חדו"א 1 – אוסף תרגילים ופתרונות

איסוף ועריכה: עילאי הנדין

<u>תוכן עניינים</u>

<u>תשס"ו</u>

<u>תשס"ה</u>

תשס"ד

תרגיל מס' 1

ההגשה בזוגות עד : 17/11/05 17:00

פתרו את המשוואות הבאות:

1. $3\cdot 2^{x}+2^{x+3}-5\cdot 2^{x-1}=17$
*2. $16^{x}+4^{x+1}-2^{2x}-4=0$
3. $(x-1)^{x^2-x-2}=(x-1)^4$
4. $(\frac{x+1}{x})^{x^2-x}=1$
5. $(\frac{x}{3x-1})^{x^2-2x}=(\frac{3x-1}{x})^{-3x}$
6. $\log_9(x+20)\cdot\log_x 3=1$
7. נתון $\log_b a=\log_a b$ $(a>0\neq 1, b>0\neq 1)$ הוכח שמתקיים $a=b$ או $a=\frac{1}{b}$
8. $x^{\log_4 2x}=4^{2-3\log_4 x}$
9. $|x|=x+1$

פתרו את אי השוויונים הבאים :

1. $(x+1)^2<x+13$
2. $\frac{(x-2)(x-4)}{x(x-1)}\le 0$ (רמז: ניתן להכפיל את אי- השוויון במכנה בריבוע ולפתור את אי- השוויון שהוא מכפלת ביטויים : ($ab\le 0 \Leftarrow \frac{a}{b}\le 0 /\cdot b^2$)
3. $\frac{(x+1)}{(2x-1)}\le 2$
4. $\sqrt{x-1}+\sqrt{2x-3}\ge\sqrt{3x-2}$
5. $|x^2-3x+2|| < |x+4|$
6. $\left|\frac{x-1}{x+3}\right|\le 2$
7. הוכח שאם $|x-1|<\frac{1}{10}$ אזי מתקיים $\left|\frac{x^2-1}{x+3}\right|<\frac{1}{13}$
*8. הוכח כי אם X מקיים את $|x+2|<\frac{1}{3}$ אזי $|x^2-4|<\frac{3}{2}$
*9. $(x-3)^{5x}<(x-3)^{x^2}$
10. $\log_x(x+1)<\log_x(3x-5)$
11. $(3x^2-2x)^{x^2-4x}\le(3x^2-2x)^{2x+7}$

בהצלחה!

פתרון תרגיל בית מס' 1

משוואות:

(1) $$3\cdot 2^{x}+2^{x+3}-5\cdot 2^{x-1}=17$$

נוציא גורם משותף:

$$2^{x}\left(3+8-5\cdot\frac{1}{2}\right)=17$$

$$2^{x}\left(8\frac{1}{2}\right)=17$$

$$2^{x}=2$$

תשובה: $\boxed{x=1}$

(2) $$16^{x}+4^{x+1}-2^{2x}-4=0$$

נעבור לבסיס 2: $(2^4)^x+(2^2)^{x+1}-2^{2x}-2^2=0$

(*) $2^{4x}+2^{2x+2}-2^{2x}-2^2=0$

נציב $t=2^x$: $t^4+4\cdot t^2-t^2-4=0$

$$t^2(t^2+4)-(t^2+4)=0$$

$$(t^2-1)(t^2+4)=0$$

$t^2-1=0$; $t^2=-4$

$t^2=1$; אין פתרונות

$\boxed{t_1=1}$ $\boxed{t_2=-1}$

עבור $t_1=1$:

$2^x=1$

$\boxed{x=0}$

עבור $t_2=-1$

$2^x=-1$

אין פתרון

תשובה: $\boxed{x=0}$

אפשרות נוספת לפתרון: (*) נציב $t=2^{2x}$ נקבל $t^2+4t-t-4=0$

$$t^2+3t-4=0$$

$$t_{1,2}=\frac{-3\pm\sqrt{9+16}}{2}=\frac{-3\pm5}{2}\to -4,\ 1$$

$t_1=-4$

$t_2=1$

עבור $t_1=-4$, $(2^x)^2=-4$ אין פתרונות

עבור $t_2=1$ $(2^x)^2=1$ נקבל, לכן $2^x=1$ או $2^x=-1$

$\boxed{x=0}$; אין פתרון

(3) $$(x-1)^{x^2-x-2}=(x-1)^4$$

(*) הבסיס צריך להיות חיובי, לכן נדרוש כי $x-1>0$ <= $\boxed{x>1}$

נדרוש $x^2-x-2=4$; $x=-2$ לא עונה על הדרישה $x>1$

$x^2-x-6=0$; $\boxed{x=3}$ אבל יש עוד פתרון;

$$x_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{1+24}}{2}=\frac{1\pm5}{2}\to 3,\ -2$$

כאשר $x=2$, נקבל $1^{2^2-2-2}=1^4$

$1=1$

המשך <=

לכן סה"כ התשובה הסופית היא: $\boxed{x_1=2\ ,\ x_2=3}$

(4)

$$\left(\frac{x+1}{x}\right)^{x^2-x}=1$$

(*) תחום הגדרה: $\boxed{x\neq 0}$

(*) הבסיס צריך להיות חיובי: $\left(\frac{x+1}{x}\right)>0 \ \big|\cdot x^2$

$x(x+1)>0$

נק' חיתוך עם ציר x: $x=-1$, $x=0$

$-1 \quad 0$

$\boxed{x<-1 \text{ או } x>0}$

כעת נפתור את המשוואה:

$$\left(\frac{x+1}{x}\right)^{x^2-x}=\left(\frac{x+1}{x}\right)^{0}$$

$$\Downarrow$$

$$x^2-x=0$$

$$x(x-1)=0$$

כיוון כי 2 הפתרונות הם $x=0$, $x=1$, $x=0$ לא בתחום ההגדרה,

לכן הפתרון הסופי הוא $\boxed{x=1}$

(*) במקרה הקצה, כאשר הבסיס הוא 1: $\frac{x+1}{x}=1 \Leftarrow x+1=x \quad 0\neq 1$

אין פתרונות נוספים

(5)

$$\left(\frac{x}{3x-1}\right)^{x^2-2x}=\left(\frac{3x-1}{x}\right)^{-3x}$$

ת.ה.: $\boxed{x\neq 0}$, $3x-1\neq 0 \Rightarrow \boxed{x\neq \frac{1}{3}}$

(*) $\frac{x}{3x-1}>0 \ \big|\cdot x(3x-1)^2$

$x(3x-1)>0$

$x=0,\ x=\frac{1}{3}$

$0 \quad \frac{1}{3}$

$\boxed{x>\frac{1}{3} \text{ או } x<0}$

נביא לבסיס זהה:

$$\left(\frac{x}{3x-1}\right)^{x^2-2x}=\left(\frac{x}{3x-1}\right)^{3x}$$

ונשווה משוואה:

$x^2-2x=3x$

$x^2-5x=0$

$x(x-5)=0$

$x=0$ לא בתחום ההגדרה $\quad \boxed{x=5}$

נבדוק מקרה קצה: בסיס הוא 1

$\frac{x}{3x-1}=1$

$x=3x-1$

$1=2x$

$\boxed{x=\frac{1}{2}}$

תשובה:

$$\boxed{\begin{aligned}x_1&=5\\ x_2&=\frac{1}{2}\end{aligned}}$$

6

$$\log_9(x+20)\cdot\log_x 3 = 1$$

ת.ה: $x+20>0$, $\boxed{x>-20}$

x - בסיס צריך להיות שונה מ-1 וגדול מ-0: $x\neq 1$, $x>0$.

נעבור לבסיס משותף [בסיס 3]

$$\log_9(x+20)\cdot\log_x 3 =$$

$$= \frac{\log_3(x+20)}{\log_3 9}\cdot\frac{\log_3 3}{\log_3 x} = \left[\frac{\log_3(x+20)}{\log_3(x)}\cdot\frac{1}{2} = 1\right]\times 2(\log_3 x)$$

$$\log_3(x+20) = 2\log_3(x)$$

$$\log_3(x+20) = \log_3(x^2)$$

נפתור משוואה: $x+20 = x^2$

$$x^2-x-20=0$$

$$x_{1,2} = \frac{1\pm\sqrt{1+80}}{2} = \frac{1\pm 9}{2} = \begin{cases}5\\-4\end{cases}$$

$x_1=-4$ לא בתחום ההגדרה.

לכן התשובה היא $\boxed{x=5}$

7

נתון: $\log_b a = \log_a b$ צ"ל: $a=b$ או $a=\frac{1}{b}$

כאשר $1\neq a>0$ וגם $1\neq b>0$.

$$\log_b a = \log_a b$$

$$\log_b a = \frac{\log_b b}{\log_b a}$$

$$\log_b a = \frac{1}{\log_b a}$$

לכן קיבלנו כי $(\log_b a)^2 = 1$

$\log_b a = 1$ או $\log_b a = -1$

$b^1 = a$, $b^{-1} = a$

$\underline{b=a}$, $\underline{\frac{1}{b}=a}$

מ.ש.ל.

8

$$x^{\log_4 2x} = 4^{2-3\log_4 x}$$

נוציא את הלוגריתם משני האגפים

$$\log_4\left(x^{\log_4 2x}\right) = \log_4\left(4^{2-3\log_4 x}\right)$$

$$\log_4 2x\cdot\log_4 x = 2-3\log_4 x$$

$$(\log_4 2+\log_4 x)\cdot\log_4 x + 3\log_4 x - 2 = 0$$

$$(\log_4 x)^2 + 3\tfrac{1}{2}\log_4 x - 2 = 0$$

נבצע הצבה: $t=\log_4 x$

$$t^2+3.5t-2=0 \Rightarrow 2t^2+7t-4=0$$

$$t_{1,2} = \frac{-7\pm\sqrt{49+32}}{4} = \frac{-7\pm 9}{4} = \begin{cases}-4\\ \frac{1}{2}\end{cases}$$

עבור $t=-4$: $\log_4 x = -4$, $4^{-4} = x$, $\boxed{x=\frac{1}{256}}$

עבור $t=\frac{1}{2}$: $\log_4 x = \frac{1}{2}$, $4^{\frac{1}{2}} = x$, $\boxed{x=2}$

תשובה:

(9) $|x| = x+1$

נחלק ל-2 מקרים לפי ההגדרה:

א) $x<0$

$-x = x+1$

$-2x = 1$

$\boxed{x = -\frac{1}{2}}$

ב) $x \geq 0$

$x = x+1$

$0 = 1$

אין פתרון

לכן הפתרון הסופי הוא $\boxed{x = -\frac{1}{2}}$

אי - שוויונים

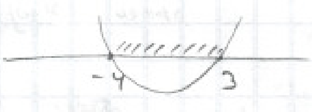
(1) $(x+1)^2 < x+13$

$x^2+2x+1 < x+13$

$x^2+x-12 < 0$

נפתור משוואה: $x^2+x-12=0$

$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+48}}{2} = \frac{-1 \pm 7}{2} \to -4,\ 3$



תשובה: $\boxed{-4 < x < 3}$

(2) $\frac{(x-2)(x-4)}{x(x-1)} \leq 0$

נוכל להתייחס אל המונה ואל המכנה באופן זהה ולמצוא את הנקודות בהן הביטויים מתאפסים.

ת.ה.: $\boxed{x \neq 0}$, $x-1 \neq 0$, $\boxed{x \neq 1}$

לאחר מכן נבדוק את התחומים הנוצרים [סימן שלהם].

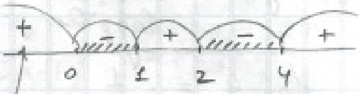
ניקח את כל 4 הנקודות:

$(x-2)=0 \Leftarrow x=2$

$(x-4)=0 \Leftarrow x=4$

$x=0 \Leftarrow x=0$

$(x-1)=0 \Leftarrow x=1$



$\frac{(-1-2)(-1-4)}{(-1)(-1-1)} > 0$, $x=-1$

$\frac{(0.5-2)(0.5-4)}{0.5(0.5-1)} < 0$, $x=0.5$

וכן נבדוק את התחומים הנוספים.

(*) נשים לב כי $x \neq 0$ וגם $x \neq 1$!!! ולכן התשובה היא

$(0<x<1)$ או $(2 \leq x \leq 4)$

(3) $\frac{x+1}{2x-1} \leq 2$

ת.ה.: $2x-1 \neq 0$

$x \neq \frac{1}{2}$ נשים לב

נכפיל ב $(2x-1)^2$ [$(2x-1)^2 \geq 0$ לכן הסימן לא משתנה

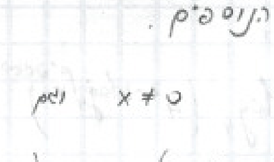
$(x+1)(2x-1) \leq 2(2x-1)^2$

$2x^2+2x-x-1 \leq 8x^2-8x+2$

$6x^2-9x+3 \geq 0 \quad /:3$

$2x^2-3x+1 \geq 0$

$x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{4} = \frac{3 \pm 1}{4} \to 1,\ \frac{1}{2}$



תשובה סופית: $\boxed{x < \frac{1}{2} \text{ או } x \geq 1}$

(4) $\sqrt{x-1}+\sqrt{2x-3}\geq\sqrt{3x-2}$

ת.ה:

$x-1\geq 0 \Rightarrow x\geq 1$

$2x-3\geq 0 \Rightarrow x\geq 1.5$

$3x-2\geq 0 \Rightarrow x\geq \frac{2}{3}$

לכן אי-שוויון מתקיים רק עבור $\boxed{x\geq 1.5}$

פתרון: שני האגפים אי-שליליים, לכן שקול:

$$\left(\sqrt{x-1}+\sqrt{2x-3}\right)^2\geq\left(\sqrt{3x-2}\right)^2$$

$$(\cancel{x}-1)+2\sqrt{x-1}\cdot\sqrt{2x-3}+(\cancel{2x}-3)\geq \cancel{3x}-2$$

$$2\sqrt{x-1}\cdot\sqrt{2x-3}-2\geq 0$$

$$2\left(\sqrt{x-1}\cdot\sqrt{2x-3}-1\right)\geq 0$$

$$\sqrt{x-1}\cdot\sqrt{2x-3}-1\geq 0$$

$$\sqrt{x-1}\cdot\sqrt{2x-3}\geq 1$$

(*) שוב, 2 האגפים אי-שליליים, לכן נוכל להעלות בריבוע:

$$(x-1)(2x-3)\geq 1$$

$$2x^2-2x-3x+3-1\geq 0$$

$$2x^2-5x+2\geq 0$$

$$x_{1,2}=\frac{5\pm\sqrt{25-16}}{4}$$

$x\in\left(-\infty,\frac{1}{2}\right]\cup[2,\infty)$

פתרון סופי:

$\boxed{x\geq 2}$

(5) $|x^2-3x+2|<|x+4|$

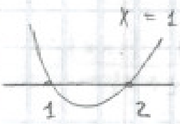
נמצא נק' בהם הביטוים מתאפסים:

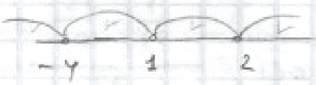
$x^2-3x+2=0$

$x=1 \quad x=2$

$x+4=0$

$\boxed{x=-4}$





נפתור בתחומים:

$\boxed{x<-4}$

$$(x^2-3x+2)<-(x+4)$$

$$x^2-3x+2+x+4<0$$

$$x^2-2x+6<0$$

$$x_{1,2}=\frac{2\pm\sqrt{4-24}}{2} \quad <0$$

אין פתרון

$\boxed{-4\leq x<1}$ או $\boxed{x\geq 2}$

(*) בתחומים אלה הביטוי מתקיים בצורה כזו

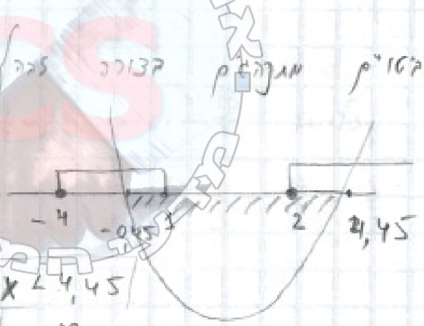
$$x^2-3x+2<x+4$$

$$x^2-4x-2<0$$

$$x_{1,2}=\frac{4\pm\sqrt{16+8}}{2}=\frac{4\pm\sqrt{24}}{2}=2\pm\sqrt{6}$$

$\to 4.45$

$\to -0.45$



$\boxed{2\leq x<4.45}$

$\boxed{-0.45<x<1}$ או

$$-(x^2-3x+2)<(x+4)$$

$$\boxed{1 \le x < 2}$$

$$x^2-2x+6>0$$

$$x_{1,2}=\frac{2 \pm \sqrt{4-24}}{2} < 0$$

סיכום סופי למגמה: $\boxed{-0.45 < x < 4.45}$

(6) $\left|\frac{x-1}{x+3}\right| \le 2$ ניתן לרשום בצורה הבאה:

$\boxed{x \ne -3}$!!! , $-2 \le \left(\frac{x-1}{x+3}\right) \le 2$

נפתור את אי-שוויונים:

$$\frac{(x-1)}{(x+3)} \le 2 \qquad\qquad \frac{(x-1)}{x+3} \ge -2$$

$$\frac{(x-1)}{x+3} - \frac{2(x+3)}{x+3} \le 0 \qquad\qquad \frac{(x-1)+2(x+3)}{x+3} \ge 0$$

$$\frac{x-1-2x-6}{(x+3)} \le 0 \qquad\qquad \frac{3x+5}{x+3} \ge 0$$

$$\frac{-x-7}{x+3} \le 0 \ \Big/ \cdot(x+3)^2 \qquad\qquad (3x+5)(x+3) \ge 0 \ \Big/ \cdot(x+3)^2$$

$$(-x-7)(x+3) \le 0$$

-7 , -3 ; -3 , $-\frac{5}{3}$

$\boxed{x \le -7 \ \text{או} \ x > -3}$ $\qquad$ $\boxed{x < -3 \ \text{או} \ x \ge -\frac{5}{3}}$

שני התנאים חייבים להתקיים, לכן

-7 $\quad -3 \quad -1\frac{2}{3}$

תשובה סופית: $\boxed{x \ge -\frac{5}{3} \ \text{או} \ x \le -7}$

(7) הוכח שאם $|x-1| < \frac{1}{10}$, אזי מתקיים $\left|\frac{x^2-1}{x+3}\right| < \frac{1}{13}$

$$|x-1| < \frac{1}{10}$$
$$\Downarrow$$
$$-\frac{1}{10} < (x-1) < \frac{1}{10}$$

נוסיף 1

$$\frac{9}{10} < x < \frac{11}{10}$$

נגיע לביטוים שנדרשים

$$\frac{19}{10} < x+1 < \frac{21}{10}$$
$$\frac{39}{10} < x+3 < \frac{41}{10}$$

לכן נשתמש בחלק של האי-שוויון הנדרש:

$$\left|\frac{x^2-1}{x+3}\right| = \left|\frac{(x+1)(x-1)}{x+3}\right| = \frac{|x+1|\cdot|x-1|}{|x+3|} < \frac{\frac{21}{10}\cdot\frac{1}{10}}{\frac{39}{10}} = \frac{7}{130} < \frac{1}{13}$$

מ.ש.ל.

(8) (*) הוכח שאם x מקיים את $|x+2| < \frac{1}{3}$ אז $|x^2-4| < \frac{3}{2}$

$$|x^2-4| = |(x-2)(x+2)| = |x-2|\cdot|x+2|$$

$$-\frac{1}{3} < x+2 < \frac{1}{3} \qquad (1)$$
$$-\frac{13}{3} < x-2 < -\frac{11}{3}$$

ולכן גם מתקיים $-\frac{13}{3} < x-2 < -\frac{11}{3} < \frac{13}{3}$, כלומר $|x-2| < \frac{13}{3}$ (2)

נשתמש ב-(1) ו-(2):

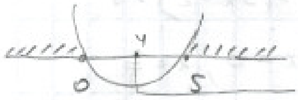
$$|x-2|\cdot|x+2| < \frac{13}{3}\cdot\frac{1}{3} = \frac{13}{9} < \frac{3}{2}$$

מ.ש.ל.

(9) (*) $(x-3)^{5x} < (x-3)^{x^2}$

מקרה א': $(x-3)>1$ אז נפתור $5x<x^2$

$x>4$



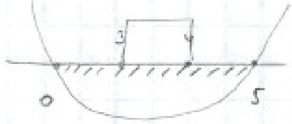
$x^2-5x>0$

$x(x-5)>0$

פתרון מקרה א': $\boxed{x>5}$

מקרה ב': $0<x-3<1$ נפתור $5x>x^2$

$3<x<4$



$x^2-5x<0$

פתרון מקרה ב': $\boxed{3<x<4}$

פתרון סופי:

$x>5$ או $3<x<4$.

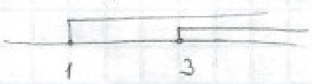
(10) $\log_x(x+1) < \log_x(3x-5)$

ת.ה: $1\ne x>0$

$x+1>0 \Rightarrow x>-1$

$3x-5>0 \Rightarrow \boxed{x>\frac{5}{3}}$

מקרה א': $\boxed{x>1}$



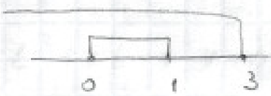
$x+1<3x-5$

$6<2x$

$\boxed{x>3}$

פתרון מקרה א': $\boxed{x>3}$

מקרה ב': $\boxed{0<x<1}$

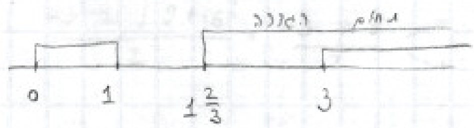


$x+1>3x-5$

$6>2x$

$x<3$

פתרון מקרה ב': $\boxed{0<x<1}$



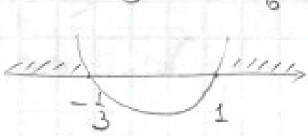
פתרון סופי:

$\boxed{x>3}$

(11) $(3x^2-2x)^{x^2-4x} \le (3x^2-2x)^{2x+7}$

(א') $3x^2-2x>1 \Rightarrow 3x^2-2x-1>0$

$x_{1,2}=\frac{2\pm\sqrt{4+12}}{6}=\frac{2\pm4}{6} \to 1,\ -\frac{1}{3}$

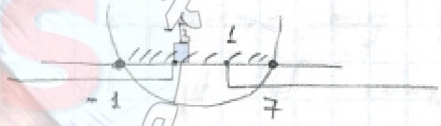


$\boxed{x<-\frac{1}{3} \text{ או } x>1}$

$x^2-4x \le 2x+7$

$x^2-6x-7\le 0$

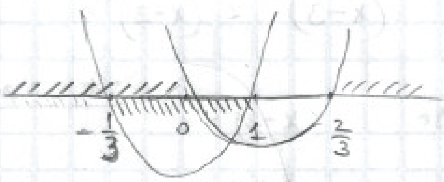
$x_{1,2}=\frac{6\pm\sqrt{36+28}}{2}=\frac{6\pm8}{2}=-1,\ 7$



פתרון מקרה א': $\boxed{-1\le x<-\frac{1}{3} \text{ או } 1<x\le 7}$

מקרה ב':

$0 < 3x^2-2x < 1$



$$\begin{cases} 3x^2-2x-1<0 \\ 3x^2-2x>0 \end{cases}$$

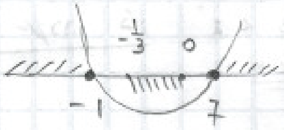
$\to x_{1,2} = -\frac{1}{3}, 1$

$x(3x-2)>0$

$x=0, \ x=\frac{2}{3}$

$\boxed{-\frac{1}{3} < x < 0}$

$x^2-4x \geq 2x+7$



$x^2-6x-7 \geq 0$

$x_1=-1 \ , \ x_2=7$

אין פתרונות למקרה ב'.

