, y < k_2$  (כאשר יש שני בנים) או  $k < x, y < k_2$  אז ממשיכים בתת עץ השני.
  - אם  $x < k_2 < y$  אז קטע  $[x,y]$  לא יהיה זר לקטעים אחרים במבנה - ממשיכים חיפוש.
  - אם  $k_2 < x, y$  ממשיכים בתת עץ השלישי.
  - אם מגיעים לעלה והוא מכיל קטע  $[a,b]$  שזר ל-  $[x,y]$  אז מייצרים קדקוד חדש עם  $[x,y]$  וכינים אותו כאבא של  $[a,b]$  - מכך נבנו באלגוריתם עבור עץ 2-3.
  - אם מגיעים לעלה שמכיל קטע  $[a,b]$  שאינו זר לקטע  $[x,y]$  אז לא עושים כלום.
- Left(y)
- מבצעים חיפוש של ע כמו בעץ 2-3. כאשר מגיעים לעלה בתקום האם ע נמצא תוך קטע שהי בעלה אם כן מחזירים בעל שמאלי של הקטע. אחרת מחזירים NULL.



- נתון גרף קשיר לא מכוון. נתונים הצמתים  $s, t$  וצלע  $(u, v)$ . מצא האם הקשת נמצאת על איזשהו מסלול קצר ביותר מ- $s$  ל- $t$ .
- נתון גרף קשיר ולא מכוון. בנה מבנה נתונים שיחמוך בשאלתה הבאה: האם צומת  $u$  היא נקודת הפרדה? חשב את סיבוכיות האתחול.
- בגדיר גרף מכוון כ-"חד-קשיר" אם לכל זוג צמתים  $u, v$  קיים מסלול מ- $u$  ל- $v$  או מ- $v$  ל- $u$ . כתוב אלגוריתם שבדוק האם  $G$  הוא חד-קשיר.
- הכנו מבנה נתונים שתומך בשאלות הכנסה, חיפוש, הוצאה ובנוסף תומך בשאלתה: מהו העוקב ה- $k$  של צומת  $x$ ? (כלומר, אם נלך מ- $x, k$  צעדים קדימה, לאיזו צומת נגיע.)
- בגרף כלשהו, רוצים למצוא את המסלול הנוני הקצר ביותר מצומת  $S$  לכל צומת אחרת.
- נתון עץ בינארי עם משקלות על הקשתות. מהו המסלול הכבד ביותר בעץ?
- הכנו מבנה נתונים המאפשר חיפוש, הכנסה, הוצאה, ובנוסף: מציאת עוקב וקודם ב- $O(1)$ .

#### פתרונות

- ע"י הרצת  $BFS(s)$  נברר את המרחק בין  $s$  ל- $t$  (האורך הרצוי) ובין  $s$  ל- $u$  ול- $v$ . הרצת  $BFS(t)$  גם תיתן את המרחקים מ- $t$  ל- $u, v$ . אז נבדוק האם  $d(s, t)$  שווה ל-  $d(s, u)+d(t, v)+1$  או  $d(s, t)$  שווה ל-  $d(t, u)+d(s, v)+1$ . אם אחד מהם מתקיים, הקשת נמצאת על מסלול קצר ביותר; אחרת לא. סיבוכיות:  $O(V+E)$ .
- הסבר: אחרי הרצת  $DFS$ , מתקיים: א. אם  $u$  השורש ויש לה יותר מבן אחד, היא נק' הפרדה. אם  $u$  לא השורש, היא אינה נק' הפרדה אם לכל בניה יש לפחות קשת אחורה אחת שיוצאת מתת-העץ שלהם אל מעל  $u$ . אתחול: א. נריץ  $DFS$  על הגרף, לכל קודקוד נשמור שדה שיחזיק את הקשת אחורה הכי גבוהה ( $d$  הכי קטן) שיוצאת ממנה. ב. נרוץ  $postorder$  ונחזיק לכל צימת את המינימום שבין ה- $low$  של בניה. סיבוכיות:  $O(V+E)$ . ביצוע השאלתה: בדיקה האם  $low(sons) \geq d(u)$  לכל בניה; אם כן,  $d$  אינה נק' הפרדה. אם קיים בן שלא מקיים תנאי זה,  $d$  היא נק' הפרדה. סיבוכיות כמספר הבנים של  $u$ .
- [אם  $G$  מכיל מעגלים, בנה את  $G_{SCC}$  ונקבל גרף ללא מעגלים]. נבצע על  $G$  (או על  $G_{SCC}$ ) מיון טופולוגי. בעבור על רשימת הצמתים ונבדוק האם קיימת צומת בין כל שני צמתים עוקבים. אם כן, הגרף חד-קשיר. אם חסרה קשת אחת,  $G$  אינו חד-קשיר. סיבוכיות:  $O(V+E)$ .
- נשנה עץ א"ש כך שיתמוך במציאת האינדקס של איבר. השאלות הראשונות יתבצעו כרגיל; מציאת העוקב תתבצע כך: א. נמצא את  $x$  (וגם את האינדקס  $i$  שלו). ב. נחפש בעץ את האיבר ה- $i+k$ . סיבוכיות:  $\log n$ .
- נצור גרף  $G'$  שבו לכל צומת  $u$  קיים עותק  $u'$ , וכל מסלול מ- $u$  ל- $v$  יקבל שני ביטויים, ממקור להעתק ומהעתק למקור. עתה נריץ  $BFS(s)$  כאשר רק המסלולים הזוגיים יגיעו לצומת מקור.
- סכימה  $postorder$  שתשמור לכל צומת  $u$  (א) את המסלול המקסימלי מ- $u$  לעלה כלשהו בתת-העץ, וכן (ב) את המסלול המקסימלי בין שני עלים שבתת העץ (מבלי לעבור ב- $u$ ). עבור (ב) נבחר את המקסימום מבין השלושה: (ב) של בן שמאלי, (ב) של ימני, או סכום ה- $(א)$  של שני הבנים. בשורש נמצא את המסלול הכבד ביותר.
- עץ א"ש, בו נסיף לכל צומת מצביעים לעוקב וקודם (על עץ קיים,  $O(n)$  ע"י ריצה  $inorder$ ). מעתה בהכנסה, נחזיק שני מצביעים זמניים שמצביעים למינימום ולמקסימום, כלומר טווח החיפוש. בכל פעם שנרד בעץ הם יתעדכנו בהתאם (אם פנינו ימינה, תחילת הטווח הופך לצומת שירדנו ממנה; אם שמאלה, סוף הטווח). זהו למעשה שקול לחיפוש בינארי על רשימה מקושרת ממוינת (רשימת העוקבים). כשנמצא את המיקום הרצוי, נישאר עם העוקב והקודם של הצומת החדשה במחיקה, בעדכן את של הצומת שנמחקה להצביע על העוקב, ולהפך.