(*) מפני שמדובר ב- $\leq$, נבדוק גם את מקרה הקצה, כאשר

$\boxed{3x^2-2x=1}$

$3x^2-2x-1=0$

$x_1=-\frac{1}{3} \ , \ x_2=1.$

פתרון סופי:

$\boxed{-1 \leq x \leq -\frac{1}{3} \quad \text{או} \quad 1 \leq x \leq 7}$

תרגיל מס' 2

ההגשה בזוגות עד : 17:00 24/11/05

1. הוכיחו את משפט ארכימדס : לכל שני מספרים ממשיים $a,b>0$ קיים מספר טבעי $n\in\mathrm{N}$ כך ש- $na>b$

2. **חזרה על גרפים של פונקציות: הזזות ושיקופים.**

שרטטו איך נראה הגרף של הפונקציות הבאות (תציגו כל קבוצת גרפים על מערכת צירים אחת).

$f(x)=x^2+5$
$f(x)=x^2-5$
$f(x)=(x+5)^2$
$f(x)=(x-5)^2$

$f(x)=|x|+3$
$f(x)=|x+3|$
$f(x)=-|x|-3$
$f(x)=|x-3|$

$f(x)=2^x$
$f(x)=2^x+5$
$f(x)=2^x-4$
$f(x)=2^{x+1}$

$f(x)=\sin x$
$f(x)=\sin x+3$
$f(x)=2\sin x$
$f(x)=|\sin x|$

$f(x)=\cos x$
$f(x)=\cos x-5$
$f(x)=-\cos x$
$f(x)=|\cos x|+2$

$f(x)=\mathrm{tg}x$
$f(x)=|\mathrm{tg}x|$
$f(x)=\mathrm{tg}x-4$

קבוצות.

3. מצאו איחוד וחיתוך לקבוצות הבאות:

1. $A=\{2k-1|k\in\mathrm{N}\}\ \ B=\{2k|k\in\mathrm{N}\}$
2. $A=(-\infty,1)\cup[3,5)\cup(4,8)\ \ B=\{k+3|k=1,2,3,4,5,6\}$
3. $A=\{x|x^2+3x-4<0\}\ \ B=\{x||x+5|<7\}$

4. הוכיחו את הטענה הבאה לפי ההגדרה: $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$

אינדוקציה.

5. הוכיחו באינדוקציה על n את הטענה הבאה: $|\sin(nx)|\le n|\sin x|$

6. הוכיחו את החוק המורחב של דה-מורגן: $\overline{A_1}\cup\overline{A_2}\cup\ldots\cup\overline{A_n}=\overline{\bigcap_{1\le i\le n}A_i}$

טריגונומטריה.

פתרו את המשוואות הבאות בעזרת זהויות טריגונומטריות:

7. $\cos^3x\cdot\sin x+\cos^2x\cdot\sin^2x-3\cos x\cdot\sin^3x-3\sin^4x=0$ (רמז: ניתן לחלק ב-$\cos^n x$ כאשר n הינו סכום החזקות בכל אחד מן הביטויים במשוואה)

8. $\cos 13x\cdot\sin 17x-\sin 8x=\cos 19x\cdot\sin 11x$

בהצלחה!

1. משפט ארכימדס: לכל שני מספרים ממשיים $0<a,b$ קיים מספר טבעי $n\in\mathbb{N}$ כך ש- $b<n\cdot a$

(*) המשפט מופיע בספר הלימוד "חדו"א" של אלן דינון קין [עמ' 16]

<u>הוכחה:</u> נניח בשלילה כי המשפט אינו נכון, אזי לכל $n\in\mathbb{N}$

$$n\cdot a\le b$$

לכן הקבוצה $K=\{na \mid n\in\mathbb{N}\}$ חסומה מלעיל ע"י b.

לפי אקסיומת השלמות של קבוצת הממשיים $\mathbb{R}$ יש לה סופרמום שנסמנו ב- S. לכן לכל $n\in\mathbb{N}$ מתקיים $n\cdot a\le S$, ולכן גם

$$(n+1)\cdot a\le S$$

אם נפחית את a משני האגפים:

$$(n+1)\cdot a-a\le S-a$$

$$\boxed{na\le S-a}$$

כלומר $(S-a)$ הוא חסם מלעיל של K, בסתירה לכך ש- S הוא סופרמום.

לכן המשפט מתקיים. מ.ש.ל.

סיכום ג"ב 2 1/4

קבוצות:

3 (1) A - קבוצת המספרים האי-זוגיים ב- $\mathbb{N}$

B - קבוצת המספרים הזוגיים ב- $\mathbb{N}$

$A \cup B = \mathbb{N}$, $A \cap B = \emptyset$.

(2) $A = (-\infty,1) \cup [3,5) \cup (4,8)$

$B = \{4,5,6,7,8,9\}$

$A \cup B = (-\infty,1) \cup [3,5] \cup (4,8] \cup \{9\}$

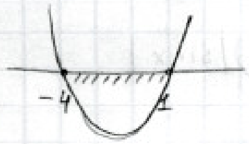
$A \cap B = \{4,5,6,7\}$

(3) $A = \{x \mid x^2+3x-4 < 0\}$

$x^2+3x-4<0$

$x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9+16}}{2} = \frac{-3\pm 5}{2}$

לכן $A = \{x \mid -4<x<1\}$



$B = \{x \mid |x+5| < 7\}$

$|x+5|<7$

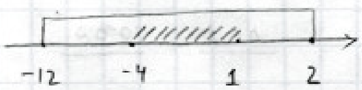
$\Downarrow$

$-7 < x+5 < 7 \quad |-5$

$-12 < x < 2$

$B = \{x \mid -12<x<2\}$

נצייר את שתי הקבוצות כקטעים על ציר ה-x:



תשובה סופית: $A \cup B = (-12,2)$ $A \cap B = (-4,1)$

4 נוכיח את השוויון הבא: $A\cap(B\cup C) = (A\cap B)\cup(A\cap C)$

$\forall x \in A\cap(B\cup C) \iff x\in A$ וגם $x \in B\cup C \iff x\in A$ וגם $(x\in B$ או $x\in C)$

$\iff [x\in B$ וגם $x\in A]$ או $[x\in C$ וגם $x\in A] \iff x\in(A\cap B)$ או $x\in(A\cap C)$

$\iff x \in (A\cap B)\cup(A\cap C)$

לכן מכל הנאמר כי $A\cap(B\cup C) \subseteq (A\cap B)\cup(A\cap C)$

וגם $(A\cap B)\cup(A\cap C) \subseteq A\cap(B\cup C)$

לכן מתקיים שוויון

$(A\cap B)\cup(A\cap C) = A\cap(B\cup C)$

מ.ש.ל.

2/4 2

אינדוקציה:

(5) צ"ל: $\forall n\in\mathbb{N}\quad |\sin nx| \le n\cdot|\sin x|$

נוכיח באינדוקציה:

בסיס: $n=1$ $\quad |\sin x| \le 1\cdot|\sin x|$ ✓

הנחה: נניח כי הטענה מתקיימת, כלומר עבור $n=k$ $\quad |\sin kx| \le k\cdot|\sin x|$

הוכחה: נוכיח כי הטענה מתקיימת עבור $n=k+1$

$$|\sin (k+1)x| \overset{?}{\le} (k+1)|\sin x|$$

אי-שוויון המשולש

$$|\sin(k+1)x| = |\sin(kx+x)| = |\sin kx\cdot\cos x + \sin x\cdot\cos kx| \le |\sin kx\cdot\cos x| +$$

$$+ |\sin x\cdot\cos kx| = |\sin kx|\cdot|\cos x| + |\sin x|\cdot|\cos kx| \le k\cdot|\sin x|\cdot|\cos x| + |\sin x|\cdot|\cos kx| =$$

תכונות ערך מוחלט   הנחת האינדוקציה

$$= |\sin x|\Big[k\cdot\underbrace{|\cos x|}_{\le 1} + \underbrace{|\cos kx|}_{\le 1}\Big] \le |\sin x|\big[k(1)+1\big] = (k+1)|\sin x|$$

מ.ש.ל.

(6) צ"ל: $\bar{A}_1\cup\bar{A}_2\cup\ldots\cup\bar{A}_n = \overline{\bigcap_{i=1}^{n} A_i}$

נוכיח באינדוקציה:

בסיס: $n=1$ $\quad \bar{A}_1 = \bar{A}_1$ $\qquad$ $n=2$: $\quad \bar{A}_1\cup\bar{A}_2 = \overline{A_1\cap A_2}$

[דה-מורגן]

הנחה: נניח כי הטענה מתקיימת עבור $n=k$:

$$\bar{A}_1\cup\bar{A}_2\cup\ldots\cup\bar{A}_k = \overline{\bigcap_{i=1}^{k} A_i}$$

הוכחה: נוכיח עבור $n=k+1$

$$\bar{A}_1\cup\bar{A}_2\cup\ldots\cup\bar{A}_k\cup\bar{A}_{k+1} = (\bar{A}_1\cup\bar{A}_2\cup\ldots\cup\bar{A}_k)\cup\bar{A}_{k+1} = \overline{\bigcap_{i=1}^{k} A_i}\cup\bar{A}_{k+1} =$$

דה-מורגן   לפי הנחת האינדוקציה

$$= \overline{\bigcap_{i=1}^{k} A_k\cap A_{k+1}} = \overline{\bigcap_{i=1}^{k+1} A_i}$$

מ.ש.ל.

פתרון ג"ב 2   3/4

פתרון משלים:

(7)

$$\cos^3 x\cdot\sin x+\cos^2 x\cdot\sin^2 x-3\cos x\cdot\sin^3 x-3\sin^4 x=0$$

(*) נחלק ב- $\cos^4 x$:

$$\frac{\cos^3 x\cdot\sin x}{\cos^4 x}+\frac{\cos^2 x\sin^2 x}{\cos^4 x}-\frac{3\cos x\cdot\sin^3 x}{\cos^4 x}-\frac{3\sin^4 x}{\cos^4 x}=0$$

$$\frac{\sin x}{\cos x}+\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)^2-3\cdot\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)^3-3\cdot\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)^4=0$$

$$tg\,x=\frac{\sin x}{\cos x}$$

$$tg x+tg^2 x-3\,tg^3 x-3\,tg^4 x=0$$

נציב $t=tg\,x$

$$t+t^2-3t^3-3t^4=0$$

$$(t+t^2)-3t^2(t+t^2)=0$$

$$(t+t^2)(1-3t^2)=0$$

$$t+t^2=0 \qquad\qquad 3t^2=1$$

$$t(1+t)=0 \qquad\qquad t^2=\frac{1}{3}$$

$$\boxed{t=0}\quad \boxed{t=-1}\qquad\qquad \boxed{t=\pm\frac{1}{\sqrt3}}$$

סה"כ קיבלנו:

$$tg\,x=0 \qquad x=180^\circ k$$

$$tg x=-1 \qquad x=-45^\circ+180^\circ k$$

$$tg x=\frac{1}{\sqrt3} \qquad x=30^\circ+180^\circ k$$

$$tg x=-\frac{1}{\sqrt3} \qquad x=-30^\circ+180^\circ k$$

(8)

$$\cos 13x\cdot\sin 17x-\sin 8x=\cos 19x\cdot\sin 11x$$

$$\times 2\ \Big|\quad \frac{\sin(13x+17x)+\sin(17x-13x)}{2}-\sin 8x=\frac{\sin(11x+19x)+\sin(11x-19x)}{2}$$

$$\cancel{\sin 30x}+\sin 4x-\cancel{2\sin 8x}=\cancel{\sin 30x}+\cancel{\sin(-8x)}$$

$$\left\{\begin{aligned}&\sin(-8x)=\\&=-\sin(8x)\end{aligned}\right\}$$

$$\sin 4x=\sin 8x$$

$$\sin 4x=2\sin 4x\cdot\cos 4x$$

$$\sin 4x\,(2\cos 4x-1)=0$$

$$\sin 4x=0 \qquad\qquad \cos 4x=\frac{1}{2}$$

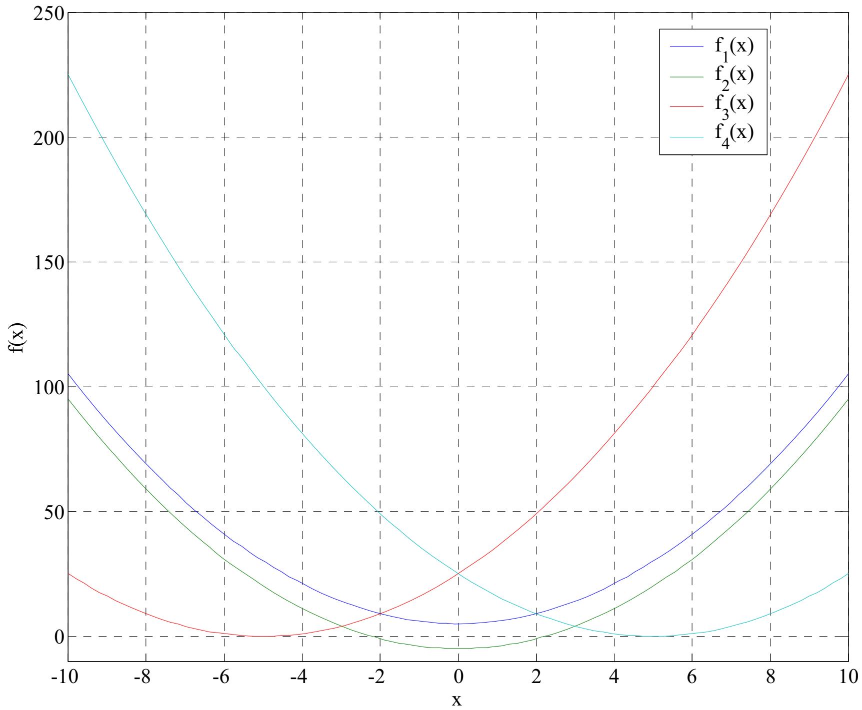
$$4x=360^\circ k \qquad\qquad 4x=\pm 60^\circ+360^\circ k$$

$$4x=180^\circ+360^\circ k \qquad\qquad \boxed{x=\pm 15^\circ+90^\circ k}$$

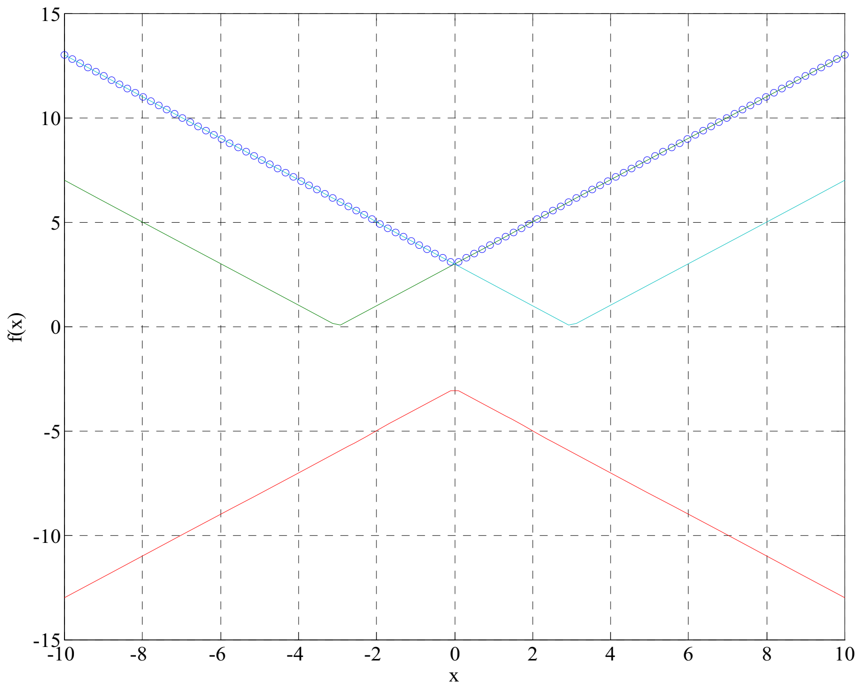
$$\boxed{\begin{aligned}&x=90^\circ k\\&x=45^\circ+90^\circ k\end{aligned}}$$

מבחן מ"מ 2 4/4

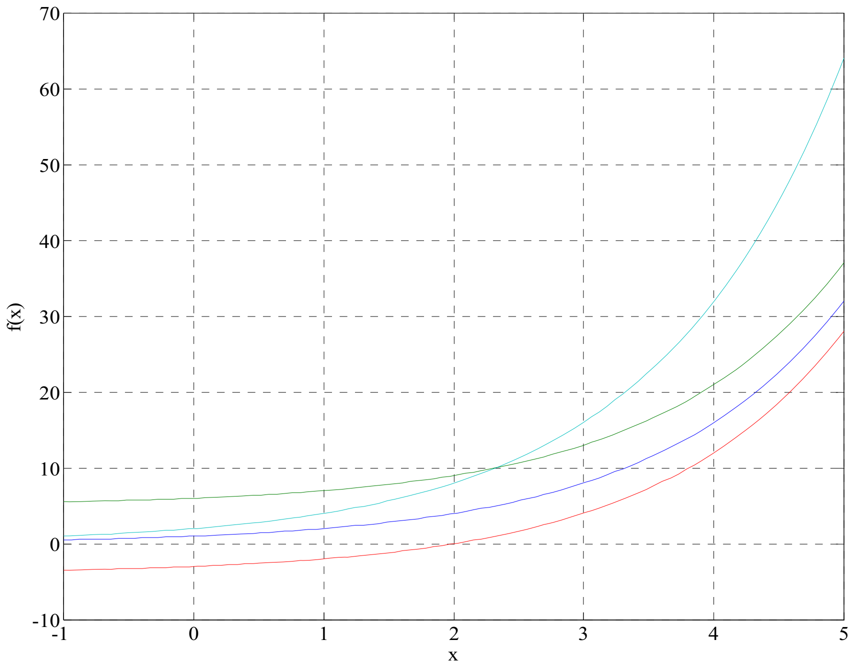
$f(x) = x^2+5$
$f(x) = x^2-5$
$f(x) = (x+5)^2$
$f(x) = (x-5)^2$



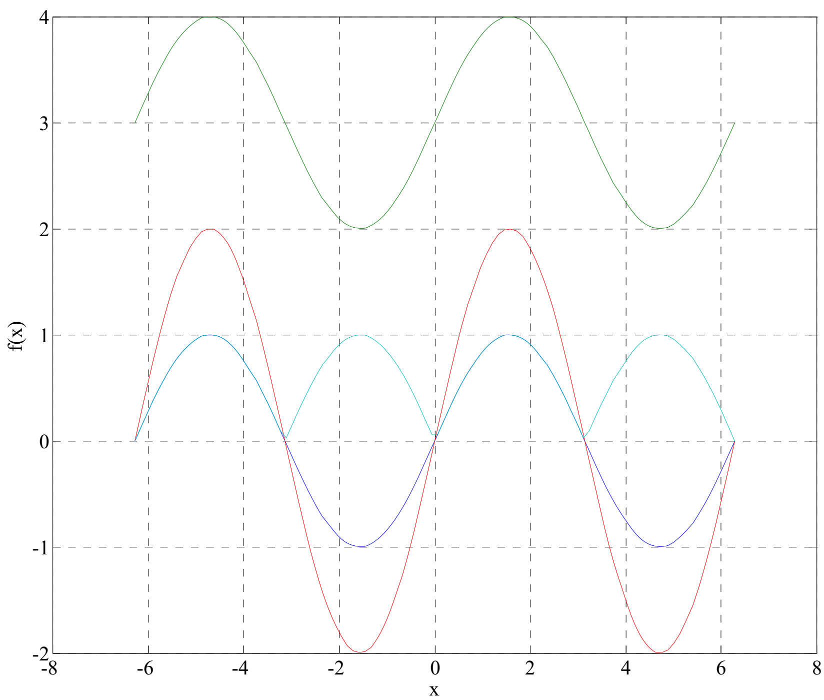
$f(x) = |x|+3$
$f(x) = |x+3|$
$f(x) = -|x|-3$
$f(x) = |x-3|$



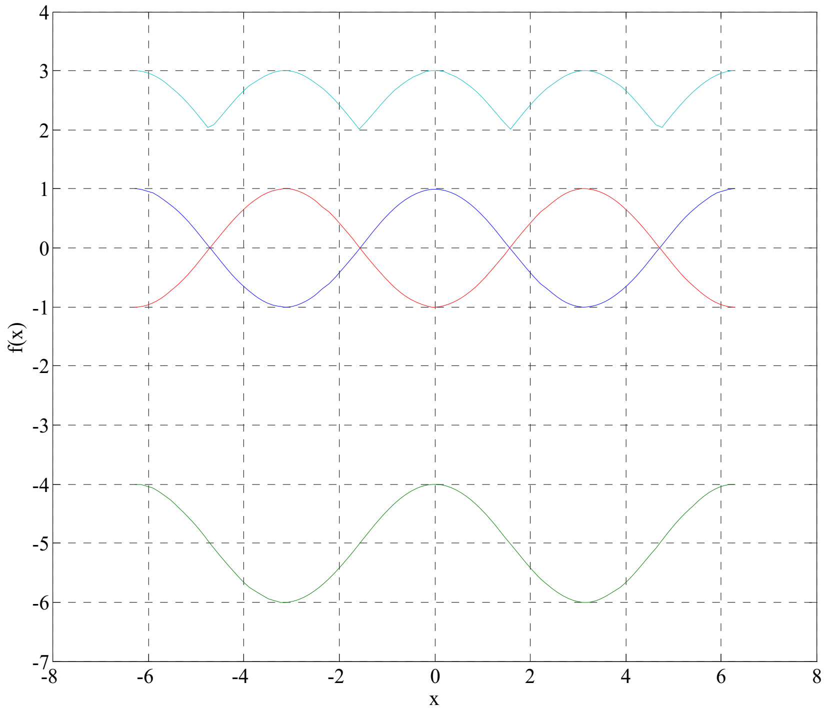
$f(x) = 2^x$
$f(x) = 2^x + 5$
$f(x) = 2^x - 4$
$f(x) = 2^{x+1}$



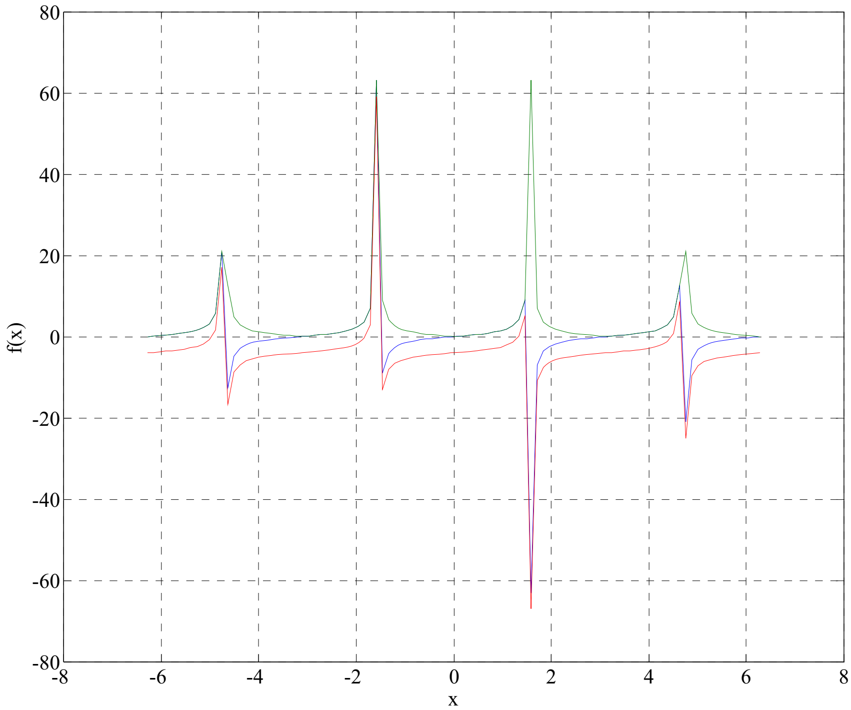
$f(x) = \sin x$
$f(x) = \sin x + 3$
$f(x) = 2\sin x$
$f(x) = |\sin x|$



f(x) = cosx
f(x) = cosx-5
f(x) = -cosx
f(x) = |cosx|+2



f(x) =tgx
f(x) = |tgx|
f(x) = tgx -4



תרגיל מס' 3

ההגשה בזוגות בלבד עד : 17:00 1/12/05

פונקציות.

1. הוכיחו את הטענות הבאות:

1. מכפלה או מנה של שתי פונקציות אי-זוגיות היא פונקציה זוגית.
2. מכפלה או מנה של פונקציה זוגית עם פונקציה אי-זוגית היא פונקציה אי-זוגית.

2. מצאו תחום הגדרה לפונקציות הבאות:

1. $f(x)=\dfrac{4x^2+3}{2x-5}$
2. $f(x)=\sqrt[3]{2x^2-5x+3}$
3. $f(x)=\dfrac{x+\log_3(5-x^2)}{x^2-2x+1}$
4. $f(x)=\sqrt{x^2-1}+\ln\sqrt{1-4x^2}$

3. תהי $f(x)=\dfrac{3x+1}{x-2}$, $x\neq 2$ מצא:

1. $\dfrac{5\cdot f(-1)-2\cdot f(0)+3\cdot f(5)}{6}$
2. $(f(-\frac{1}{2}))^2$
3. $f(2x-3)$
4. $f(x)+f(\frac{4}{x})$
5. $f(f(x))$

4. הוכח כי הפונקציות הבאות חסומות בתחום הנתון:

1. $y=\dfrac{x+2}{2x-3},\ x\geq 2$
2. $y=2-\cos(4-x),\ x\in R$

5. האם $f(x)$ זוגית, אי-זוגית או אף אחת משתי ההגדרות?

1. $f(x)=x^4+3x^2+1$
2. $f(x)=x^2+3\sin^2 x$
3. $f(x)=\dfrac{\cos 3x}{\sin 2x\cdot\ln\left|x^2-1\right|}$

<u>קבוצות חסומות ולא חסומות.</u>

6. בדקו האם הקבוצות הבאות חסומות. אם הקבוצה חסומה, יש להראות את הסופרמום, אינפימום, מינימום, מקסימום בכל מקרה הם קיימים. אם הקבוצה איננה חסומה, הוכיחו לפי ההגדרה.

1. $A=\left\{x\in R\ \left|x=\frac{2n^2+n}{4n},n\in \mathrm{N}\right.\right\}$
2. $\mathbf{B}=\left\{x\in R\ \left|x^2<5\right.\right\}$ (הוכיחו את החסמים שמצאתם)
3. $C=\left\{x\in R\ \left|x=(-1)^n+\sin\frac{n\pi}{2},n\in N\right.\right\}$
4. $D=\{x\in R\mid x=\frac{(-1)^n}{n},n\in N\}$
5. $E=\{x\in R\mid x(x^2-9)<0\}$

7. הוכח: אם S הוא סופרמום של הקבוצה A אזי לכל מספר ממשי $\varepsilon>0$ קיים איבר $x\in A$ כך ש- $S-\varepsilon<x\le S$.

בהצלחה!

פתרון תרגיל בית מס' 3.

פונקציות:

1) א' מכפלה או מנה של שתי פונקציות אי-זוגיות היא פונק' זוגית.

תהיינה $f(x)$ ו $g(x)$ פונקציות אי-זוגיות מעל תחום D.

נגדיר $h(x) = g\cdot f(x)$ ונוכיח כי $h(x)$ פונק' זוגית.

$$h(-x) = g\cdot f(-x) = g(-x)\cdot f(-x) = (-g(x))\cdot(-f(x)) = g(x)\cdot f(x) =$$

f, g - פונק' אי-זוגית

$$= g\cdot f(x) = h(x)$$

מ.ש.ל.

נגדיר $h'(x) = \frac{g}{f}(x)$ [בלי הגבלת הכלליות]

$$h(-x) = \frac{g}{f}(-x) = \frac{g(-x)}{f(-x)} = \frac{(-g(x))}{(-f(x))} = \frac{g(x)}{f(x)} = \frac{g}{f}(x) = h(x)$$

f, g פונק' אי-זוגית

מ.ש.ל.

ב' מכפלה או מנה של פונק' זוגית עם פונק' אי-זוגית היא פונק' אי-זוגית.

תהיינה $f(x), g(x)$ פונק', כך ש $f(x)$ - זוגית! $g(x)$ אי-זוגית מעל D.

נגדיר $h(x) = g\cdot f(x)$ ונוכיח כי $h(x)$ אי-זוגית.

$$h(-x) = g\cdot f(-x) = g(-x)\cdot f(-x) = [-g(x)]\cdot f(x) = -[g(x)\cdot f(x)] =$$

f - פונק' זוגית

g - פונק' אי-זוגית

$$= -[g\cdot f(x)] = -h(x)$$

נגדיר $h'(x) = \frac{g}{f}(x)$ [בלי הגבלת הכלליות]

$$h(-x) = \frac{g}{f}(-x) = \frac{g(-x)}{f(-x)} = \frac{-g(x)}{f(x)} = -\left[\frac{g(x)}{f(x)}\right] = -\left[\frac{g}{f}(x)\right] = -h(x)$$

מ.ש.ל.

(2) מצא תחום הגדרה לפונק' הבאות:

(1) $f(x)=\dfrac{4x^2+3}{2x-5}$

$2x-5\neq 0$ ת.ה: כל הממשים פרט ל- $x=2,5$!

$\boxed{x\neq 2,5}$

(2) $f(x)=\sqrt[3]{2x^2-5x+3}$

שים לב, כי מדובר בשורש 3 - אי-זוגי, לכן הביטוי יכול לקבל ערך שלילי. ת.ה. - כל x.

(3) $f(x)=\dfrac{x+\log_3(5-x^2)}{x^2-2x+1}$

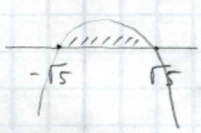
(1) $x^2-2x+1\neq 0$

$(x-1)^2\neq 0$

$\boxed{x\neq 1}$

(2) $5-x^2>0$

$5>x^2$



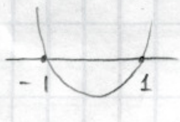
$\boxed{-\sqrt5<x<\sqrt5}$

לכן ת.ה: $x\in(-\sqrt5,\sqrt5)\setminus\{1\}$

$\{x\neq 1$ וגם $-\sqrt5<x<\sqrt5\}^{(*)}$

(4) $f(x)=\sqrt{x^2-1}+\ln\sqrt{1-4x^2}$

(1) $x^2-1\geq 0$



$x\in(-\infty,-1]\cup[1,\infty)$

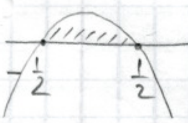
שני התנאים (1) ו-(2)!

בו-זמנית:

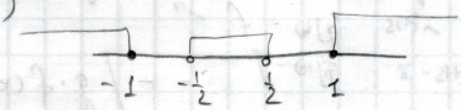
(2) $\sqrt{1-4x^2}>0$

$\Downarrow$

$1-4x^2>0$



$\boxed{-\frac12<x<\frac12}$



לכן ת.ה. של פונק' $f(x)$ הוא ריק.

(3) $f(x)=\dfrac{3x+1}{x-2}$, $x\neq 2$

(1) $\dfrac{5\cdot f(-1)-2f(0)+3f(5)}{6}=\dfrac{5\cdot\frac23-2\left(-\frac12\right)+3\cdot\frac{16}{3}}{6}=\dfrac{61}{18}$

(2) $f\left(-\frac12\right)=\dfrac{-\frac32+1}{-\frac12-2}=\frac15 \Rightarrow \left[f\left(-\frac12\right)\right]^2=\frac1{25}$

! $\boxed{x\neq 0}$ (4) $f(x)+f\left(\frac4x\right)=\dfrac{3x+1}{x-2}+\dfrac{3\cdot\frac4x+1}{\frac4x-2}=\dfrac{3x+1}{x-2}+\dfrac{12+x}{4-2x}=\dfrac{-6x-2+12+x}{4-2x}=$

$=\dfrac{10-5x}{4-2x}=\dfrac{5(2-x)}{2(2-x)}=\boxed{\frac52}$

(3) $f(2x-3)=\dfrac{3(2x-3)+1}{2x-3-2}=\dfrac{6x-8}{2x-5}$ ת.ה של $f(x)$: $x\neq 2$ וגם $x\neq 2,5$

(5) $f(f(x))=f\left(\dfrac{3x+1}{x-2}\right)=\dfrac{3\left(\frac{3x+1}{x-2}\right)+1}{\frac{3x+1}{x-2}-2}=\dfrac{\left[\frac{9x+3+x-2}{x-2}\right]}{\frac{3x+1-2x+4}{(x-2)}}=\boxed{\dfrac{10x+1}{x+5}}$ ת.ה: $x\neq 2$ וגם $\boxed{x\neq -5}$

3/5

④ (1) צ"ל: פונק' y חסומה בתחום הנתון:

$$y=\frac{x+2}{2x-3}\ ,\quad x\geq 2$$

לכן, $x\geq 2$

$2x-3\geq 1$; $\boxed{x+2\geq 4}$

$$\boxed{0<\frac{1}{2x-3}\leq 1}\ !\quad \forall x\geq 2$$

לכן ננסה לבדוק האם מתקיים ש:

$$\left|\frac{x+2}{2x-3}\right|\leq 4$$

(*) בגלל הערכה גסה אפני שראינו כי מדובר בביטוי חיובי ממש, אז נבדוק האם חסום מלמעלה ע"י 4 למשל

$$-4\leq\frac{x+2}{2x-3}\leq 4$$

מתקיים לכל x בת.ה. כי הביטוי חיובי ממש לכל x בת.ה.

$$\frac{x+2}{2x-3}\leq 4 \quad \Big|\cdot(2x-3)$$

חיובי

$$x+2\leq 8x-12$$
$$7x\geq 14$$
$$x\geq 2$$

ז"א קיבלנו כי עבור כל $x\geq 2$ הביטוי חסום מלמעלה ע"י 4 ; וזהו בדיוק תחום ההגדרה הנתון

לכן y חסומה בתחום הנתון.

(2) $y=2-\cos(4-x)\ ,\ x\in\mathbb{R}$

$$-1\leq\cos(4-x)\leq 1$$
$$1\geq-\cos(4-x)\geq-1$$
$$3\geq\underbrace{2-\cos(4-x)}_{y}\geq 1$$

לכן הראינו כי y חסומה בתחום הנתון.

⑤

(1) $f(x)=x^4+3x^2+1$ נבדוק האם f זוגית?

$$f(-x)=(-x)^4+3(-x)^2+1=x^4+3x^2+1=f(x)$$
f - זוגית.

(2) $f(x)=x^2+3\sin^2 x$

$$f(-x)=(-x)^2+3[\sin(-x)]^2=x^2+3[-\sin(x)]^2=x^2+3[\sin(x)]^2=f(x)$$

$\sin(x)$ פונק' אי-זוגית

לכן f זוגית.

(3) $f(x)=\dfrac{\cos 3x}{\sin 2x\cdot\ln|x^2-1|}$

פונק' זוגית

ניתן לרשום

$$f(-x)=\frac{\cos(3(-x))}{\sin 2(-x)\cdot\ln|(-x)^2-1|}=\frac{\cos(-3x)}{\sin(-2x)\cdot\ln|x^2-1|}=\frac{1}{\sin(-2x)}\cdot\left[\frac{\cos(-3x)}{\ln|x^2-1|}\right]$$

אי-זוגית! פונק' זוגית פונק' אי-זוגית זוגית

לכן התוצאה היא גם פונק' אי-זוגית!

4/5

קבוצות חסומות ולא חסומות:

(6) $A = \{x\in\mathbb{R} \mid x = \frac{2n^2+n}{4n},\ n\in\mathbb{N}\}$

נראה כמה איברי A: $\frac{2+1}{4}, \frac{8+2}{8}, \frac{18+3}{12}, \dots$

$\downarrow$

$\frac{3}{4}, \frac{10}{8}, \frac{21}{12}$

האיברים גדלים ככל ש-n גדל.

חסם מלרע ל-A הוא $\frac{3}{4}$ - האיבר הראשון.

נוכיח כי A לא חסומה מלעיל:

$$\forall M:\ \exists x\in A:\ x>M$$

[נניח ב-x כללי ונחפש איזה x מקיים בהינתן M מסויים]

$$\frac{2n^2+n}{4n} > M \qquad \frac{2n^2+n}{4n} = \boxed{\frac{n}{2}+\frac{1}{4} > M}$$

$$2n+1>4M$$

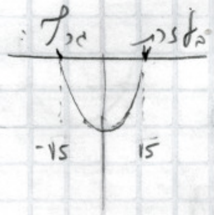
$$n > \left(\frac{4M-1}{2}\right)$$

לכן אם נקח את $n_0 = \left[\frac{4M-1}{2}\right]+1$

נקבל ש-$x_0 > M$.

סה"כ הראינו כי A קבוצה לא חסומה מלעיל ולכן לא חסומה.

$B=\{x\in\mathbb{R} \mid x^2<5\}$ ניתן לרשום את הקבוצה בצורה גרפית:



$$-\sqrt5<x<\sqrt5$$

לכן $\text{Inf}(B)=-\sqrt5$

$\text{Sup}(B)=\sqrt5$ {אין מינימום ומקסימום}

צ"ל: קיים M- סופרמום ! m- אינפימום כך שלכל $x\in B$ $x\le M$! $x\ge m$.

ניתן להוכיח מהגדרת הקבוצה:

$$x^2<5$$

$$x^2-5<0$$

$-\sqrt5<x<\sqrt5$ לכל $x\in B$

לכן $M=\sqrt5$! $m=-\sqrt5$! לכל $x\in B$

$x<M$ וגם $x>m$

$C=\{x\in\mathbb{R} \mid x=(-1)^n+\sin\frac{n\pi}{2},\ n\in\mathbb{N}\}$

איברי הקבוצה C: $-1+\sin 90°,\ 1+\sin 180°, \dots$

$$\underbrace{-1+1,\ 1+0,\ -1-1,\ 1+0,\ -1+1,\ \dots}_{0,\ 1,\ -2,\ 1,\ 0,\ \dots}$$

סה"כ איברי הקבוצה הם $0, 1, -2$

לכן $C=\{0,1,-2\}$

לכן $\text{Inf}(C)=\text{Min}(C)=-2$

$\text{Sup}(C)=\text{Max}(C)=1.$

5/5

$D=\{x\in\mathbb{R} \mid x=\frac{(-1)^n}{n},\ n\in\mathbb{N}\}$

נראה את איברי D: $\frac{-1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{-1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$

D מורכב מחלק זוגי [איברים הולכים וקטנים] וחלק אי-זוגי [איברים הולכים וגדלים]

$\operatorname{Inf}(D)=\operatorname{Min}(D)=-1$

$\operatorname{Sup}(D)=\operatorname{Max}(D)=\frac{1}{2}$

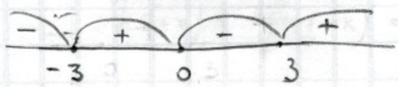
$E=\{x\in\mathbb{R} \mid x(x^2-9)<0\}$

$x(x^2-9)<0$

נראה את איברי E באמצעות פתרון אי-השוויון הנתון

$x(x^2-9)<0$

$x=0$ $x=3,\ x=-3$



לכן $x\in(-\infty,-3)\cup(0,3)$

אם כל איברי E הן איברי הקבוצה $(-\infty,-3)\cup(0,3)$

אז E חסומה מלעיל [על ידי 3]

אבל לא חסומה מלרע.

נוכיח כי E לא חסומה:

$\forall m:\ \exists x\in E:\ x<m$

$x(x^2-9)<0$ לפי הגדרת הקבוצה

לכן לכל $m\geq 0$ כל איברי הקבוצה השליליים קטנים מ m.

עבור $m<0$ ניקח $x_0=m-3$, אז $x_0<m$ ומתקיים

$(m-3)((m-3)^2-9)<0$ מ.ש.ל.

7) הוכחה: אם S הוא סופרמום של הקבוצה A, נניח בשלילה כי לא

מתקיים: $\forall\varepsilon>0\ \exists x\in A:(S-\varepsilon)<x\leq S$

כלומר $\exists\varepsilon>0:\ \forall x\in A:(x\leq S-\varepsilon)$ או $(x>S)$

אם $\forall x\in A\ x>S$, אז S איננו סופרמום של A וזאת סתירה.

אם $\forall x\in A\ x\leq S-\varepsilon$, אז $(S-\varepsilon)$ הוא חסם מלעיל יותר קטן

מ-S $\Leftarrow$ אז $(S-\varepsilon)$ הוא הסופרמום ! S לא סופרמום בסתירה.

לכן הכיוון כי מכל מקרה הגענו לסתירה הנחת השלילה לא מתקיימת.

לכן אם S סופרמום של A אז לכל $\varepsilon>0$ קיים $x\in A$

כך ש $S-\varepsilon<x\leq S$.

משל

תרגיל מס' 4

ההגשה בזוגות בלבד עד : 11/12/05

פונקציות.

1. בדקו האם הפונקציות הבאות חד-חד ערכיות בתחום הגדרתן:

1. $f(x)=3^{x-1}$
2. $f(x)=\ln(2x-5)$
3. $f(x)=x+[x]$

2. תהי פונקציה $f(x)$, המוגדרת בתחום $0<x<1$. מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציות הבאות:

1. $f(\cos x)$
2. $f(\ln x)$

3. הרכיבו את זוגות הפונקציות הבאים ($f\circ g, g\circ f$)ץ ציינו מהו תחום ההגדרה והטווח של $f, g, f\circ g, g\circ f$.(אם יש צורך, תגדירו תחום הגדרה מתאים).

1. $f(x)=2^{3x-5}+2x, g(x)=\log_2(x+5)$
2. $f(x)=\dfrac{x+1}{3x-2}, g(x)=\dfrac{1}{x-1}$

4. עבור הפונקציות הבאות קבעו האם יש להן פונקציה הפוכה. אם כן, מצאו אותן:

1. $f(x)=\{x^2-4, x>0\ , x^2+4, x\le 0\ \}$
2. $f(x)=[x+1]-2$

<u>סדרות.</u>

5. בדקו האם הסדרות הבאות מונוטוניות:

1. $a_n = 2\sqrt{n} + \frac{1}{n^2}$
2. $a_n = \frac{n-1}{n^2-1}$
3. $a_n = \frac{3^n}{2n}$
4. $a_n = n^2 + 2n + 1$
5. $a_n = \frac{1}{\cos^2 n - 1}$
6. $a_n = \frac{1}{4} + \frac{1}{5^n}$

6. בדקו האם הסדרות הבאות חסומות. הוכיחו את טענתכם לפי ההגדרה.

1. $a_n = \frac{3}{n} + (-1)^n$
2. $a_{n+1} = \sqrt{3a_n}, a_1 = \sqrt{3}$
3. $a_n = \frac{1}{3} - \frac{1}{2^n}$
4. $a_n = \frac{n^2+1}{n+3}$

בהצלחה!

פתרון תרגיל בית מס' 4

פונקציות:

1 $f(x)$ פונקציה חד-חד ערכית אם $f(x_1)=f(x_2) \Rightarrow x_1=x_2$ לכל $x_1,x_2\in D$.

(1) $f(x)=3^{x-1}$

נניח $3^{x_1-1}=3^{x_2-1}$ $\quad \forall x_1,x_2\in D$, $D=\mathbb{R}$

$$\Downarrow$$
$$x_1-\cancel{1}=x_2-\cancel{1}$$
$$\underline{x_1=x_2}$$

לכן $f(x)$ פונק' חח"ע.

(2) $f(x)=\ln(2x-5)$

ת.ה: $2x-5>0$, $2x>5$, $\boxed{x>2.5}$

נניח $\ln(2x_1-5)=\ln(2x_2-5)$ $\quad \forall x_1,x_2\in D$, $D=(2.5,\infty)$

$$\Downarrow$$
$$2x_1-\cancel{5}=2x_2-\cancel{5} \quad \Big| \times\tfrac{1}{2}$$
$$\Downarrow$$
$$x_1=x_2$$

(3) $f(x)=x+[x]$

נניח $x_1+[x_1]=x_2+[x_2]$ $\quad \forall x_1,x_2\in D$

$[x_1]=[x_2]$:

$\left\{ \text{אז } |x_2-x_1|<1 \text{ כאשר } x_1<[x_1]+1,\ x_2<[x_1]+1 \right\}$

אז ניתן לצמצם את הערך השלם בשני האגפים ונקבל $x_1=x_2$.

$[x_1]\neq[x_2]$:

נסמן את $x_1=[x_1]+d_1$, $x_2=[x_2]+d_2$ כאשר $1>d_1,d_2\geq 0$

אז

$$2[x_1]+d_1=2[x_2]+d_2$$
$$\underbrace{2\big([x_1]-[x_2]\big)}_{\text{מספר שלם}}=\underbrace{d_2-d_1}_{\text{שבר או } 0}$$

אם $d_2-d_1=0 \Rightarrow$ אז $d_2=d_1$ ונקבל כי $[x_1]=[x_2]$ בסתירה להנחת המקרה.

אם $1>d_2-d_1>0$ אזי סתירה כי מספר שלם לא יהיה שווה לשבר.

המקרה הנ"ל לא יתכן, אזי מתקיים כי $x_1=x_2$ ואזי $f(x)$ פונק' חח"ע.

2 $f(x)$ מוגדרת עבור $0<x<1$

(1) $f(\cos x)$ נבדוק עבור אילו ערכי x מתקיים $0<\cos x<1$

$$\boxed{-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}}$$

(2) $f(\ln x)$ נבדוק עבור אילו ערכי x מתקיים

$$0<\ln x<1$$
$$\ln 1<\ln x<\ln e$$
$$\Downarrow$$
$$\boxed{1<x<e}$$

(*) ניתן לראות את פתרון השאלה כתרגיל בהרכבת פונקציות: $f(x)$ מוגדרת עבור $(0,1)$ נדרש לבדוק מתי מוגדרת ההרכבה של $f\circ g(x)$, כאשר

(1) $g(x)=\cos x$

(2) $g(x)=\ln x$

2/7

3

הרכבת פונקציות: (1) $f(x) = 2^{3x-5} + 2x$

$g(x) = \log_2(x+5)$

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ת.ה: $g: \quad x+5>0$

$\boxed{x>-5}$

$(-5,\infty) \to \mathbb{R}$

$f\circ g(x) = f(g(x)) = f(\log_2(x+5)) =$

הטווח של g מוכל בת.ה. של f

$= 2^{3\cdot\log_2(x+5)-5} + 2\cdot\log_2(x+5) = (x+5)^3 \cdot \frac{1}{2^5} + 2\log_2(x+5)$, $\boxed{x>-5}$

(*) אם אנו למצוא הרכבה $g\circ f(x)$ חייבים לבדוק האם הטווח של f מוכל בתחום של g: לפי ההגדרה המקורית - לא. לכן אם נגדיר ת.ה. חדש ל-f כך שהטווח שלה יהיה מוכל בתחום של g ⇐ נמצא הרכבה.

$\underbrace{2^{3x-5}+2x}_{\text{ערכי טווח של } f} > \underset{\text{תחום של } g}{-5}$

$2^{3x-5} > -2x-5$

הערה: (*) מתקיים לכל $\boxed{x\geq 0}$

ניתן לבדוק האם קיימים ערכי x כך ש $x<0$, אבל לצורך תרגיל זה מספיק להסתפק בתחום $D': x\geq 0$ כך שנקבל $f: D'\to E'$

כך ש $E' \subset (-5,\infty)$, כלומר הטווח של f מוכל בתחום של g.

וניתן למצוא הרכבה $g\circ f(x)$

$g\circ f(x) = g(f(x)) =$

$= g(2^{3x-5}+2x) = \log_2(2^{3x-5}+2x+5) \quad (x\geq 0)$

$g(x) = \frac{1}{x-1}$ $\qquad$ $f(x) = \frac{x+1}{3x-2}$ $\qquad$ (2) 3

ת.ה:

$g: x \neq 1$ $\qquad$ $f: 3x-2 \neq 0$, $x \neq \frac{2}{3}$

$g: \mathbb{R}\setminus\{1\} \to \mathbb{R}$ $\qquad$ $f: \mathbb{R}\setminus\{\frac{2}{3}\} \to \mathbb{R}$

$g\circ f(x) = g(f(x))$

הטווח של f הוא $\mathbb{R}$ והתחום של g הוא $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ נבדוק

$\{x \neq \frac{2}{3}\}$ $\quad \frac{x+1}{3x-2} = 1$

$x+1 = 3x-2$

$3 = 2x$

$\boxed{x = 1.5}$

$x = 1.5$ מה הבעיה?

e-f לא יקבל לפי ת.ה שלו.

לכן סה"כ ניתן לבצע הרכבה $f: \mathbb{R}\setminus\{\frac{2}{3}, 1.5\} \to \mathbb{R}\setminus\{1\}$

$$g\circ f(x) = g(f(x)) = g\left(\frac{x+1}{3x-2}\right) = \frac{1}{\frac{x+1}{3x-2}-1} = \frac{1}{\frac{x+1-3x+2}{3x-2}} = \boxed{\frac{3x-2}{-2x+3}} \quad x \neq 1.5,\ x \neq \frac{2}{3}$$

$f\circ g(x) = f(g(x))$

נבדוק שהטווח של g יהיה אצל ת"ה f [נבנה ת.ה חדש]

$\{x \neq 1\}$ $\quad \frac{1}{x-1} = \frac{2}{3}$

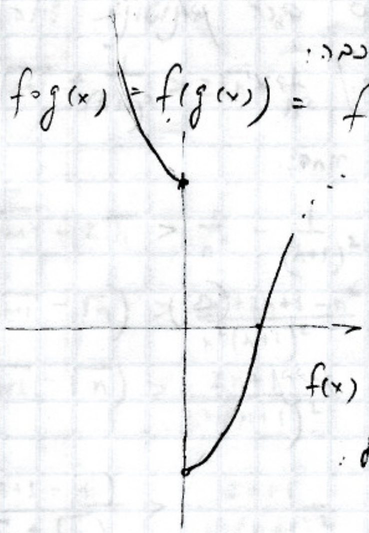
$2x-2 = 3$

$2x = 5$

$\boxed{x = 2.5}$

ת"ח נגדיר $g': \mathbb{R}\setminus\{1, \frac{5}{2}\} \to \mathbb{R}\setminus\{\frac{2}{3}\}$ וניתן לבצע הרכבה:

$$f\circ g(x) = f(g(x)) = f\left(\frac{1}{x-1}\right) = \frac{\frac{1}{x-1}+1}{\frac{3}{x-1}-2} = \frac{\frac{1+x-1}{\cancel{x-1}}}{\frac{3-2x+2}{\cancel{x-1}}} = \boxed{\frac{x}{5-2x}} \quad x \neq 2.5,\ x \neq 1$$



$$f(x) = \begin{cases} x^2-4, & x > 0 \\ x^2+4, & x \leq 0 \end{cases} \qquad (1) \quad 4$$

נבדוק האם f חח"ע ועל:

לפי הגרף ניתן לראות ש$f(x)$ כנראה לא חח"ע:

נבדוק: נניח כי $f(x_1) = f(x_2)$:

אם $x_1, x_2 > 0$ או $x_{1,2} \leq 0$ נקבל שוויון, אבל נבדוק במקרה $x_1 > 0$, $x_2 \leq 0$

$x_1^2 - 4 = x_2^2 + 4$

$x_1^2 - x_2^2 = 8$

$\{x_1^2 = x_2^2 + 8$

$\{x_1 > 0\}$ $x_1 = \sqrt{x_2^2+8}$

אזי קיימים $x_1 \neq x_2$ כך ש $f(x_1) = f(x_2)$

לכן f אינה חח"ע.

לכן לא קיימת פונק' הפוכה.

4/7

(4) (2) $f(x) = [x+1] - 2$ נבדוק האם f חח"ע:

נניח כי $f(x_1)=f(x_2)$ עבור $x_1,x_2 \in D$:

$$[x_1+1]-2 = [x_2+1]-2$$

$$[x_1+1] = [x_2+1]$$

ולפי הגדרה הכללית נסמן כך: $x_1=[x_1]+d_1$, $x_2=[x_2]+d_2$ כך ש- $0 \le d_1, d_2 < 1$

אז:

$$[x_1+1] = [x_2+1]$$

$$[x_1]\cancel{+1} = [x_2]\cancel{+1}$$

$$x_1-d_1 = x_2-d_2$$

$x_1 = x_2 - d_2 + d_1$, כלומר קיימים $x_1 \neq x_2$

כך ש- $f(x_1)=f(x_2)$, לכן f איננה פונקציה חח"ע.

לכן לא קיימת פונקציה הפוכה.

(5) (2) $a_n = \frac{n-1}{n^2-1}$ נבדוק לפי הגדרה: קיים n_0 כך שלכל $n \ge n_0$ $a_{n+1} \le a_n$

$$\frac{(n+1)-1}{(n+1)^2-1} \le \frac{n-1}{n^2-1}$$

$$\frac{n}{n^2+2n} \le \frac{\cancel{n-1}}{\cancel{(n-1)}(n+1)}$$

$$\frac{1}{n+2} \le \frac{1}{n+1}$$

$$n+2 \ge n+1$$

$$2 \ge 1$$

נכון לכל n

לכן a_n סדרה מונוטונית יורדת [אפשר לכתוב] כי a_n יורדת ממש

(3) $a_n = \frac{3^n}{2n}$

נבדוק את $\frac{a_{n+1}}{a_n}$:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{3^{n+1}}{2(n+1)} \cdot \frac{2n}{3^n} = \frac{6n}{2(n+1)} =$$

$$\frac{3n}{n+1} > 1 \quad !!! \quad \left\{ \begin{array}{l} 3n > n+1 \\ 2n > 1 \\ n > \frac{1}{2} \end{array} \right\}$$

מתקיים לכל $n \in N$

לכן a_n סדרה מונוטונית עולה!

(4) $a_n = n^2+2n+1$ } $a_n = (n+1)^2$ עבור $n \in N$

בדומה לזה הסדרה גדלה ממש

נראה כי קיים n_0 כך שלכל $n \ge n_0$ $a_{n+1} > a_n$

$$(n+1)^2 + 2(n+1) + 1 > n^2+2n+1$$

$$n^2+2n+1+2n+2+1 > n^2+2n+1$$

$$2n+3 > 0$$

לכל $n \in N$!

לכן a_n מונוטונית עולה ממש.

5/7

(5) $a_n = \frac{1}{\cos^2 n - 1}$

נשתמש בזהות: $\sin^2 n + \cos^2 n = 1 \Rightarrow \cos^2 n - 1 = \sin^2 n$

צ"ל $a_n = \frac{1}{\cos^2 n - 1} = \frac{1}{\sin^2 n}$

ידוע ש $a'_n = \sin n$ סדרה לא מונוטונית, ואז גם הסדרה $a'_n = \sin^2 n$

חיובית, אבל לא מונוטונית. לכן $a_n = \frac{1}{\sin^2 n}$ סדרה לא מונוטונית.

[ניתן גם להראות שמתקיים $a_{n+1} > a_n$ באינסוף מקומות וגם $a_n > a_{n+1}$

באינסוף מקומות ואז a_n איננה מונוטונית לפי ההגדרה.]

(6) $a_n = \frac{1}{4} + \frac{1}{5^n}$ נראה כי a_n סדרה מונוטונית יורדת [ממש]

קיים n_0 כך שלכל $n \ge n_0$ מתקיים $a_{n+1} < a_n$

$$\cancel{\frac{1}{4}} + \frac{1}{5^{n+1}} < \cancel{\frac{1}{4}} + \frac{1}{5^n}$$

$$\frac{1}{5^{n+1}} < \frac{1}{5^n} \quad / \times 5^n$$

$$\frac{1}{5} < 1$$

נכון לכל $n \in \mathbb{N}$.

לכן a_n סדרה מונוטונית יורדת ממש.

(1) $a_n = 2\sqrt{n} + \frac{1}{n^2}$ נראה ש $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה מונוטונית עולה [ממש]

קיים n_0 כך שלכל $n \ge n_0$ $a_{n+1} > a_n$: $\boxed{2\sqrt{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} > 2\sqrt{n} + \frac{1}{n^2}}$

(*) נעביר את הביטויים עם השורש לאגף אחד:

$$2\sqrt{n+1} - 2\sqrt{n} > \frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2}$$

$$2\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) > \frac{\cancel{n^2} + 2n + 1 - \cancel{n^2}}{n^2(n+1)^2}$$

$$2\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) > \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$$

נכפיל את אגף שמאל בצמוד:

$$\frac{2(n+1-\cancel{n})}{(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})} > \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$$

$$\frac{2}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} > \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$$

נשתמש בקירובים [נקטין אגף שמאל]:

$$\frac{2}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} > \frac{2}{(n+1)+n} = \frac{2(n+1)}{(2n+1)(n+1)} = \frac{2n+2}{(2n+1)(n+1)} > \frac{2n+2}{(2n+1)(n+1)^2} \boxed{>} \frac{2n+2}{n^2(n+1)^2} > \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$$

לכל n

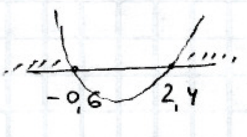
נכפיל ב-$(n+1)$

(*)

[כדי להגדיל את המכנה] $2n+1 < n^2$

$n^2 - 2n - 1 > 0$

$n_{1,2} = 1 \pm \sqrt{2} \approx {2.4 \atop -0.6}$



מ.ש.ל.

אז $n_0 = 3$ ולכל $n \ge n_0$

$a_{n+1} > a_n$

לכן זה מתקיים לכל $n > 2$.

6/7

6

(1) $a_n = \frac{3}{n} + (-1)^n$

נראה כמה איברים ראשונים של הסדרה:

$a_1 = 2$

$a_2 = \frac{3}{2}+1 = 2.5$

$a_3 = 1-1 = 0$

$a_4 = \frac{3}{4}+1 = 1.75$

$a_5 = \frac{3}{5}-1 = -\frac{2}{5}$

$\vdots$

הסדרה חסומה: לכל n מתקיים $-1 \le a_n \le 2.5$

צ"ל: $\forall n \quad -1 \le \frac{3}{n}+(-1)^n \le 2.5$

עבור n-זוגי: $a_{n_{\text{זוגי}}} = \frac{3}{n}+1$

$\frac{3}{n}+1 \le 2.5 \quad /\times n$; $\frac{3}{n}+1 \ge -1$

$3+n \le 2.5n$; $3+n \ge -n$

$3 \le 1.5n$; $3 \ge -2n$

$2 \le n$; $n \ge -1.5$

לכן מתקיים לכל n זוגי.

עבור n-אי-זוגי: $a_{n_{\text{אי-זוגי}}} = \frac{3}{n}-1$

$\frac{3}{n}-1 \le 2.5$; $\frac{3}{n}-1 \ge -1$

$3 \le 3.5n$; $\frac{3}{n} \ge 0$

$n \ge \frac{3}{3.5}$

מתקיים לכל n [טבעי אי-זוגי]

מתקיים לכל n [אי-זוגי טבעי]

לכן הראינו כי הסדרה חסומה.

(2) $a_{n+1} = \sqrt{3a_n}$, $a_1 = \sqrt{3}$

$a_2 = \sqrt{3\cdot\sqrt{3}}$

$a_3 = \sqrt{3\cdot\sqrt{3\cdot\sqrt{3}}}$

$\vdots$

נראה שהסדרה חסומה: לכל n $\sqrt{3} \le a_n \le 3$

נוכיח באינדוקציה:

בסיס: $\sqrt{3} \le a_1 \le 3$: $\sqrt{3} = \sqrt{3} < 3$ מתקיים

הנחה: נניח כי הטענה מתקיימת עבור $n=k$: $\sqrt{3} \le a_k \le 3$

הוכחה: נוכיח כי הטענה מתקיימת עבור $n=k+1$

$a_{k+1} = \sqrt{3\cdot a_k} \le \sqrt{3\cdot 3} = 3$ [חסומה מלמעלה]

לפי הנחת האינדוקציה $a_k \le 3$

$a_{k+1} = \sqrt{3\cdot a_k} \ge \sqrt{3\cdot\sqrt{3}} = \sqrt{3}\cdot\sqrt[4]{3} > \sqrt{3}$

לפי הנחת האינדוקציה $a_k \ge \sqrt{3}$

לכן הראינו כי הסדרה חסומה.

[(*) ניתן גם להוכיח כי הסדרה מונוטונית עולה וחסומה מלמעלה לכן האיבר הראשון הוא חסם מלמטה]

7/7

(3) $a_n = \frac{1}{3} - \frac{1}{2^n}$

$a_1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{6}$

$a_2 = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$

$a_3 = \frac{1}{3} - \frac{1}{8} = \frac{5}{24}$

$\vdots$

הסדרה חסומה. נראה כי הסדרה מונוטונית עולה וחסומה מלמעלה $a_n \le \frac{1}{3}$ $\forall n$.

$$\cancel{\frac{1}{3}} - \frac{1}{2^n} \le \cancel{\frac{1}{3}}$$

$$\frac{1}{2^n} \ge 0$$

(*) כבר כאן ניתן להסיק כי זה מתקיים לכל n, לכן a_n חסומה מלמעלה על ידי $\frac{1}{3}$.

נראה כי a_n מונוטונית עולה: קיים n_0 כך שלכל n_0 מתקיים $a_{n+1} \ge a_n$

(*) a_n סדרה מונוטונית עולה ממש:

$$\cancel{\frac{1}{3}} - \frac{1}{2^{n+1}} > \cancel{\frac{1}{3}} - \frac{1}{2^n}$$

$$\frac{1}{2^{n+1}} < \frac{1}{2^n} \quad \Big| \times 2^n > 0$$

$$\frac{1}{2} < 1$$

פסוק אמת $\Leftarrow$ מתקיים לכל n.

a_n סדרה מונוטונית עולה $\leftarrow$ לכן חסומה מלמטה ע"י $a_1 = -\frac{1}{6}$.

הראינו כי a_n <u>חסומה</u>.

(4) $a_n = \frac{n^2+1}{n+3}$

a_n סדרה לא חסומה. נראה כי a_n לא חסומה - מלמעלה.

לכל $M>0$ קיים n_0 כך ש- $a_{n_0} > M$.

$$\frac{n^2+1}{n+3} > M$$

$$\frac{n^2+1}{n+3} > \frac{n^2}{n+3n} = \boxed{\frac{n}{4} > M} \qquad n > 4M$$

אז נבחר $n_0 = [4M]+1$ ולכן לכל M $a_{n_0} > M$.

אז a_n <u>לא</u> חסומה.

תרגיל מס' 5

ההגשה בזוגות בלבד עד : 18/12/05

סדרות:

הוכיחו את המשפטים הבאים:

1. אם לסדרה יש גבול אזי הוא יחיד.

2. אריתמטיקה של גבולות: יהיו $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרות מתכנסות: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A, \lim\limits_{n\to\infty} b_n = B$ אזי

1. לכל קבוע c, $\lim\limits_{n\to\infty} ca_n = c\cdot\lim\limits_{n\to\infty} a_n = cA$
2. $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n b_n) = (\lim\limits_{n\to\infty} a_n)\cdot(\lim\limits_{n\to\infty} b_n) = A\cdot B$
3. אם בנוסף לנתונים הנ"ל, לכל $n\in N$, $b_n \neq 0$, $B\neq 0$ אזי

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \frac{(\lim\limits_{n\to\infty} a_n)}{(\lim\limits_{n\to\infty} b_n)} = \frac{A}{B}$$

3. הוכיחו:

1. אם c>0 אזי $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{c} = 1$
2. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n} = 1$

4. הוכיחו: אם $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n| = 0$ אזי $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$

5. הוכח או הפרך:

1. אם קיימים $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n+b_n)$ וגם $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-b_n)$ אזי קיימים $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$
2. אם $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n\cdot b_n) = 0$ אזי $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ או $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$
3. אם $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$ ולסדרה $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ אין גבול אזי $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n\cdot b_n)$ לא קיים.
4. אם $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ ולכל n $a_n \neq 0$ אז $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{a_n} = \infty$ או $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{a_n} = -\infty$.
5. אם $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$ אז $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{a_n} = 0$.

6. חשבו את הגבולות הבאים:

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$
2. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n-1)(2n+1)}{(3n-2)(n+4)}$
3. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 7}+\ldots+\frac{1}{(3n-2)\cdot(3n+1)}\right)$
4. $\lim\limits_{n\to\infty}n(\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-1})$
5. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}+\ldots+\sqrt[n]{n}}{n}$
6. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n}{n^2+n+(-1)^n}$
7. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)!-n!}{(n+1)!+n!}$
8. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(-1)^n}{n^2+2}$

בהצלחה!

פתרון תרגיל בית מס' 2

סדרות:

1. אם לסדרה יש גבול אזי הוא יחיד [הוכחה בספר "חדו"א 1", בן ציון קון, פרק 3 (סדרות), חלק ג גבולות של סדרות מתכנסות, משפט 1, עמ' 63]

2. אזי אריתמטיקה של גבולות [חדו"א 1, בן-ציון קון, פרק 3, חלק ב, משפט 3, עמ' 65]

3. (*) ההוכחה נמצאת בספר "חדו"א 1" של בן ציון קון, עמ' 69.

(1) אם $c>0$ אזי $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{c} = 1$.

הוכחה: אם נרשום $a_n = c$ לכל $n\in\mathbb{N}$, אזי לפי המשפט

[(*) אם קיים הגבול $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n-1}}$ אזי הסדרה $\{\sqrt[n]{a_n}\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת ומתקיים השוויון $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n-1}}$]

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{c} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{n\to a} \frac{c}{c} = 1.$$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$

הוכחה: בדומה שיטה נסמן $a_n = n$ לכל $n\in\mathbb{N}$ ולפי המשפט:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n-1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n-1} = 1$$

4. צ"ל: אם $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = 0$ אזי $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$

הוכחה:

אם מתקיים $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = 0$, אזי לפי ההגדרה

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 : \forall n \geq n_0 \quad \big||a_n| - 0\big| < \varepsilon$$

$$\big||a_n| - 0\big| = \big||a_n|\big| = |a_n| = |a_n - 0| < \varepsilon$$

אזי קיבלנו כי לכל $\varepsilon > 0$ קיים n_0 כך שלכל $n \geq n_0$ מתקיים $|a_n - 0| < \varepsilon$, ז"א, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$

(1) הטענה נכונה: נסמן $x_n = \frac{1}{2}(a_n + b_n)$ ו- $y_n = \frac{1}{2}(a_n - b_n)$

לפי הנתון $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ ו- $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרות מתכנסות. לכן נתבונן בסדרה $\{x_n + y_n\}_{n=1}^{\infty}$ ו- $\{x_n - y_n\}_{n=1}^{\infty}$:

$$\lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}(a_n + \cancel{b_n}) + \frac{1}{2}(a_n - \cancel{b_n}) = \lim_{n\to\infty} a_n$$

$$\lim_{n\to\infty}(x_n - y_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}(\cancel{a_n} + b_n) - \frac{1}{2}(\cancel{a_n} - b_n) = \lim_{n\to\infty} b_n$$

לפי אריתמטיקה של גבולות אם $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ ו- $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסות, אזי גם $\{x_n + y_n\}_{n=1}^{\infty}$ ו- $\{x_n - y_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרות מתכנסות, אזי קיבלנו כי קיימים $\lim_{n\to\infty} a_n$ ו- $\lim_{n\to\infty} b_n$ מש.ל.

(2) הטענה __לא__ נכונה.

דוגמא נגדית: נגדיר $a_n = 1 + (-1)^n$ - סדרה לא מתכנסת [illegible]

$b_n = 1 - (-1)^n$ - סדרה לא מתכנסת [illegible]

אבל
$$\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = \lim_{n\to\infty}\left((1+(-1)^n)\cdot(1-(-1)^n)\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(1 - \left[(-1)^n\right]^2\right) = \lim_{n\to\infty}(1 - \underbrace{1^n}_{1}) = \lim_{n\to\infty} 0 = 0$$

(3) הטענה __לא__ נכונה.

דוגמא נגדית: $\lim_{n\to\infty} a_n = L$, נגדיר $a_n = \frac{1}{n}$: $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$

ו- $b_n = (-1)^n$ - סדרה לא מתכנסת.

אבל
$$\lim_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = \lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^n}{n} = 0$$

(4) הטענה __לא__ נכונה.

דוגמא נגדית: נגדיר $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$, $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

וגם לכל n $a_n \neq 0$

אבל לא קיים הגבול: $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{(-1)^n}$

{ הסדרה $a_n' = \frac{n}{(-1)^n}$ היא סדרה לא חסומה גם מלמעלה וגם מלמטה ולא מתכנסת לא ל-(∞) ולא ל-$(-\infty)$ }.

[קיים אינסוף איברי a_n' ששואפים ל-∞ ו-ל-$(-\infty)$]

3/4

(5) אם $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ אזי $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = 0$

הוכחה:

עבור $\varepsilon > 0$ נבחר $M = \frac{1}{\varepsilon}$. אזי קיים n_0 כך ש: $a_n > M$ לכל $n \geq n_0$

ז"א $a_n > \frac{1}{\varepsilon}$. אזי $\frac{1}{a_n} < \varepsilon$ אבל גם $-\varepsilon < 0 < \frac{1}{a_n}$

ז"א לפי הגדרת הערך המוחלט $\frac{1}{a_n}$ $\quad -\varepsilon < \frac{1}{a_n} < \varepsilon$

$$\Downarrow$$

$$\left|\frac{1}{a_n}\right| < \varepsilon$$

ובפרט $\left|\frac{1}{a_n} - 0\right| < \varepsilon$ {מתקיים לכל $\varepsilon > 0$}

אזי $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = 0$ לפי ההגדרה.

מ.ש.ל.

(6) (1)

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n}\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) \underset{\text{כפל בצמוד}}{=} \lim_{n\to\infty} \sqrt{n} \cdot \frac{\cancel{n}+1-\cancel{n}}{\left(\sqrt{n+1} + \sqrt{n}\right)} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \overset{|:\sqrt{n}}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\underset{\downarrow 0}{\frac{1}{n}}} + 1} = \frac{1}{2}$$

(2)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n-1)(2n+1)}{(3n-2)(n+4)} \overset{|:n}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{\left(1 - \overset{\nearrow 0}{\frac{1}{n}}\right)\left(2 + \overset{\nearrow 0}{\frac{1}{n}}\right)}{\left(3 - \underset{\downarrow 0}{\frac{2}{n}}\right)\left(1 + \underset{\downarrow 0}{\frac{4}{n}}\right)} = \frac{2}{3}$$

(3)

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{1\cdot 4} + \frac{1}{4\cdot 7} + \dots + \frac{1}{(3n-2)(3n+1)}\right)$$

(*)

$$\frac{\frac{1}{3}}{(3n-2)} - \frac{\frac{1}{3}}{(3n+1)} = \frac{\cancel{n} + \frac{1}{3} - \cancel{n} + \frac{2}{3}}{(3n-2)(3n+1)} = \frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$$

אזי

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{1\cdot 4} + \frac{1}{4\cdot 7} + \dots + \frac{1}{(3n-2)(3n+1)}\right) = \lim_{n\to\infty} \left(\left(\frac{1}{3} - \cancel{\frac{1}{12}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{12}} - \frac{1}{21}\right) + \dots + \left(\cancel{\frac{1}{3(3n-2)}} - \frac{1}{3(3n+1)}\right)\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{3} - \underset{\downarrow 0}{\frac{1}{3(3n+1)}}\right) = \frac{1}{3}$$

(4)

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt{n^2+1} - \sqrt{n^2-1}\right) = \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{\cancel{n^2}+1-\cancel{n^2}+1}{\sqrt{n^2+1} + \sqrt{n^2-1}}\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2n}{\sqrt{n^2+1} + \sqrt{n^2-1}} \overset{|:n}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{2}{\sqrt{1+\underset{\downarrow 0}{\frac{1}{n^2}}} + \sqrt{1-\underset{\downarrow 0}{\frac{1}{n^2}}}} = \frac{2}{1+1} = 1.$$

$n>0$!!!

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1+\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}+\ldots+\sqrt[n]{n}}{n} \qquad (5)$$

$$1 = \frac{1}{n}\cdot n \le \frac{1}{n}+\frac{\sqrt{2}}{n}+\frac{\sqrt[3]{3}}{n}+\ldots+\frac{\sqrt[n]{n}}{n} \le \frac{\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}}{n}\cdot n = 1$$

(*) לפי כלל סנדוויץ'

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1+\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}+\ldots+\sqrt[n]{n}}{n} = 1$$

(**) נכון שקיימים כמה מרכיבי הסכום
אשר אינם עונים על המסק [≤ או ≥] אולם
ניתן להתעלם בסכום של $(n-k)$ איברים, כאשר k סופי [קטן יחסית]

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n}{n^2+n+(-1)^n} \overset{1:n^2}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{3}{n}\to 0}{1+\underset{\downarrow 0}{\frac{1}{n}}+\underset{\downarrow 0}{\frac{(-1)^n}{n^2}}} = \frac{0}{1} = 0 \qquad (6)$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!-n!}{(n+1)!+n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n!}(n+1-1)}{\cancel{n!}(n+1+1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+2} = 1 \qquad (7)$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+2} \overset{1:n^2}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(-1)^n}{n^2}\to 0}{1+\frac{2}{n^2}\to 0} = \frac{0}{1} = 0 \qquad (8)$$

תרגיל מס' 6

ההגשה בזוגות בלבד עד : 25/12/05

גבול של סדרה:

1. הוכיחו לפי ההגדרה:

1. $\lim_{n\to\infty}(n^2-n)=\infty$
2. $\lim_{n\to\infty}\frac{7n^5+3}{n^2}=\infty$
3. $\lim_{n\to\infty}a_n=-\infty, a_n=-(2^n+3^n+...+50^n)$

2. בדקו האם הסדרות הבאות מתכנסות. במידה וכן, חשבו את גבולותיהן:

1. נתון $\forall n>=2: a_n=\sqrt{a_{n-1}}, a_1=c, 0<c<1$
2. $\forall n>=2: a_n=\frac{1}{8}+{a_{n-1}}^2, a_1=\frac{1}{8}$
3. $a_{n+1}=a_n\cdot\frac{6+a_n}{3+2a_n}, a_1=5$ (רמז: הוכיחו כי הסדרה חסומה על ידי 3)

3. מצאו את הגבולות החלקיים :

1. $a_n=\frac{(-1)^n+1}{2}$
2. $a_n=(2-\frac{1}{n^3-1})+(-1)^n$
3. $a_n=\left(\frac{(-1)^n+n}{n}\right)^n$

4. הוכיחו כי לסדרות הבאות אין גבול:

1. $a_n=1+2(-1)^{n+1}+3(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$
2. $a_n=\begin{cases}\frac{1}{n}, n=2k+1\\ \frac{n}{n+2}, n=2k\end{cases}$ k=1,2,3…
3. $a_n=\cos\left(\frac{n\pi}{17}\right)\sqrt[n]{3^n+7^n}$

5. חשבו את הגבולות הבאים (בכל דרך שנלמדה בהרצאות, תרגולים, ספרים):

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2}{\sqrt[n]{(2n)!}}$
2. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{3n^4+5n^3-24}}{3\sqrt{n-4}-2n^2}$
3. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}}+\frac{1}{\sqrt{n+2}}+...+\frac{1}{\sqrt{n+n}}\right)$
4. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n^2-7n+5}{n^2}\right)^n$
5. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{3n}{n^{10}+1}\right)^{n^9+\frac{1}{n}}$
6. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n^2-2n+1}{n^2-4n+2}\right)^n$
7. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+1}{n^2-2}\right)^{n^2}$
8. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{\frac{n^2+3}{2n+1}}$

6. בדקו לפי קריטריון קושי את התכנסות הסדרות הבאות:

1. $a_n=\frac{1}{3}+\frac{2}{5}+...+\frac{n}{2n+1}$
2. $a_n=\frac{\cos x}{3}+\frac{\cos(2x)}{3^2}+...+\frac{\cos(nx)}{3^n}$

בהצלחה!

פתרון תרגיל בית 6

1 (1) $\lim_{n\to\infty}(n^2-n)=\infty$ צ"ל: $\forall M, \exists n_0: \forall n\ge n_0 \quad a_n>M$

$a_n = n^2-n = n(n-1) > (n-1)^2 > \boxed{n-1>M}$

$n>M+1$

לכן $\boxed{n_0=[M+1]+1}$ מתקיים כי לכל $n\ge n_0$ $a_n>M$.

(2) $\lim_{n\to\infty}\frac{7n^5+3}{n^2}=\infty$ צ"ל: $\forall M\ \exists n_0: \forall n\ge n_0 \quad a_n>M$

$a_n=\frac{7n^5+3}{n^2} > \frac{7n^5}{n^2} = \boxed{7n^3>M}$

$n^3>\frac{M}{7} \quad n>\sqrt[3]{\frac{M}{7}}$ $\quad [M>0,\ n>0 \quad (*)]$

אז: נבחר $\boxed{n_0=\left[\sqrt[3]{\frac{M}{7}}\right]+1}$ ומתקיים כי לכל $n\ge n_0$ $a_n>M$

(3) $\lim_{n\to\infty}\left(-(2^n+3^n+\dots+50^n)\right)=-\infty$ צ"ל: $\forall m<0, \exists n_0\in\mathbb{N}: \forall n\ge n_0 \quad a_n<m$

$a_n=-(2^n+3^n+\dots+50^n) < -(\underbrace{2^n+\dots+2^n}_{50\text{ פעמים}}) = \boxed{-50\cdot 2^n<m}$

$2^n>-\frac{m}{50}$

$\log_2 2^n > \log_2(-\frac{m}{50})$

$\boxed{n_0=\left[\log_2(-\frac{m}{50})\right]+1}$ נבחר $n>\log_2(-\frac{m}{50})$ $\{m<0\ !!!\}$

2 (1) נתון $0<c<1$ $a_1=c$, $a_n=\sqrt{a_{n-1}}$ $\forall n\ge 2$.

$a_1=c$
$a_2=\sqrt{c}$
$a_3=\sqrt[4]{c}$
$\vdots$
$a_k=\sqrt[2^{(k-1)}]{c}$

(א) נבחר $c=\frac{1}{k}$, כאשר $k>1$ אז $a_1=\frac{1}{k},\ a_n=\sqrt{a_{n-1}}$

$\{a_n\}$ סדרה מונוטונית עולה: נוכיח באינדוקציה.

בסיס: $a_1=\frac{1}{k}<\frac{1}{\sqrt{k}}=a_2$

הנחה: נניח עבור $n=k$ $a_n<a_{n-1}$

הוכחה: נוכיח עבור $n=k+1$

$a_{n+1}=\sqrt{a_n}<\sqrt{a_{n-1}}=a_n$ הנחת האינדוקציה

אז a_n מונוטונית עולה.

(ב) a_n חסומה מלמעלה ע"י 3 נוכיח $a_1=c=\frac{1}{k}$ באינדוקציה כי $a_n<3$

בסיס: $a_1=\frac{1}{k}<3$

הנחה: נניח כי $a_k<3$

הוכחה: נוכיח כי $a_{k+1}<3$

$a_{k+1}=\sqrt{a_{a_k}}<\sqrt{3}<3$

אז a_n סדרה חסומה.

(ג) $\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}a_{n+1}=L \qquad a_{n+1}=\sqrt{a_n}=L$

אז $L=\sqrt{L}$

$L=0, L=1 \Leftarrow L^2=L$

$L=0$ לא אפשרי כי $0<\frac{1}{k}\le a_n<3$ אז

$\lim_{n\to\infty}a_n=1$

2/7

(2) ②

$a_1 = \frac{1}{8}$

$a_n = \frac{1}{8} + a_{n-1}^2 \qquad \forall n \ge 2$

I נראה כי הסדרה מונוטונית עולה: $a_{n+1} > a_n$ [באינדוקציה]

בסיס: $a_2 = \frac{1}{8} + \frac{1}{64} > \frac{1}{8} = a_1$

הנחה: נניח כי מתקיים עבור $n=k$: $a_k > a_{k-1}$

הוכחה: נוכיח עבור $n=k+1$:

$$a_{k+1} = \frac{1}{8} + a_k^2 > \frac{1}{8} + a_{k-1}^2 = a_k$$

הנחת האינדוקציה

לכן a_n סדרה מונוטונית עולה.

II נראה כי הסדרה חסומה [חסומה מלמטה ע"י $a_1 = \frac{1}{8}$]

נראה כי לכל n $a_n < \frac{1}{4}$ [באינדוקציה]

בסיס: $a_1 = \frac{1}{8} < \frac{1}{4}$ ✓

הנחה: נניח כי הטענה מתקיימת עבור $n=k$: $a_k < \frac{1}{4}$

הוכחה: נוכיח עבור $n=k+1$:

$$a_{k+1} = \frac{1}{8} + a_k^2 < \frac{1}{8} + \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{3}{16} < \frac{1}{4}$$

לפי הנחת האינדוקציה

אזי הוכחנו כי a_n חסומה: לכל n $\frac{1}{8} \le a_n < \frac{1}{4}$

סה"כ: הסדרה מונוטונית עולה וחסומה, לכן מתכנסת לגבול סופי.

נניח כי $\lim_{n\to\infty} a_n = c$, אזי $\frac{1}{8} + c^2 = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} a_n = c$

$$\frac{1}{8} + c^2 = c$$

$$c^2 - c + \frac{1}{8} = 0$$

$$c_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - \frac{4}{8}}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{\frac{1}{2}}}{2}$$

[$\frac{1+\sqrt{\frac{1}{2}}}{2} > \frac{1}{4}$ לכן אינו הגבול]

אזי $\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1 - \sqrt{\frac{1}{2}}}{2}$

3

② (3)

$a_1 = 5$

$a_{n+1} = a_n \cdot \frac{6+a_n}{3+2a_n}$

(I) נראה כי a_n סדרה חסומה ע"י 3 : [מאינדוקציה]

בסיס: $a_1 = 5 > 3$

הנחה: נניח כי מתקיים עבור $n=k$: $a_k > 3$

הוכחה: נוכיח עבור $n = k+1$:

$$a_{k+1} = a_k \cdot \frac{a_k+6}{3+2a_k} > a_k \underbrace{\frac{3+6}{3+2a_k}}_{\text{הנחת האינדוקציה}} > \frac{9a_k}{3a_k} > 3$$

לכן לכל n $a_n > 3$

(II) נראה כי $\{a_n\}$ סדרה מונוטונית יורדת: $a_n < a_{n-1}$

נראה כי $\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \boxed{\frac{6+a_n}{3+2a_n} < 1}$$

$$6 + a_n < 3 + 2a_n$$

$3 < a_n$ וזה מתקיים לכל n

לכן a_n סדרה מונוטונית יורדת וחסומה [מלמטה ע"י 3, מלמעלה ע"י a_1] לכן מתכנסת.

נסמן $\lim_{n\to\infty} a_n = c$ ולכן

$$c \cdot \frac{6+c}{3+2c} = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} a_n = c$$

$$\frac{\cancel{c}(6+c)}{3+2c} = \cancel{c} \quad /:c$$

$$\frac{6+c}{3+2c} = 1 \quad /\times(3+2c)$$

$$6 + c = 3 + 2c$$

$$\boxed{3 = c}$$

לכן $\lim_{n\to\infty} a_n = 3$

③ (1) $a_n = \frac{(-1)^n+1}{2}$ עבור סדרה האינדקסים $\{2k\}_{k=1}^{\infty}$

$$\{a_{2k}\}_{k=1}^{\infty} = \frac{(-1)^{2k}+1}{2} = 1$$

$$\lim_{k\to\infty} a_{2k} = 1$$

עבור סדרה האינדקסים $\{2k+1\}_{k=0}^{\infty}$

$$\{a_{2k+1}\}_{k=0}^{\infty} = \frac{(-1)^{2k+1}+1}{2} = 0$$

$$\lim_{k\to\infty} a_{2k+1} = 0$$

(2) $a_n = \left(2 - \frac{1}{n^3-1}\right) + (-1)^n$ שוב, עבור אינדקסים זוגיים:

$$\{a_{2k}\}_{k=1}^{\infty} = 3 - \frac{1}{(2k)^3-1}$$

$$\lim_{k\to\infty} a_{2k} = \lim_{k\to\infty}\Big(3 - \underbrace{\frac{1}{(2k)^3-1}}_{\to 0}\Big) = 3$$

אינדקסים אי-זוגיים:

$$\{a_{2k+1}\}_{k=0}^{\infty} = 1 - \frac{1}{(2k+1)^3-1}$$

$$\lim_{k\to\infty} a_{2k+1} = \lim_{k\to\infty}\Big(1 - \frac{1}{(2k+1)^3-1}\Big) = 1.$$

(3) ③ $a_n = \left(\frac{(-1)^n + n}{n}\right)^n$ עבור סדרה חלקית זוגיים $\{2k\}_{k=1}^{\infty}$

$$\{a_{2k}\}_{k=1}^{\infty} = \left(\frac{(-1)^{2k} + 2k}{2k}\right)^{2k} = \left(1 + \frac{1}{2k}\right)^{2k}$$

$$\lim_{k\to\infty} a_{2k} = e$$

עבור סדרה חלקית אי-זוגיים $\{2k+1\}_{k=0}^{\infty}$

$$\{a_{2k+1}\}_{k=0}^{\infty} = \left(\frac{(-1)^{2k+1} + 2k+1}{2k+1}\right)^{2k+1} = \left(1 - \frac{1}{2k+1}\right)^{2k+1}$$

$$\lim_{k\to\infty} a_{2k+1} = \frac{1}{e}$$

④ (1) $a_n = 1 + 2(-1)^{n+1} + 3(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$ לסדרה a_n אין גבול:

עבור סדרה חלקית $\{4k\}_{k=1}^{\infty}$

תת סדרה $a_{4k} = 1 + 2(-1)^{4k+1} + 3(-1)^{\frac{4k(4k-1)}{2}} = 1-2+3 = 2$

לכן $\lim_{k\to\infty} a_{4k} = 2$ גבול חלקי

עבור סדרה חלקית $\{4k-1\}_{k=1}^{\infty}$

תת סדרה $a_{4k-1} = 1 + 2(-1)^{4k-1+1} + 3(-1)^{\frac{(4k-1)(4k-2)}{2}} = 1+2-3 = 0$

$\lim_{k\to\infty} a_{4k-1} = 0$ גבול חלקי

הראינו שתי תת סדרות אשר מתכנסות לגבולות שונים, לכן ל-a_n אין גבול.

(2) $a_n = \begin{cases} \frac{1}{n}, & n = 2k+1 \\ \frac{n}{n+2}, & n = 2k \end{cases}$ נראה כי עבור תת סדרות $\{a_{2k}\}_{k=1}^{\infty}$, $\{a_{2k+1}\}_{k=0}^{\infty}$ הגבולות שונים, לכן ל-a_n אין גבול.

$$a_{2k} = \frac{2k}{2k+2} = \frac{k}{k+1} \qquad \lim_{k\to\infty} a_{2k} = \lim_{k\to\infty} \frac{k}{k+1} = 1.$$

$$a_{2k+1} = \frac{1}{2k+1} \qquad \lim_{k\to\infty} a_{2k+1} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{2k+1} = 0$$

(3) $a_n = \cos\left(\frac{n\pi}{17}\right) \cdot \sqrt[n]{3^n + 7^n}$ סוג, נבחר $\{(2k-1)17\}_{k=1}^{\infty}$! $\{34k\}_{k=1}^{\infty}$ סדרות חלקיים

$$a_{34k-17} = \cos\left(\frac{(2k-1)\cdot 17\pi}{17}\right)\left(\cdots\right) = \underbrace{\cos(2k\pi - \pi)}_{-1}\left(\sqrt{\cdots}\right) \text{ כי:}$$

$$a_{34k} = \cos\left(\frac{34k\pi}{17}\right) \cdot \sqrt[34k]{3^{34k} + 7^{34k}} = \underbrace{\cos(2\pi \cdot k)}_{1} \cdot \sqrt[34k]{3^{34k} + 7^{34k}} = \sqrt[34k]{3^{34k} + 7^{34k}}$$

$$\lim_{k\to\infty} a_{(2k-1)17} = \lim_{k\to\infty} -\sqrt[\cdots]{3^{\cdots} + 7^{\cdots}} = -7$$

[ראינו בתרגול]

אז קיימות 2 תת סדרות מתכנסות לגבולות שונים

$$\lim_{k\to\infty} a_{34k} = \lim_{k\to\infty} \sqrt[\cdots]{3^{\cdots} + 7^{\cdots}} = 7$$

לכן ל-a_n אין גבול.

5/7 (5)

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2}{\sqrt[n]{(2n)!}} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\dfrac{n^{2n}}{(2n)!}} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$ $\quad a_n = \dfrac{n^{2n}}{(2n)!}$ נסמן

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n-1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^{2n}\cdot(2n-2)!}{(2n)!(n-1)^{2n-2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{(2n)(2n-1)}\cdot\left(\frac{n}{n-1}\right)^{2n-2} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \Big[\underbrace{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}}_{e^2}\Big]^2 \cdot \underbrace{\frac{n^2}{4n^2-2n}}_{\frac{1}{4}} = e^2\cdot\frac{1}{4} = \boxed{\frac{e^2}{4}}$$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{3n^4+5n^3-24}}{3\sqrt{n-4}-2n^2} \Big/ :n^2 = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{3+\frac{5}{n}-\frac{24}{n^4}}}{3\sqrt{\frac{n-4}{n^4}}-2} = \boxed{-\dfrac{\sqrt{3}}{2}}$

$\left(\frac{5}{n}\to 0,\ \frac{24}{n^4}\to 0,\ \frac{n-4}{n^4}\to 0\right)$

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{n+2}}+\dots+\dfrac{1}{\sqrt{n+n}}\right) =$

$$\infty \leftarrow \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2}} = \frac{n}{\sqrt{2n}} \le \underbrace{\frac{1}{\sqrt{n+1}}+\frac{1}{\sqrt{n+2}}+\dots+\frac{1}{\sqrt{n+n}}}_{n \text{ פעמים}} \le \frac{n}{\sqrt{n+1}} < \sqrt{n} \to \infty$$

(*) לא ניתן להשתמש על כלל סנדוויץ', כי הגבולות אינם סופיים.

אנו רואים כי הסדרה a_n שואפת לאינסוף לכל n:

$$a_n \ge \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2}} \to \infty$$

לכן

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}}+\dots+\frac{1}{\sqrt{n+n}}\right) = \infty$$

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2-7n+5}{n^2}\right)^n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n-\left(\frac{7+\sqrt{29}}{2}\right)}{n}\right)^n\cdot\left(\dfrac{n-\left(\frac{7-\sqrt{29}}{2}\right)}{n}\right)^n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{\frac{7+\sqrt{29}}{2}}{n}\right)^n\left(1-\dfrac{\frac{7-\sqrt{29}}{2}}{n}\right)^n =$

$$= \underbrace{\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{\frac{7+\sqrt{29}}{2}}{n}\right)^n}_{e^{-\left(\frac{7+\sqrt{29}}{2}\right)}} \cdot \underbrace{\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{\frac{7-\sqrt{29}}{2}}{n}\right)^n}_{e^{-\left(\frac{7-\sqrt{29}}{2}\right)}} = e^{-\left(\frac{7+\sqrt{29}}{2}\right)}\cdot e^{-\left(\frac{7-\sqrt{29}}{2}\right)} = e^{\frac{-14}{2}} = e^{-7} = \boxed{\frac{1}{e^7}}$$

(5) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{3n}{n^{10}+1}\right)^{n^9+\frac{1}{n}} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{3n}{n^{10}+1}\right)^{\frac{n^{10}+1}{n}} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{3}{\left(\frac{n^{10}+1}{n}\right)}\right)^{\frac{n^{10}+1}{n}} = \boxed{e^3}$

$a_n = \dfrac{n^{10}+1}{n} \quad \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$

$a_n \ne 0$

(6) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2-2n+1}{n^2-4n+2}\right)^n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{(n-1)^2}{(n-2)^2-2}\right)^n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n-1}{n-2-\sqrt{2}}\right)^n\cdot\left(\dfrac{n-1}{n-2+\sqrt{2}}\right)^n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{(1+\sqrt{2})}{n-(2+\sqrt{2})}\right)^n\cdot\left(1+\dfrac{1-\sqrt{2}}{n-(2-\sqrt{2})}\right)^n$

$$= \lim_{n\to\infty} \underbrace{\left(1+\frac{(1+\sqrt{2})}{n-(2+\sqrt{2})}\right)^{n-(2+\sqrt{2})}}_{e^{1+\sqrt{2}}} \cdot \underbrace{\left(1+\frac{1+\sqrt{2}}{n-(2+\sqrt{2})}\right)^{2+\sqrt{2}}}_{1} \cdot \underbrace{\left(1+\frac{1-\sqrt{2}}{n-(2-\sqrt{2})}\right)^{n-(2-\sqrt{2})}}_{e^{1-\sqrt{2}}} \cdot \underbrace{\left(1+\frac{1-\sqrt{2}}{n-(2-\sqrt{2})}\right)^{2-\sqrt{2}}}_{1} =$$

$$= e^{1+\sqrt{2}}\cdot 1\cdot e^{1-\sqrt{2}}\cdot 1 = \boxed{e^2}$$

(5)

6/7

(7) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+1}{n^2-2}\right)^{n^2} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{(n^2-2)+3}{n^2-2}\right)^{n^2} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{3}{n^2-2}\right)^{n^2} =$

$= \lim_{n\to\infty}\underbrace{\left(1+\frac{3}{n^2-2}\right)^{n^2-2}}_{e^3}\cdot\underbrace{\left(1+\underset{\downarrow 0}{\frac{3}{n^2-2}}\right)^2}_{1} = e^3\cdot 1 = \boxed{e^3}$

(8) $\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{n^2+3}{2n+1}} \overset{1:\sqrt{n}}{=} \lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{n+\overset{\to 0}{\frac{3}{n}}}{2+\underset{\to 0}{\frac{1}{n}}}} = \boxed{\infty}$

7/7

(6)

(1) $a_n = \frac{1}{3} + \frac{2}{5} + \dots + \frac{n}{2n+1}$ צ"ל: התכנסות a_n לפי קריטריון קושי

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 : \forall n \geq n_0 \ \forall p \in \mathbb{N} \quad |a_{n+p} - a_n| < \varepsilon$

$$|a_{n+p} - a_n| = \left| \frac{n+1}{2n+3} + \frac{n+2}{2n+5} + \dots + \frac{n+p}{2(p+n)+1} \right| < \left| \left(\frac{n+p}{2(p+n)+1} \right)(p) \right| = \frac{(n+p)p}{2(p+n)+1}$$

ניקח לדוגמא את $p=1$ אז נקבל $\frac{n+1}{2n+3}$! $\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)}{2n+3} = \frac{1}{2}$

אם נבחר $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$ קריטריון קושי לא מתקיים, לכן
הסדרה a_n לא מתכנסת.

(2) $a_n = \frac{\cos x}{3} + \frac{\cos(2x)}{3^2} + \dots + \frac{\cos(nx)}{3^n}$ צ"ל:

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 \ \forall m > n \quad |a_m - a_n| < \varepsilon$

$$|a_m - a_n| = \left| \frac{\cos(n+1)x}{3^{n+1}} + \dots + \frac{\cos(mx)}{3^m} \right| < \left| \frac{1}{3^{n+1}} + \dots + \frac{1}{3^m} \right| < \Big| \underbrace{\frac{1}{3^{n+1}} + \dots + \frac{1}{3^{n+1}}}_{\text{כמות } (m-n)} \Big| = \boxed{\frac{m-n}{3^{n+1}} < \varepsilon}$$

$$\frac{m-n}{3^{n+1}} < \varepsilon$$

$$3^{n+1} > \frac{m-n}{\varepsilon}$$

$$3^n > \left(\frac{m-n}{3\varepsilon}\right)$$

עבור $m = n+1$

$$3^n > \frac{1}{3\varepsilon}$$

$$n_0 = \left[\log_3 \frac{1}{3\varepsilon}\right] + 1.$$

תרגיל מס' 7

ההגשה בזוגות בלבד עד : 2/1/05

גבולות של פונקציות:

1. הוכיחו לפי הגדרת הגבול של היינה:

1. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x+4}{x^2-6}=-3$
2. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{24x^5+3x}{x^2-3x+1}=0$

הוכיחו לפי הגדרת הגבול של קושי:

3. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{2x+3}{x^2+1}=\frac{7}{5}$
4. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2+2x}{2}=\frac{3}{2}$

2. האם הטענות הבאות נכונות (תנו הסבר או דוגמא נגדית):

1. $\lim\limits_{x\to a}f(x)=L$ אם ורק אם לכל $\delta>0$ קיים $\varepsilon>0$ כך שהתנאי $0<|x-a|<\delta$ גורר $|f(x)-L|<\varepsilon$
2. $\lim\limits_{x\to a}f(x)=L$ אם ורק אם לכל $\varepsilon>0$ קיים $\delta>0$ כך שהתנאי $0<|x-a|<\delta$ גורר $|f(x)-L|<5\varepsilon$
3. $\lim\limits_{x\to a}f(x)=L$ אם ורק אם לכל $\delta>0$ קיים $\varepsilon>0$ התנאי $0<|x-a|<\delta$ גורר $|f(x)-L|<10\varepsilon$

3. הראו כי הגבולות הבאים אינם קיימים:

1. $\lim\limits_{x\to\infty}x\cdot\sin x$
2. $\lim\limits_{x\to 5}f(x)$ $\quad f(x)=\begin{cases}\frac{|x-5|}{(x-5)}, x\neq 5\\ 0, x=5\end{cases}$

4. חשבו את הגבולות הבאים:

1. בהנחה שידוע : $\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{24}\le 1-\cos x\le \frac{x^2}{2}$ חשבו: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$

2. בהנחה שהפונקציה $f(x)$ מקיימת עבור $-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$ את אי-השוויון הבא $x^2(1-\cos^2 x)\le f(x)\le x^2(1+\cos^2 x)$ חשבו $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

5. חשבו את הגבולות הבאים:

1. $\lim\limits_{x\to 9}\frac{x-9}{\sqrt{x}-3}$
2. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{x^2-2x}$
3. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(\alpha x)}{\sin(\beta x)}$
4. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^3}{\tan^3(2x)}$
5. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-2x+x^2}-(1+x)}{x}$ (להזכירכם: $\sqrt{x^2}=|x|$!!!)
6. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x+1}-1}{x}$
7. $\lim\limits_{x\to -\infty}\frac{\sqrt{x^2+x}}{x}$
8. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{3x-\sin x}{\tan x}$

בהצלחה!

פתרון תרגיל בית 7

(1) $\lim_{x\to 2}\frac{x+4}{x^2-6}=-3$ צ"ל: לפי הגדרת הגבול של היינה

לכל סדרה כללית $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ רק שמקיים $\lim_{n\to\infty}x_n=2$

$$\lim_{n\to\infty}f(x_n)=\lim_{n\to\infty}\frac{x_n+4}{x_n^2-6}=\lim_{n\to\infty}\frac{x_n+4}{(x_n)^2-6}=\frac{\overbrace{2+4}^{6}}{\underbrace{2^2-6}_{-2}}=-3$$

(2) $\lim_{x\to 0}\frac{24x^5+3x}{x^2-3x+1}=0$ צ"ל: לפי הגדרת הגבול של היינה

לכל סדרה כללית $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ רק שמקיים $\lim_{n\to\infty}x_n=0$

$$\lim_{n\to\infty}f(x_n)=\lim_{n\to\infty}\frac{24x_n^5+3x_n}{x_n^2-3x_n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{24\cdot(x_n)^5+3\cdot x_n}{(x_n)^2-3\cdot x_n+1}=\frac{24\cdot 0^5+3\cdot 0}{0^2-3\cdot 0+1}=0$$

(3) $\lim_{x\to 2}\frac{2x+3}{x^2+1}=\frac{7}{5}$ צ"ל: לפי הגדרת הגבול של קושי.

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0:\ \forall x:\ 0<|x-2|<\delta\ \Rightarrow\ \left|f(x)-\frac{7}{5}\right|<\varepsilon$$

$$\left|\frac{2x+3}{x^2+1}-\frac{7}{5}\right|=\left|\frac{(2x+3)\cdot 5-7x^2-7}{5(x^2+1)}\right|=\left|\frac{-7x^2+10x+8}{5(x^2+1)}\right|=\left|\frac{-7x^2+14x-4x+8}{5(x^2+1)}\right|=$$

$$=\left|\frac{-7x(x-2)-4(x-2)}{5(x^2+1)}\right|=\left|\frac{(x-2)(-7x-4)}{5(x^2+1)}\right|<\frac{|(x-2)(-7x-4)|}{5}<\frac{|(x-2)(-7x+14)|}{5}=$$

$$=\frac{|(x-2)(-7)(x-2)|}{5}\le\frac{|(-7)|\cdot|(x-2)^2|^{\geq 0}}{5}=\boxed{\frac{7\cdot(x-2)^2}{5}<\varepsilon}$$

נסמן $d=(x-2)$ אז

$$\frac{7\cdot d^2}{5}<\varepsilon$$

$$d^2<\frac{5\varepsilon}{7}$$

$$d<\sqrt{\frac{5\varepsilon}{7}}$$

אז נבחר $\delta=\sqrt{\frac{5\varepsilon}{7}}$

ומתקיים שלכל $\varepsilon>0$ לכל x המקיים $0<|x-2|<\delta$

$$\left|f(x)-\frac{7}{5}\right|<\varepsilon$$

2/5

(4) $\lim_{x \to 1} \frac{x^2+2x}{2} = \frac{3}{2}$

צ"ל: $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \forall x: \ 0 < |x-1| < \delta \Rightarrow \left|f(x) - \frac{3}{2}\right| < \varepsilon$.

$$\left|\frac{x^2+2x}{2} - \frac{3}{2}\right| < \varepsilon$$

$$\left|\frac{x^2+2x}{2} - \frac{3}{2}\right| = \left|\frac{x^2+2x-3}{2}\right| = \left|\frac{(x-1)(x+3)}{2}\right| = \left|\frac{(x-1)(x-1+4)}{2}\right| = \frac{|x-1| \cdot |(x-1+4)|}{2} \le$$

$$\le \frac{|x-1|\left(|x-1| + |4|\right)}{2} = \boxed{\frac{|(x-1)|^2 + 4|x-1|}{2} < \varepsilon}$$

נסמן $\alpha = |x-1|$

$$\frac{\alpha^2 + 4\alpha}{2} < \varepsilon$$

$$\alpha^2 + 4\alpha - 2\varepsilon < 0$$

$$\alpha_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16+8\varepsilon}}{2} = -2 \pm \sqrt{4+2\varepsilon}$$

$(-2-\sqrt{4+2\varepsilon}) < 0$ לכן $\alpha = -2 + \sqrt{4+2\varepsilon}$

נבחר $\delta = -2 + \sqrt{4+2\varepsilon}$

(2)

(1) $\lim_{x \to a} f(x) = L$ אמ"ם לכל $\delta > 0$ קיים $\varepsilon > 0$ כך ש $0 < |x-a| < \delta$ גורר $|f(x) - L| < \varepsilon$

הטענה לא נכונה. ניתן להשוות עם ההגדרה הפורמלית כדי לראות שאנו מדקים לכל δ קיים ε מתאים כך שלכל x ברחוק מ-a עד כדי δ ניתן יהיה לחסום את $f(x)$ כך ש $|f(x) - L| < \varepsilon$.

(2) $\lim_{x \to a} f(x) = L$ אמ"ם לכל $\varepsilon > 0$ קיים $\delta > 0$ כך שלכל $0 < |x-a| < \delta$ גורר $|f(x) - L| < 5\varepsilon$

הטענה נכונה: ניתן לסמן $\varepsilon^* = 5\varepsilon$ לכן גם $\varepsilon^* > 0$ והטענה שקולה להגדרה הפורמלית של הגבול.

(3) $\lim_{x \to a} f(x) = L$ אמ"ם לכל $\delta > 0$ קיים $\varepsilon > 0$ המקיים $0 < |x-a| < \delta$ גורר $|f(x) - L| < 10\varepsilon$

הטענה לא נכונה: בדומה ל-(1) חייבים קודם לחסום את $f(x)$ במידה מסוימת ל-L כך ש $|f(x) - L| < 10\varepsilon$ ורק אז ניתן יהיה להתאים δ כך שמתקיים $0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < 10\varepsilon$.

4/5

(4)

(1) נתון $\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{24} \le 1-\cos x \le \frac{x^2}{2}$ צ"ל: $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$

מכיון: $\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{24} \le 1-\cos x \le \frac{x^2}{2} \quad /: x^2 \quad x\neq 0$

$$\frac{1}{2}-\frac{x^2}{24} \le \frac{1-\cos x}{x^2} \le \frac{1}{2}$$

ניתן לראות כי $\frac{1}{2}$ זו פונק' $g(x)=\frac{1}{2}$ קבועה רק ?: $\lim_{x\to 0} g(x)=\frac{1}{2}$

$\frac{1}{2}-\frac{x^2}{24}$ זו פונק' $h(x)=\frac{1}{2}-\frac{x^2}{24}$ רק ?: $\lim_{x\to 0} h(x)=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2}-\frac{x^2}{24}=\frac{1}{2}$

אז מתקיים

$$\begin{array}{ccccc} h(x) & \le & f(x) & \le & g(x) \\ \downarrow & & & & \downarrow \\ \frac{1}{2} & & & & \frac{1}{2} \end{array}$$

לפי משפט סנדוויץ' $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}$

(2) $f(x)$ מקיימת לכל $-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$ $\quad x^2(1-\cos^2 x) \le f(x) \le x^2(1+\cos^2 x)$

צ"ל: $\lim_{x\to 0} f(x)$

נחשב את

$$\lim_{x\to 0} x^2(1+\cos^2 x) = 0(1+1)=0$$

$$\lim_{x\to 0} x^2(1-\cos^2 x) = 0(1-1)=0$$

אז לפי משפט סנדוויץ'

$$\lim_{x\to 0} f(x)=0$$

3/5

3

$$\lim_{x\to\infty} x\cdot \sin x \qquad (1)$$

נראה באמצעות הגדרת הגבול של היינה כי הגבול הנ"ל לא קיים.

נגדיר $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}, \{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרות כך ש: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n = \infty$

אבל $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) \neq \lim\limits_{n\to\infty} f(y_n)$

$$x_n = 2\pi n - \frac{\pi}{2} \quad \lim_{n\to\infty} 2\pi n - \frac{\pi}{2} = \infty$$

$$y_n = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\pi}{2}+2\pi n\right) = \infty$$

אבל

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty}\left(2\pi n - \frac{\pi}{2}\right)\underbrace{\sin\left(2\pi n - \frac{\pi}{2}\right)}_{-1} = -\infty$$

$$\lim_{n\to\infty} f(y_n) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\pi}{2}+2\pi n\right)\underbrace{\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}+2\pi n\right)\right)}_{1} = \infty$$

$$\lim_{x\to 5} f(x) \qquad f(x) = \begin{cases} \frac{|x-5|}{x-5} & x\neq 5 \\ 0 & x=5 \end{cases} \qquad (2)$$

(א) ניתן להראות אי-קיום גבול באמצעות חישוב גבולות חלקיים:

$$\lim_{x\to 5^+} f(x) = \lim_{x\to 5^+}\frac{|x-5|}{x-5} = \lim_{x\to 5^+}\frac{x-5}{x-5} = 1$$

$$\lim_{x\to 5^-} f(x) = \lim_{x\to 5^-}\frac{|x-5|}{x-5} = \lim_{x\to 5^-}\frac{5-x}{x-5} = -1$$

לכן לא קיים $\lim\limits_{x\to 5} f(x)$ $\lim\limits_{x\to 5^+} f(x) \neq \lim\limits_{x\to 5^-} f(x)$

(א"א) לפי הגדרת הגבול של היינה: נגדיר x_n, y_n כך ש:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 5, \quad \lim_{n\to\infty} y_n = 5 \qquad x_n = 5-\frac{1}{n}$$

$$y_n = 5+\frac{1}{n}$$

אבל:

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty}\frac{\left|5-\frac{1}{n}-5\right|}{\cancel{5}-\frac{1}{n}-\cancel{5}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}}{-\frac{1}{n}} = -1$$

$$\lim_{n\to\infty} f(y_n) = \lim_{n\to\infty}\frac{\left|5+\frac{1}{n}-5\right|}{5+\frac{1}{n}-5} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = 1$$

$\lim\limits_{x\to 5} f(x)$ לא קיים אזי $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) \neq \lim\limits_{n\to\infty} f(y_n)$

5/5

5

(1) $$\lim_{x\to 9}\frac{x-9}{\sqrt{x}-3}=\lim_{x\to 9}\frac{\cancel{(\sqrt{x}-3)}(\sqrt{x}+3)}{\cancel{(\sqrt{x}-3)}}=\lim_{x\to 9}(\sqrt{x}+3)=6$$

(2) $$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{x^2-2x}\overset{\cdot(\sqrt{x}+\sqrt{2})}{=}\lim_{x\to 2}\frac{\cancel{(x-2)}}{x\cancel{(x-2)}(\sqrt{x}+\sqrt{2})}=\lim_{x\to 2}\frac{1}{x(\sqrt{x}+\sqrt{2})}=\frac{1}{4\sqrt{2}}$$

(3) $$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(\alpha x)}{\sin(\beta x)}\overset{\cdot\frac{\alpha x}{\alpha x}}{=}\lim_{x\to 0}\underbrace{\frac{\sin\alpha x}{\alpha x}}_{\text{1 גבול ידוע}}\cdot\underbrace{\frac{\beta x}{\sin(\beta x)}}_{\frac{1}{1}\text{ גבול ידוע}}\cdot\frac{\alpha x}{\beta x}=\lim_{x\to 0}\frac{\alpha \cancel{x}}{\beta \cancel{x}}=\frac{\alpha}{\beta}$$

(4) $$\lim_{x\to 0}\frac{x^3}{tg^3(2x)}=\lim_{x\to 0}\frac{x^3\cdot\cos^3(2x)}{\sin^3(2x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos^3(2x)}{8}\cdot\underbrace{\left[\frac{2x}{\sin(2x)}\right]^3}_{\left(\frac{1}{1}\right)^3\text{ גבול ידוע}}=\frac{1}{8}$$

(5) $$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-2x+x^2}-(1+x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{(1-x)^2}-(1+x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{|1-x|-(1+x)}{x}=$$

$(1-x)\geq 0 \quad x\to 0$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cancel{1}-x-\cancel{1}-x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{-2\cancel{x}}{\cancel{x}}=-2$$

(6) $$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x+1}-1}{x}\overset{\cdot\left(\sqrt[3]{(x+1)^2}+\sqrt[3]{(x+1)}+1\right)}{=}\lim_{x\to 0}\frac{x+\cancel{1}-\cancel{1}}{\cancel{x}\left(\sqrt[3]{(x+1)^2}+\sqrt[3]{(x+1)}+1\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{(x+1)^{2/3}+(x+1)^{1/3}+1}=$$

$$=\frac{1}{1+1+1}=\frac{1}{3}$$

(7) $$\lim_{x\to -\infty}\frac{\sqrt{x^2+x}}{x}\overset{:x}{=}\lim_{x\to -\infty}\sqrt{\frac{x^2+x}{x^2}}=\lim_{x\to -\infty}\sqrt{1+\underbrace{\frac{1}{x}}_{0}}=1$$

(8) $$\lim_{x\to 0}\frac{3x-\sin x}{tg\,x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{3x}{tg\,x}-\frac{\sin x}{tg\,x}\right)=\lim_{x\to 0}\left(3\cdot\cos x\cdot\underbrace{\frac{x}{\sin x}}_{\frac{1}{1}\text{ גבול ידוע}}-\cos x\right)=$$

$$=3\cdot 1\cdot 1-1=2$$

תרגיל מס' 8

ההגשה בזוגות בלבד עד 12\01\05

גבולות חד צדדיים ורציפות:

1. בדקו את רציפות הפונקציה בנקודות הנתונות. אם הפונקציה אינה רציפה, בדקו רציפות חלקית (מימין או משמאל).

1. בנקודה $x_0 = 2$ $\quad f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2 - 4}}{x+2}$

2. בנקודה $x_0 = 3$ $\quad f(x) = \begin{cases} \dfrac{|x-3|}{x-3}, x \neq 3 \\ 0, x = 3 \end{cases}$

3. בנקודות $x_0 = \pm 1$ $\quad f(x) = \begin{cases} \dfrac{1-x}{1-|x|}, |x| \neq 1 \\ 1, |x| = 1 \end{cases}$

4. בנקודה $x_0 = -1$ $\quad f(x) = \begin{cases} \dfrac{|x^2-1|}{x+1}, x \neq -1 \\ -2, x = -1 \end{cases}$

2. בדקו היכן הפונקציות הבאות רציפות. עבור נקודות אי-רציפות ציינו מאיזה סוג הן. קבעו האם אפשר לשנות את הגדרת הפונקציה כך שתהיה רציפה בנקודה בעייתית.

1. $f(x) = \dfrac{x^2 - 9}{x - 3}$

2. $f(x) = \dfrac{x^2 + 5x + 6}{x + 2}$

3. $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$

4. $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, x < -1 \\ x^3 - 6, x > -1 \end{cases}$

5. $f(x) = x \cdot [x]$

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}, x\neq 0\\ 12, x=0\end{cases}$$ .6

$$f(x)=\begin{cases}\cos\dfrac{\pi x}{2}, |x|\leq 1\\ |x+1|, |x|>1\end{cases}$$ .7

$$f(x)=\begin{cases}a^{x+2}, x\leq -2\\ 3x+7, -2\leq x\leq 0\\ x^2-2x+4, x>0\end{cases}$$ .8

3. תהי $f(x)$ פונקציה רציפה. האם הפונקציות הבאות רציפות:

1. $g(x)=\dfrac{f(x)}{1+f(x)}$
2. $g(x)=\dfrac{f(x)}{1+(f(x))^2}$

4. האם $f(x)=\sqrt{x-5}$ רציפה באינטרוול $[5,9]$?

5. עבור אילו ערכי a $f(x)$ תהיה רציפה לכל x ?

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin(5x)}{13x}, x\neq 0\\ a, x=0\end{cases}$$

<u>נגזרת של פונקציות:</u>

6. חשבו לפי ההגדרה את נגזרת הפונקציה בנקודה הנתונה:

1. $f(x)=x^{\frac{7}{3}}, x_0=0.$
2. $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x}, x\leq \dfrac{1}{16}\\ 2x+\dfrac{1}{8}, x>\dfrac{1}{16}\end{cases}; x_0=\dfrac{1}{16}$
3. $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}, x_0=4$

7. מצאו (אם קיים)את משוואת הישר המשיק לפונקציה בנקודה הנתונה:

1. $f(x)=x^2, x_0=2$
2. $f(x)=\dfrac{2x-1}{5x+2}, x_0=0$

8. חשבו את הנגזרות של הפונקציות הבאות (סעיפים 13-20 הינם תרגילי רשות):

1. $f(x) = -3x^2 + \frac{3}{x^6}$
2. $f(x) = (x - \frac{1}{x})(x^2 - \frac{1}{x^2})$
3. $f(x) = \frac{x^2 - 5x + 4}{x^2 + x - 20}$
4. $f(x) = \cos(1 + \tan 2x)$
5. $f(x) = \sqrt{4x - \sqrt{x}}$
6. $f(x) = \sin x \cdot \cos x$
7. $f(x) = \left(x^7 + (x^2 - 1)^5\right)^{-2}$
8. $f(x) = \tan(\frac{1+x}{1-x})$
9. $f(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{x}}$
10. $f(x) = \arcsin(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}})$
11. $f(x) = e^{\cos^2 x}$
12. $f(x) = 2^{\arcsin 3x}$
13. $f(x) = \sin^2(\cos^2 x)$
14. $f(x) = \frac{x^4 - x^2 + 2}{x\sqrt{x}}$
15. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{3x^2 - 1}}$
16. $f(x) = \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{10}$
17. $f(x) = \sqrt[4]{\frac{x-1}{x+2}}$
18. $f(x) = 3\sin x \cos^2 x + \sin^3 x$
19. $f(x) = \ln(\arcsin x)$
20. $f(x) = \ln\frac{\sqrt{x^2+1} + x}{\sqrt{x^2+1} - x}$

בהצלחה!

פתרון תרגיל בית מס' 8

1

(1) בנק' $x_0 = 2$ $\quad f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2-4}}{x+2}$

ת.ה: $\sqrt{x^2-4} \Leftarrow x^2-4 \geq 0$

$x^2 \geq 4$

$x \geq 2$ או $x \leq -2$

$f(x)$ מוגדרת רק מצד ימין של $x=2$, לכן אינה רציפה בנק' $x=2$.

נבדוק רציפות חלקית:

$$\lim_{x \to 2^+} \frac{\sqrt{x^2-4}}{x+2} = 0 = f(2)$$

לכן $f(x)$ רציפה מימין.

(2) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{|x-3|}{x-3} & x \neq 3 \\ 0 & x = 3 \end{cases}$ נבדוק את הגבולות החלקיים:

$$\lim_{x \to 3^+} f(x) = \lim_{x \to 3^+} \frac{x-3}{x-3} = 1 \neq f(3)$$

$$\lim_{x \to 3^-} f(x) = \lim_{x \to 3^-} \frac{3-x}{x-3} = -1 \neq f(3)$$

לכן $f(x)$ אינה רציפה בנק' $x=3$

וגם לא רציפה חלקית.

(3) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1-x}{1-|x|} & |x| \neq 1 \\ 1 & |x| = 1 \end{cases}$ בנק' $x = \pm 1$

נבדוק עבור $x=1$:

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{1-x}{1-x} = 1$$

מתקיים כי $f(1) = 1$

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{1-x}{1-x} = 1$$

לכן $f(x)$ רציפה בנק' $x=1$.

$x=-1$:

$$\lim_{x \to -1^+} \frac{1-x}{1-|x|} = \lim_{x \to -1^+} \frac{2}{\underbrace{1-(1)^+}_{0^+}} = \infty$$

$$\lim_{x \to -1^-} \frac{1-x}{1-|x|} = \lim_{x \to -1^-} \frac{2}{\underbrace{1-(1)^-}_{0^-}} = -\infty$$

לכן $f(x)$ אינה רציפה בנק' $x=-1$

(וגם לא בכיוון חלקי).

(4) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{|x^2-1|}{x+1} & x \neq -1 \\ -2 & x = -1 \end{cases}$

$$\lim_{x \to -1^+} f(x) = \lim_{x \to -1^+} \frac{-(x^2-1)}{x+1} = \lim_{x \to -1^+} -(x-1) = 2$$

$$\lim_{x \to -1^-} f(x) = \lim_{x \to -1^-} \frac{x^2-1}{x+1} = \lim_{x \to -1^-} (x-1) = -2$$

לכן $f(x)$ אינה רציפה ב $x=-1$

אולם $f(x)$ רציפה משמאל: $\lim_{x \to -1^-} f(x) = -2 = f(-1)$

2/6 | (2)

$$f(x)=\frac{x^2-9}{x-3}$$

(1) נבדוק בנק' $x=3$:

$$\lim_{x\to 3} f(x)=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x+3)}{x-3}=\lim_{x\to 3}(x+3)=6$$

זאת נק' אי-רציפות סליקה

ניתן להגדיר את $f(x)$ להיות $f(3)=6$ ואז $f(x)$ תהיה רציפה לכל x.

(2) $f(x)=\frac{x^2+5x+6}{x+2}$ נבדוק בנק' $x=-2$

$$\lim_{x\to -2} f(x)=\lim_{x\to -2}\frac{(x+3)(x+2)}{(x+2)}=\lim_{x\to -2}(x+3)=1.$$

לכן זו נק' אי-רציפות סליקה

אזי, ניתן להגדיר $f(-2)=1$, ואז $f(x)$ תהיה רציפה לכל x.

(3) $f(x)=\frac{|x|}{x}$ נבדוק ב $x=0$.

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{x}=1$$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{-x}{x}=-1$$

אזי $x=0$ היא נק' אי-רציפות מסוג ראשון.

לא ניתן להגדיר את $f(x)$ כך שתהיה רציפה ב $x=0$.

(4) $f(x)=\begin{cases} x^2+1 & x<-1 \\ x^3-6 & x>-1\end{cases}$ נבדוק ב $x=-1$

$$\lim_{x\to -1^+} x^3-6=-7$$

$$\lim_{x\to -1^-} x^2+1=2$$

$x=-1$ היא נק' אי-רציפות מסוג ראשון.

ולא ניתן להגדיר $f(x)$ כך שתהיה רציפה ב $x=-1$.

(5) $f(x)=x\cdot[x]$ נבדוק ל $x=z$ כך ש $z\in\mathbb{Z}$ [כאשר x שלם]

$$\lim_{x\to z^+} x\cdot[x]=z^2$$

$$z^2=z(z-1)$$
$$z=0$$

$$\lim_{x\to z^-} x\cdot[x]=z(z-1)$$

אזי $f(x)$ רציפה לגבי $x=0$, אבל לכל $z\neq 0$ שלם $f(x)$ אינה רציפה ב $x=z$ {אי-רציפות מסוג ראשון}.

(6) $f(x)=\begin{cases}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x} & x\neq 0 \\ 12 & x=0\end{cases}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}\cdot\frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}=\lim_{x\to 0}\frac{1+x-1+x}{x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}=$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{2}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}=1.$$

אזי $x=0$ נק' אי-רציפות סליקה.

ניתן להגדיר $f(0)=1$, אזי $f(x)$ תהיה רציפה לכל x.

2

(7)
$$f(x)=\begin{cases}\cos\frac{\pi x}{2} & , |x|\le 1\\ |x+1| & , |x|>1\end{cases}$$

עבור $x=1$:

$\lim\limits_{x\to 1^+} |x+1| = 2$

$f(x)$ אינה רציפה בנק' $x=1$

$\lim\limits_{x\to 1^-} \cos\frac{\pi x}{2} = 0$

אי רציפות מסוג ראשון

$x=-1$:

$\lim\limits_{x\to -1^+} \cos\frac{\pi x}{2} = 0$

$f(-1) = \cos\frac{\pi(-1)}{2} = 0$

$\lim\limits_{x\to -1^-} |x+1| = 0$

אזי $f(x)$ רציפה בנ' $x=-1$

(8)
$$f(x)=\begin{cases}a^{x+2} & , x\le -2\\ 3x+7 & , -2\le x\le 0\\ x^2-2x+4 & , x>0\end{cases}$$

$\boxed{x=-2}$

$\lim\limits_{x\to -2^+} (3x+7) = 1$

$f(-2) = a^{-2+2} = a^0 = 1$

$\lim\limits_{x\to -2^-} a^{x+2} = a^0 = 1$

$f(x)$ רציפה בנ' $\boxed{x=-2}$

$\boxed{x=0}$

$\lim\limits_{x\to 0^+} (x^2-2x+4) = 4$

$x=0$ היא נק' אי-רציפות

$\lim\limits_{x\to 0^-} 3x+7 = 7$

מסוג ראשון.

3

(1) $f(x)$ פונק' רציפה, האם $g(x)=\frac{f(x)}{1+f(x)}$ רציפה?

דוגמא נגדית:

נניח $f(x)=-1$ פונק' קבועה ורציפה; אזי

$g(x)=\frac{f(x)}{1+f(x)} = \frac{-1}{1-1}$ אינה מוגדרת ולכן לא רציפה.

(2) $f(x)$ פונק' רציפה. האם $g(x)=\frac{f(x)}{1+f^2(x)}$ רציפה?

הוכחה: $0 < 1+(f(x))^2$ לכל x ולכל $f(x)$, לכן אין בעיה בהגדרה

$g(x)$! מוגדרת לכל x.

- נראה כי מתקיים $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = g(x_0)$ לכל x:

$$\lim_{x\to x_0} g(x) = \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{1+(f(x))^2} = \frac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{1+\left(\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\right)^2} \underset{f\text{ רציפה}}{=} \frac{f(x_0)}{1+(f(x_0))^2} = g(x_0)$$

4/6

(4) $f(x)=\sqrt{x-5}$ נבדוק האם $f(x)$ רציפה בקטע $[5,9]$

ת.ה: $x-5\geq 0$, $x\geq 5$; $f(x)$ פונק' רציפה בתחום ההגדרה ; לכן $f(x)$ רציפה בכל קטע $[a,b]$ או (a,b) מוכל ב- $[5,\infty)$.

אבל נבדוק את הרציפות מימין לגבול הקצה $x=5$:

$$\lim_{x\to 5^+}\sqrt{x-5}=0=f(5)$$

$f(x)$ רציפה ב- $[5,9]$.

(5) $f(x)=\begin{cases}\frac{\sin(5x)}{13x} & x\neq 0\\ a & x=0\end{cases}$ עבור אילו ערכי a $f(x)$ רציפה לכל x?

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(5x)}{13x}=\lim_{x\to 0}\underbrace{\left[\frac{\sin(5x)}{5x}\right]}_{\text{גבול ידוע}\,=\,1}\cdot\frac{5}{13}=1\cdot\frac{5}{13}$$

לכן אם נבחר $a=\frac{5}{13}$

$$\lim_{x\to 0}f(x)=f(0)$$

ו- $f(x)$ מהווה רציפה בכל x.

(6) חשב נגזרת לפי ההגדרה:

(1) $f(x)=x^{\frac{7}{3}}$ חשב $f'(0)$.

$$f'(x_0=0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x^{\frac{7}{3}}-0}{x}=\lim_{x\to 0}x^{\frac{4}{3}}=0$$

(*) ניתן לחשב קודם את הנגזרת הכללית ואז להציב את x_0 :

(2) $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x} & x\leq\frac{1}{16}\\ 2x+\frac{1}{8} & x>\frac{1}{16}\end{cases}$ חשב $f'(\frac{1}{16})$

(1) ניתן לבדוק קודם האם $f(x)$ רציפה בנק' $x=\frac{1}{16}$

$$\lim_{x\to\frac{1}{16}^+}2x+\frac{1}{8}=\frac{1}{4}=\lim_{x\to\frac{1}{16}^-}\sqrt{x}=\frac{1}{4}=f(\tfrac{1}{16})$$

(2) נגזרת לפי הגדרה [בחלקים]

$$\lim_{x\to\frac{1}{16}^+}\frac{f(x)-f(\frac{1}{16})}{x-\frac{1}{16}}=\lim_{x\to\frac{1}{16}^+}\frac{2x+\frac{1}{8}-\frac{1}{4}}{x-\frac{1}{16}}=\lim_{x\to\frac{1}{16}^+}\frac{2\cancel{(x-\frac{1}{16})}}{\cancel{x-\frac{1}{16}}}=2$$

$$\lim_{x\to\frac{1}{16}^-}\frac{f(x)-f(\frac{1}{16})}{x-\frac{1}{16}}=\lim_{x\to\frac{1}{16}^-}\frac{\sqrt{x}-\frac{1}{4}}{x-\frac{1}{16}}=\lim_{x\to\frac{1}{16}^-}\frac{\cancel{\sqrt{x}-\frac{1}{4}}}{\cancel{(\sqrt{x}-\frac{1}{4})}(\sqrt{x}+\frac{1}{4})}=\lim_{x\to\frac{1}{16}^-}\frac{1}{\sqrt{x}+\frac{1}{4}}=\frac{1}{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}}=2$$

אזי $f'(x=\frac{1}{16})=2$.

5/6

6

(3) $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$ צ"ל: $f'(4)$.

ת.ה: $\sqrt{x}\neq 0 \Rightarrow x\neq 0$

$\boxed{x>0}$

לכן $f(x)$ היא רציפה לכל $x>0$, ובפרט בנק' $x=4$

$$f'(x=4)=\lim_{x\to 4}\frac{f(x)-f(4)}{x-4}=\lim_{x\to 4}\frac{\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{\sqrt{4}}}{x-4}=\lim_{x\to 4}\frac{(\sqrt{4}-\sqrt{x})}{(2\sqrt{x})(x-4)}=$$

$$=\lim_{x\to 4}\frac{(\sqrt{4}-\sqrt{x})}{(2\sqrt{x})(-1)(\sqrt{4}-\sqrt{x})(\sqrt{4}+\sqrt{x})}=\lim_{x\to 4}\frac{(-1)}{2\sqrt{x}\underbrace{(\sqrt{4}+\sqrt{x})}_{4}}=\frac{-1}{4\cdot 4}=-\frac{1}{16}$$

$$f'(4)=-\frac{1}{16}$$

7

(1) $f(x)=x^2$ צ"ל: משוואת המשיק בנק' $x=2$.

$$f'(x_0)=\frac{y-y_0}{x-x_0}\Rightarrow \boxed{y=f'(x_0)(x-x_0)+y_0}$$

$f'(x)=(x^2)'=2x$

$f'(x=2)=2\cdot 2=4$

$y_0=f(x=2)=2^2=4$

$y=4(x-2)+4$

$\boxed{y=4x-4}$

(2) $f(x)=\frac{2x-1}{5x+2}$ בנק' $x=0$.

$$f'(x)=\frac{2(5x+2)-5(2x-1)}{(5x+2)^2}$$

$$f'(x=0)=\frac{2(5\cdot 0+2)-5(2\cdot 0-1)}{(5\cdot 0+2)^2}=\frac{4+5}{4}=2\tfrac{1}{4}$$

$$f(x=0)=\frac{2\cdot 0-1}{5\cdot 0+2}=-\frac{1}{2}$$

אזי: $y=2\frac{1}{4}(x-0)-\frac{1}{2}$

$\boxed{y=2\frac{1}{4}x-\frac{1}{2}}$

8

(1) $f'(x)=-6x-18\cdot\frac{1}{x^7}$

(2) $f'(x)=\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\left(x^2-\frac{1}{x^2}\right)+\left(x-\frac{1}{x}\right)\left(2x+\frac{2}{x^3}\right)$

(3) $f(x)=\frac{x^2-5x+4}{x^2+x-20}=\frac{(x-4)(x-1)}{(x-4)(x+5)}=\frac{x-1}{x+5}$, $f'(x)=\frac{(x+5)-(x-1)}{(x+5)^2}=\frac{6}{(x+5)^2}$

(4) $f'(x)=\left[-\sin(1+\tan 2x)\right]\cdot\frac{1}{\cos^2 2x}\cdot 2$

(5) $f'(x)=\left[\left(4x-x^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}\right]'=\frac{1}{2}\left(4x-x^{\frac{1}{2}}\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot\left(4-\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)=\frac{4-\frac{1}{2\sqrt{x}}}{2\sqrt{4x-\sqrt{x}}}$

(6) $f'(x)=\cos^2 x-\sin^2 x=\cos 2x$

(7) $f'(x)=\left[x^7+(x^2-1)^5\right]^{-2\,\prime}=-2\left[x^7+(x^2-1)^5\right]^{-3}\cdot\left[7x^6+5(x^2-1)^4\cdot 2x\right]$

(8) $f'(x)=\left(\tan\frac{1+x}{1-x}\right)'=\frac{1}{\cos^2\left(\frac{1+x}{1-x}\right)}\cdot\left(\frac{(1-x)+(1+x)}{(1-x)^2}\right)=\frac{2}{(1-x)^2\cos^2\left(\frac{1+x}{1-x}\right)}$

(9) $f'(x) = \dfrac{\cos x \cdot \sqrt{x} - \frac{\sin x}{2\sqrt{x}}}{(\sqrt{x})^2}$

(10) $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{1+x^2}}} \cdot \dfrac{\sqrt{1+x^2} - x \cdot \frac{1}{2\sqrt{x^2+1}} \cdot 2x}{(1+x^2)} = \dfrac{1}{\sqrt{\frac{1}{(1+x^2)}}} \cdot \dfrac{\sqrt{1+x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}}{(1+x^2)} = \dots = \dfrac{1}{1+x^2}$

(11) $f'(x) = e^{\cos^2 x} \cdot 2\cos x(-\sin x) = -e^{\cos^2 x} \sin 2x$

(12) $f'(x) = (\arcsin 3x)' \cdot 2^{\arcsin 3x} \cdot \ln 2 = \dfrac{3}{\sqrt{1-9x^2}} \cdot 2^{\arcsin 3x} \cdot \ln 2$

(13) $f'(x) = 2\sin(\cos^2 x) \cdot \cos(\cos^2 x) \cdot 2\cos x(-\sin x)$

(14) $f'(x) = \dfrac{(4x^3 - 2x)x\sqrt{x} - (x^4 - x^2 + 2) \cdot 1\frac{1}{2} \cdot \sqrt{x}}{x^3} = \dfrac{5}{2}x\sqrt{x} - \dfrac{1}{2\sqrt{x}} - \dfrac{3}{x^2\sqrt{x}}$

(15) $f'(x) = \left[(3x^2-1)^{-\frac{1}{2}}\right]' = -\dfrac{1}{2}(3x^2-1)^{-1\frac{1}{2}}(6x) = \dfrac{-6x}{2\sqrt{(3x^2-1)^3}} = \dfrac{-3x}{\sqrt{(3x^2-1)^3}}$

(16) $f'(x) = 10\left(\sqrt{x} + \dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)^9 \cdot \left(\dfrac{1}{2\sqrt{x}} - \dfrac{1}{2\sqrt{x^3}}\right)$ או $f'(x) = \left(\left(\dfrac{x+1}{\sqrt{x}}\right)^{10}\right)' = \left(\dfrac{(x+1)^{10}}{x^5}\right)' = \dfrac{5(x+1)^9(x-1)}{x^6}$

(17) $f'(x) = \left[\left(\dfrac{x-1}{x+2}\right)^{\frac{1}{4}}\right]' = \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{x-1}{x+2}\right)^{-\frac{3}{4}} \cdot \left(\dfrac{(x+2)-(x-1)}{(x+2)^2}\right) = \dfrac{3}{4}\left(\dfrac{x-1}{x+2}\right)^{-\frac{3}{4}} \dfrac{1}{(x+2)^2}$

(18) $f'(x) = \left[3\cos^3 x + 3\sin x(2\cos x(-\sin x))\right] + 3\sin^2 x \cdot \cos x = 3\cos^3 x - 3\sin^2 x \cos x =$

$= 3\cos x(\cos^2 x - \sin^2 x) = 3\cos x \cos 2x$

(19) $f'(x) = \dfrac{1}{\arcsin x} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

(20) $f'(x) = \left(\dfrac{\sqrt{x^2+1} - x}{\sqrt{x^2+1} + x}\right) \cdot \left[\dfrac{\left(2x \cdot \frac{1}{2\sqrt{x^2+1}} + 1\right)(\sqrt{x^2+1} - x) - \left(2x \cdot \frac{1}{2\sqrt{x^2+1}} - 1\right)(\sqrt{x^2+1} + x)}{(\sqrt{x^2+1} - x)^2}\right] =$

$= \dfrac{\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} + 1\right)(\sqrt{x^2+1} - x) - \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} - 1\right)(\sqrt{x^2+1} + x)}{(x^2+1) - x^2} = \left(x - \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+1}} + \sqrt{x^2+1} - x\right) - \left(x + \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+1}} - \sqrt{x^2+1} - x\right)$

$= 2\sqrt{x^2+1} - \dfrac{2x^2}{\sqrt{x^2+1}} = \dfrac{2}{\sqrt{x^2+1}}$

תרגיל מס' 9

ההגשה בזוגות בלבד עד 19\01\05

נגזרות:

1. חשבו את הנגזרות של פונקציות סתומות:

1. $x^2 = \frac{y^2}{y^2 - 1}$

2. $1 - \sqrt{y} = x(1 + \sqrt{y})$

3. $\sqrt{1 + xy} = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$

4. $e^{\frac{-x}{y}} = y^2 - \sqrt{x}$

2. חשבו את הנגזרת של הפונקציות הבאות:

1. $f(x) = (\ln x)^{\ln x}$
2. $f(x) = (\cos x)^{\pi x^2}$
3. $f(x) = \ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right|$
4. $f(x) = e^{2x} \ln x$
5. $f(x) = (1 + \frac{1}{x})^x$
6. $f(x) = \sqrt{x^2 + 4} \cdot \sin^2 x \cdot 2^x$

שימוש במשפטי רול ולגרנז'

3. תהיה $f(x) = x^4 - 20x^3 - 25x^2 - x + 1$. הראו שבקטע (-1,1) קיים פתרון למשוואה
$4x^3 - 60x^2 - 50x - 1 = 0$

4. הראו שלפולינום $x^3 - 12x + D$ (D כלשהו) אין יותר מפתרון אחד באינטרוול [-2,2].

5. הראו שהפונקציה $f(x)=x^3-3x^2+5x-11$ מקבלת את הערך 10- פעם אחת ויחידה.($f(x)=-10$ עבור x יחיד).

6. הוכיחו:

1. $\frac{1}{6}<\ln(\frac{6}{5})<\frac{1}{5}$
2. $1+x<e^x<1+x\cdot e^x$
3. לכל $\ln\frac{b}{a}<(\frac{b}{a}-1), b>a>0$
4. תנו הערכה ל- $\sqrt{65}$ בעזרת משפט לגרנז'.

7. חשבו את הגבולות :

1. $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{1+x^3}$
2. $\lim_{x\to 0^+}\frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x}$
3. $\lim_{x\to 0^+}x^x$
4. $\lim_{x\to\infty}\ln(\ln x)\cdot x^{\frac{-1}{2}}$
5. $\lim_{x\to 1}(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{\ln x})$
6. $\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x+\sin x}$
7. $\lim_{x\to 0}\frac{x}{x+\sin x}$

בהצלחה!

פתרון תרגיל בית מס' 9

(1)

$$x^2 = \frac{y^2}{y^2-1} \quad \Rightarrow \quad x^2 = 1 + \frac{1}{y^2-1}$$

$$2x = \frac{-2y\cdot y'}{(y^2-1)^2} \qquad y' = \frac{x(y^2-1)^2}{-y}$$

(2)

$$1-\sqrt{y} = x\left(1+\sqrt{y}\right) \quad \Rightarrow \quad x = \frac{1-\sqrt{y}}{1+\sqrt{y}}$$

$$1 = \frac{-\frac{1}{2\sqrt{y}}\cdot y'\left(1+\sqrt{y}\right) - \left(1-\sqrt{y}\right)\frac{1}{2\sqrt{y}}\cdot y'}{\left(1+\sqrt{y}\right)^2} = \frac{-\frac{y'}{2\sqrt{y}} - \cancel{\frac{\sqrt{y}\,y'}{2\sqrt{y}}} - \frac{y'}{2\sqrt{y}} + \cancel{\frac{\sqrt{y}\,y'}{2\sqrt{y}}}}{\left(1+\sqrt{y}\right)^2} = \frac{-\frac{y'}{\sqrt{y}}}{\left(1+\sqrt{y}\right)^2}$$

$$1 = \frac{-y'}{\sqrt{y}\left(1+\sqrt{y}\right)^2} \quad \Rightarrow \quad y' = -\sqrt{y}\left(1+\sqrt{y}\right)^2$$

(3)

$$\sqrt{1+xy} = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$$

$$\frac{y+x\cdot y'}{2\sqrt{1+xy}} = \frac{y-x y'}{y^2} + \frac{xy'-y}{x^2} = \frac{1}{y} - \frac{xy'}{y^2} + \frac{y'}{x} - \frac{y}{x^2} = y'\left(\frac{1}{x} - \frac{x}{y^2}\right) + \frac{1}{y} - \frac{y}{x^2}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{y}{2\sqrt{1+xy}} + y'\left(\frac{x}{2\sqrt{1+xy}}\right) = y'\left(\frac{1}{x} - \frac{x}{y^2}\right) + \frac{1}{y} - \frac{y}{x^2}$$

$$y' = \frac{\frac{1}{y} - \frac{y}{x^2} - \frac{y}{2\sqrt{1+xy}}}{\frac{x}{2\sqrt{1+xy}} - \frac{1}{x} + \frac{x}{y^2}}$$

(4)

$$e^{-\frac{x}{y}} = y^2 - \sqrt{x}$$

$$e^{-\frac{x}{y}}\left(\frac{-y + x\cdot y'}{y^2}\right) = 2y\cdot y' - \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$y'\left(2y - \frac{x}{y^2}\cdot e^{-\frac{x}{y}}\right) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{e^{-\frac{x}{y}}}{y}$$

$$y' = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{e^{-\frac{x}{y}}}{y}}{2y - \frac{x}{y^2}\cdot e^{-\frac{x}{y}}}$$

2

(1) $f(x) = (\ln x)^{\ln x} = e^{\ln x \cdot \ln(\ln x)}$

$$f'(x) = e^{\ln x \cdot \ln(\ln x)} \cdot \left(\frac{1}{x} \cdot \ln(\ln x) + \cancel{\ln x} \cdot \frac{1}{\cancel{\ln x} \cdot x} \right) = \ln x^{(\ln x)} \cdot \left(\frac{\ln(\ln x) + 1}{x} \right)$$

(2) $f(x) = (\cos x)^{\pi x^2} = e^{\pi x^2 \cdot \ln(\cos x)}$

$$f'(x) = e^{\pi x^2 \cdot \ln(\cos x)} \cdot \left[2\pi x \cdot \ln(\cos x) + \frac{\pi x^2 (-\sin x)}{\cos x} \right] =$$

$$= \cos x^{\pi x^2} \cdot 2\pi x \left[\ln(\cos x) - \frac{x \cdot \tan x}{2} \right]$$

(3) $f(x) = \ln \left| \frac{x+1}{x-1} \right|$

$$f'(x) = \left(\frac{x-1}{x+1} \right) \cdot \frac{(x-1) - (x+1)}{(x-1)^2} = \frac{-2}{x^2 - 1}.$$

(4) $f(x) = e^{2x} \cdot \ln x$

$$f'(x) = 2e^{2x} \cdot \ln x + \frac{e^{2x}}{x} = e^{2x} \left(2 \ln x + \frac{1}{x} \right)$$

(5) $f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e^{x \ln(1 + \frac{1}{x})}$

$$f'(x) = e^{x \cdot \ln(1 + \frac{1}{x})} \left[\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) + \frac{x}{1 + \frac{1}{x}} \cdot \frac{(-1)}{x^2} \right] = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \left[\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{1+x} \right]$$

(6) $f(x) = \sqrt{x^2+4} \cdot \sin^2 x \cdot 2^x$

(*) ניתן לגזור בעזרת כלל של כל הגורמים, אבל ניתן

גם להציג את $f(x)$ בצורה לוגריתם:

$y = \sqrt{x^2+4} \cdot \sin^2 x \cdot 2^x$ {כל הגורמים חיוביים}

$$\ln y = \ln \left[(x^2+4)^{\frac{1}{2}} \cdot \sin^2 x \cdot 2^x \right] = \frac{1}{2} \ln(x^2+4) + 2 \ln \sin x + x \ln 2$$

ונגזור:

$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{\cancel{2}} \frac{\cancel{2}x}{x^2+4} + \frac{2\cos x}{\sin x} + \ln 2$$

$$y' = \left(\frac{x}{x^2+4} + \frac{2\cos x}{\sin x} + \ln 2 \right) \cdot y$$

$$y' = \left(\frac{x}{x^2+4} + \frac{2\cos x}{\sin x} + \ln 2 \right) \cdot \sqrt{x^2+4} \cdot \sin^2 x \cdot 2^x$$

3 (1) צ"ל לפולינום $f(x)=x^4-20x^3-25x^2-x+1$ $4x^3-60x^2-50-1=0$

קיים פתרון בקטע $(-1,1)$

__פתרון:__

נניח לא כי מתקיים $f'(x)=4x^3-60x-50x-1$

צ"מ הפולינום הנתון מתאפס. כאשר $f'(x)$ מתאפסת ⇐ חייב להיות

קיצון מחוץ בקטע הנתון $(-1,1)$.

נבדוק: $f(-1)=(-1)^4+20(-1)-25(-1)^2+1+1=-2$

$f(1)=(1)^4-20(1)-25(1)^2-1+1=-44$

נבדוק גם את ערך הפונקציה ב $x=0$

$f(0)=1$

צ"מ לפי משפט ערך הביניים [רציף]

בקטע $[0,1]$ $f(x)$ רציפה ולכן קיים $0<x_1<1$ כך ש: $f(x_1)=0$

וגם בקטע $[-1,0]$ $f(x)$ רציפה ולכן קיים $-1<x_2<0$ כך ש: $f(x_2)=0$

עכשיו קיבלנו $x_1,x_2\in(-1,1)$ כך ש: $f(x_1)=f(x_2)$ אזי

לפי משפט רול קיים $x_2<c<x_1$ כך ש $f'(c)=0$.

וראינו שהפולינום הנתון האחר בגזרת $f'(x)$ לא יש פתרון לכן [c]

לפולינום בקטע $(-1,1)$. מש"ל.

4 צ"ל: לפולינום $x^3-12x+D$ [לכל D] __אין__ יותר מפתרון אחד ב: $[-2,2]$.

__פתרון:__ נגדיר $f(x)=x^3-12x+D$ פונקציה.

$f'(x)=3x^2-12x$ נבדוק מתי מתקיים $f'(x)=0$

$3x^2-12x=0$

$x=\pm 2$ ⇐ $x=2$, $x=-2$ | כך נקי קיצון גלובליים [שימו לב!!! אין כאן חשיבות להגדרת המקום D]

אם נניח בשלילה כי יש 2 שורשים, אזי: a,b ב $[-2,2]$

כאשר מתקיים $f(a)=f(b)=0$. צ"מ קיים $c\in(a,b)$ {כך ש $-2<c<2$}

ו $f'(c)=0$ [לפי משפט רול]

אבל ראינו כי $f'(x)=0$ רק עבור $x=\pm 2$ ולכן לא

קיים $c\in(-2,2)$. הנחת השלילה לא נכונה

וקיים לכל __היותר__ פתרון אחד במשוואה.

5

צ"ל: $f(x)=x^3-3x^2+5x-11$ מקבלת את הערך -10 פעם אחת ויחידה.

(*) במילים אחרות $x^3-3x^2+5x-11=-10$ עבור x יחיד

אז נגדיר $g(x)=x^3-3x^2+5x-1$ פונק' שצריכה לקבל פתרון אחד בלבד.

פתרון: $g(x)=x^3-3x^2+5x-1$

$g'(x)=3x^2-6x+5$

(*) נוכיח שיש פתרון אחד לפחות:

$g(0)=-1<0$

$g(1)=1-3+5-1=2>0$

אז לפי משפט ערך הביניים $g(x)$ רציפה בקטע $(0,1)$ ומקיימת

$g(0)\cdot g(1)<0$ אז קיים $0<c<1$ כך ש: $g(c)=0$.

(*) נניח כי קיימים 2 פתרונות c,d כך ש: $g(c)=g(d)=0$

אז לפי משפט רול קיים $c<x'<d$ כך ש: $g'(x')=0$

(*) נבדוק מתי מתקיים $g'(x')=0$

$$3x^2-6x+5=0$$

$$x_{1,2}=\frac{6\pm\sqrt{36-4\cdot15}}{6}$$ <0 לכן אין פתרונות למשוואה

אז לא קיים $x'\in\mathbb{R}$ כך ש: $g'(x')=0$

ולכן ההנחה היתה שגויה ולא קיימים שני פתרונות שונים למשוואה.

לכן סה"כ קיים פתרון והוא יחיד.

6

(1) $\frac{1}{6}<\ln\left(\frac{6}{5}\right)<\frac{1}{5}$

נגדיר $f(x)=\ln x$ בקטע $[5,6]$. $f(x)$ רציפה ב-$[5,6]$ וגזירה ב-$(5,6)$. $\{x>0\}$

לכן לפי משפט לגרנז' קיים $5<c<6$ כך ש: $f'(c)=\frac{f(6)-f(5)}{6-5}$

$f'(c)=\ln 6-\ln 5=\ln\frac{6}{5}$

$f'(x)=\frac{1}{x}$

אז עבור c מתקיים: $\ln\frac{6}{5}=\frac{1}{c}$

ואם $5<c<6$

אז $\frac{1}{6}<\frac{1}{c}<\frac{1}{5}$ $\frac{1}{6}<\ln\frac{6}{5}<\frac{1}{5}$ מ.ש.ל.

6

(2) $1+x < e^x < 1+x\cdot e^x$

נגדיר $f(x)=e^x$ בקטע $(0,x)$. $f(x)$ רציפה וגזירה בקטע

ולכן לפי משפט לגרנז' קיים $0<c<x$ כך ש

$$f'(c)=\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{e^x-1}{x}$$

$$f'(x)=e^x \Rightarrow f'(c)=e^c$$

מתקיים

$$\frac{e^x-1}{x}=e^c$$

$$\Downarrow$$

$$e^x = x\cdot e^c+1$$

אזי, $1<e^c<e^x \Leftarrow 0<c<x$

$$x\cdot 1+1 < e^x < x\cdot e^x+1$$

$$\Downarrow$$

$$1+x<e^x<1+x\cdot e^x$$

מ.ש.ל.

(3) לכל $b>a>0$ $\ln\left(\frac{b}{a}\right) < \left(\frac{b}{a}-1\right)$

נגדיר $f(x)=\ln x$ בקטע (a,b) . $f(x)$ רציפה ב-$[a,b]$ וגזירה ב-(a,b)

לכן לפי משפט לגרנז' מתקיים $a<c<b$ כך ש:

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}{b-a}$$

$$f'(x)=\frac{1}{x}$$

אזי מתקיים

$$\frac{1}{c}=\frac{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}{b-a}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{b-a}{c}=\ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

אזי, $a<c<b$

$$\frac{1}{b}<\frac{1}{c}<\frac{1}{a}$$

$|\times(b-a)$ כי $b>a>0$

$$\frac{b-a}{b}<\frac{b-a}{c}<\frac{b-a}{a}$$

אזי $\ln\left(\frac{b}{a}\right) < \frac{b-a}{a} = \frac{b}{a}-1$

מ.ש.ל.

(4) מצא הערכה ל-$\sqrt{65}$:

נגדיר $f(x)=\sqrt{x}$. בקטע $(64,65)$ $f(x)$ רציפה וגזירה בקטע.

אזי לפי משפט לגרנז' קיים $64<c<65$ כך ש:

$$f'(c)=\frac{f(65)-f(64)}{65-64}$$

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

אזי

$$\frac{1}{2\sqrt{c}}=\sqrt{65}-\sqrt{64}$$

אזי $64<c<65$

$8<\sqrt{c}<\sqrt{65}$

$$\frac{1}{2\sqrt{65}}<\frac{1}{2\sqrt{c}}<\frac{1}{16}$$

אזי $8=\sqrt{64}<\sqrt{65}<8+\frac{1}{16}$.

7

(1) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{x}-1}{1+x^3} = 0$

(2) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\frac{1}{x}}{e^{\frac{1}{x^2}}} \stackrel{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{-\frac{1}{x^2}}{e^{\frac{1}{x^2}}\left(-\frac{2}{x^3}\right)} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{e^{-\frac{1}{x^2}}\cdot x}{2} = 0$

(3) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^x = \lim\limits_{x\to 0^+} e^{x\ln x} = e^{\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x} \stackrel{(*)}{=} 1$

$(*)$ $\lim\limits_{x\to 0^+} x\cdot \ln x = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln x}{\frac{1}{x}} \stackrel{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x}\cdot\left(\dfrac{x^2}{-1}\right) = \lim\limits_{x\to 0^+} -x = 0$

(4) $\lim\limits_{x\to\infty} \ln(\ln x)\cdot x^{-\frac{1}{2}} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln(\ln x)}{\sqrt{x}} \stackrel{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\frac{1}{\ln x}\cdot\frac{1}{x}}{\frac{1}{2\sqrt{x}}} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2\sqrt{x}}{x\ln x} =$

$= \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2}{\sqrt{x}\cdot\ln x} = 0$

(5) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{x-1} - \dfrac{1}{\ln x}\right) = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln x - x + 1}{\ln x\,(x-1)} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\frac{1}{x}-1}{\underbrace{\frac{x-1}{x}+\ln x}_{\frac{x-1+x\ln x}{x}}} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{(1-x)}{x-1+x\cdot\ln x} \stackrel{\frac{0}{0}}{=}$

$\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{-1}{1+\ln x+1} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{-1}{2+\ln x} = -\dfrac{1}{2}$

(6) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x}{x+\sin x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{1+\frac{\sin x}{x}} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{1+\underbrace{\frac{1}{x}}_{0}\cdot\underbrace{\sin x}_{\text{חסום}}} = 1.$

(7) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{x+\sin x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{1+\underbrace{\frac{\sin x}{x}}_{1}} = \dfrac{1}{2}$

תרגיל מס' 10

ההגשה בזוגות בלבד עד 31\01\06

1. חקרו את הפונקציות הבאות: (תחום הגדרה, נק' חיתוך עם הצירים, נק' קיצון ותחומי עלייה וירידה, נק' פיתול ותחומי קמירות, אסימפטוטות ושרטוט גרף הפונקציה)

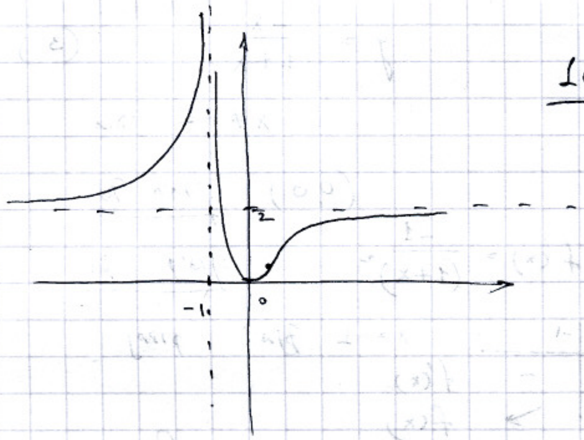
1. $y = \frac{2x^2}{(x+1)^2}$
2. $y = x\ln x$
3. $y = \frac{-x}{1+x}$
4. $y = \frac{1}{2}x - \arctan x$
5. $y = e^{\frac{1}{x}}$
6. $y = (x+1)^{\frac{2}{3}} + (x-1)^{\frac{2}{3}}$

2. חשבו את האינטגרלים הבאים:

1. $\int (t + \frac{1}{t})^2 dt$
2. $\int \frac{x^3}{1-x} dx$
3. $\int x\sqrt{x-1}dx$
4. $\int \frac{(\ln x)^2}{x^2} dx$
5. $\int x^n \ln x dx$
6. $\int \frac{\sin x}{e^x} dx$
7. $\int x\cos x^2 dx$
8. $\int \frac{2}{x^2 - x - 6} dx$

בהצלחה!

פתרון תרגול בית 10



פונקציות:

(1) $y = \frac{2x^2}{(x+1)^2}$

ת.ה: $x \neq -1$

נק' חיתוך: $(0,0)$

נק' קיצון:

$$f'(x) = \frac{4x}{(x+1)^3}$$

נבדוק: $x=0$, $x=-1$

f': $+$ (-1) $-$ (0) $+$

$f(x)$ עולה ב- $(-\infty,-1),(0,\infty)$

יורדת ב- $(-1,0)$

בנק' $(0,0)$ יש מינימום

$$f''(x) = \frac{4(1-2x)}{(x+1)^4}$$

נבדוק בנק' $x=\frac{1}{2}$, $x=-1$

$f''(x)$: $+$ (-1) $+$ $(\frac{1}{2})$ $-$

$f(x)$ קמורה $\cup$ ב $(-\infty,-1)$; $(-1,\frac{1}{2})$

קמורה $\cap$ ב $(\frac{1}{2},\infty)$

נק' פיתול: $(\frac{1}{2}, \frac{2}{9})$

אסימפטוטות:

$$\lim_{x\to -1} \frac{2x^2}{(x+1)^2} = \infty$$

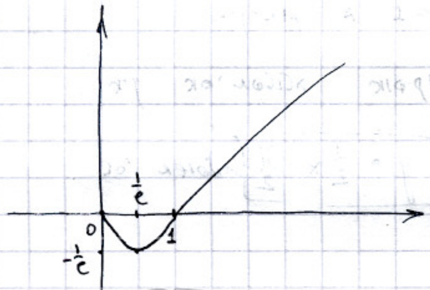
יש אסימפטוטה אנכית ב- $\boxed{x=-1}$ {משני הצדדים}

$$a = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x}{(x+1)^2} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x}{x^2+2x+1} = 0$$

$$b = \lim_{x\to\pm\infty} f(x) - ax = \lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 2$$

יש אסימפטוטה אופקית $\boxed{y=2}$ {משני הצדדים}

(2) $y = x\ln x$



ת.ה: $x>0$

$f'(x) = \ln x + 1$

נק' חיתוך $(1,0)$

$f'(x)=0 \Rightarrow \ln x = -1$

$x = e^{-1}$

	0	$\frac{1}{e}$	∞
$f'(x)$	$-$	$+$	
$f(x)$	↘	↗	

בנק' $(\frac{1}{e}, -\frac{1}{e})$ יש מינימום

$f(x)$ עולה לכל $x > \frac{1}{e}$

-- יורדת ל: $x\in(0,\frac{1}{e})$

$f''(x) = \frac{1}{x} > 0$ $f(x)$ תמיד קמורה $\cup$

$x=0$ נק' חשודה שלא בתחום הגדרה

אסימפטוטות:

$$\lim_{x\to 0^+} x\ln x = 0$$ {כפי שראינו בתרגול}

לכן אין אסימפטוטה אנכית

$$a = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x\cdot\ln x}{x} = \lim_{x\to\infty} \ln x = \infty$$

אין אסימפטוטה משופעת

(3) $y = \frac{-x}{1+x}$

ת.ה: $x \neq -1$

נק' חיתוך $(0,0)$

נק' קיצון: $f'(x) = \frac{-1}{(1+x)^2}$

נבדוק בנק' $x=-1$

	-1		
$-$		$-$	$f'(x)$
↘		↘	$f(x)$

לכן אין נק' קיצון

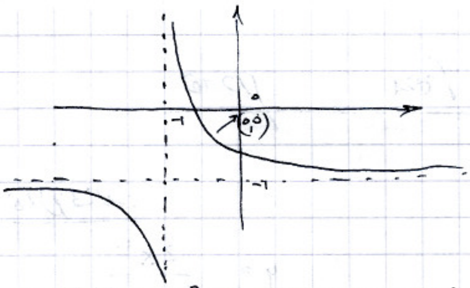
$f(x)$ תמיד יורדת

אסימפטוטות:

$\lim_{x \to -1^+} \frac{-x}{1+x} = +\infty$

$\lim_{x \to -1^-} \frac{-x}{1+x} = -\infty$

יש אסימפטוטה אנכית ב- $\boxed{x=-1}$



$f''(x) = \frac{2}{(x+1)^3}$ נק' פיתול:

נבדוק בנק' $x=-1$

	-1		
$-$		$+$	$f''(x)$
$\cap$		$\cup$	$f(x)$

לכן יש שינוי פיתול ב- $x=-1$

$a = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{-1}{1+x} = 0$

$b = \lim_{x \to \pm\infty} f(x) - ax = \lim_{x \to \infty} \frac{-x}{1+x} = -1$

אסימפטוטה משופעת $\boxed{y=-1}$

(4) $y = \frac{1}{2}x - \arctan x$

מוגדרת לכל x, נק' חיתוך $(0,0)$

$f'(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{x^2+1} = \frac{x^2-1}{2(x^2+1)}$

נבדוק בנק' $x = \pm 1$

	-1		1		
$+$		$-$		$+$	$f'(x)$
↗		↘		↗	$f(x)$

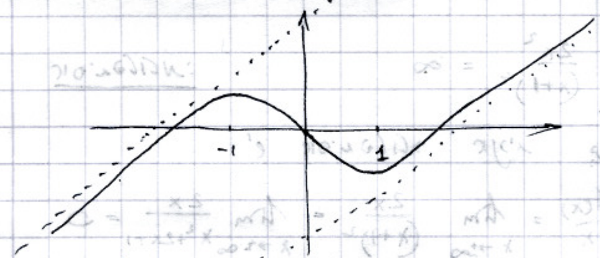
יש מקסימום ב- $x=-1$

מינימום ב- $x=1$

אין אסי' אנכית

אס' משופעת $\boxed{y = \frac{1}{2}x - \frac{\pi}{2}}$

אס' משופעת $\boxed{y = \frac{1}{2}x + \frac{\pi}{2}}$



$f''(x) = \frac{2x \cdot 2(x^2+1) - 4x(x^2-1)}{4(x^2+1)^2} = \frac{2x}{(x^2+1)^2}$

נבדוק ב- $x=0$

	0		
$-$		$+$	$f''(x)$
$\cap$		$\cup$	$f(x)$

יש נק' פיתול ב- $x=0$

$a = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{2} - \frac{\arctan x}{x} = \frac{1}{2}$

$b = \lim_{x \to \infty} f(x) - ax = \lim_{x \to \infty} -\arctan x = -\frac{\pi}{2}$

$a = \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{2} - \frac{\arctan x}{x} = \frac{1}{2}$

$b = \lim_{x \to -\infty} f(x) - ax = \lim_{x \to -\infty} -\arctan x = \frac{\pi}{2}$

אינטגרלים:

(1) $\int \left(t+\frac{1}{t}\right)^2 dt = \int t^2+2+\frac{1}{t^2}\,dt = \frac{t^3}{3}+2t-\frac{1}{t}+C$

(2) $\int \frac{x^3}{1-x}\,dx = \int \frac{x^3-1+1}{1-x}\,dx = \int \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(1-x)}+\frac{1}{1-x}\,dx = -\int x^2+x+1\,dx + \int \frac{1}{1-x}\,dx =$

$= -\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}-x+\ln|1-x|+C$

(3) $\int x\sqrt{x-1}\,dx = \int (u+1)\sqrt{u}\,du = \int u^{3/2}+u^{1/2}\,du = \frac{2}{5}u^{\frac{5}{2}}+\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}+C =$

$x=u+1 \quad u=x-1$

$du=dx$

$= \frac{2}{5}(x-1)^{5/2}+\frac{2}{3}(x-1)^{3/2}+C$

(4) $\int \frac{(\ln x)^2}{x^2}\,dx = \int \frac{t^2}{e^t}\,dt = \int t^2 e^{-t}\,dt =$

$t=\ln x \quad x=e^t$

$dt=\frac{1}{x}dx$

$u=t^2 \quad u'=2t$

$v'=e^{-t} \quad v=-e^{-t}$

$= -e^{-t}\cdot t^2+\int 2t\cdot e^{-t}\,dt = -e^{-t}\cdot t^2+2\left[-t\cdot e^{-t}+\int e^{-t}\,dt\right] =$

$u=t \quad u'=1$

$v'=e^{-t} \quad v=-e^{-t}$

$= -e^{-t}\cdot t^2-2t\cdot e^{-t}-2e^{-t} = -(\ln x)^2\cdot e^{-\ln x}-2(\ln x)\cdot e^{-\ln x}-2e^{-\ln x}+C =$

$= \boxed{\frac{-(\ln x)^2}{x}-\frac{2(\ln x)}{x}-\frac{2}{x}+C}$

(5) $\int x^n \ln x\,dx = \frac{\ln x\cdot x^{n+1}}{n+1}-\frac{1}{n+1}\int x^n\,dx = \frac{\ln x\cdot x^{n+1}}{n+1}-\frac{1\cdot x^{n+1}}{(n+1)^2}+C$

$u=\ln x \quad u'=\frac{1}{x}$

$v'=x^n \quad v=\frac{x^{n+1}}{n+1}$

(6) $\boxed{\int \frac{\sin x}{e^x}\,dx} = \int \sin x\cdot e^{-x}\,dx = -e^{-x}\cdot\sin x+\int \cos x\cdot e^{-x}\,dx =$

$u=\sin x \quad u'=\cos x$

$v'=e^{-x} \quad v=-e^{-x}$

$u=\cos x \quad u'=-\sin x$

$v'=e^{-x} \quad v=-e^{-x}$

$= -e^{-x}\cdot\sin x-e^{-x}\cos x-\boxed{\int \sin x\,(e^{-x})\,dx} = -e^{-x}\cdot\frac{1}{2}(\sin x+\cos x)+C$

(7) $\int x\cdot\cos x^2\,dx = \frac{1}{2}\int \cos u\,du = \frac{1}{2}\sin u+C = \frac{1}{2}\sin x^2+C$

$u=x^2$

$du=2x\,dx$

(8) $\int \frac{2}{x^2-x-6}\,dx = \int \frac{2}{(x+2)(x-3)}\,dx = \int -\frac{2}{5(x+2)}+\frac{2}{5(x-3)}\,dx = -\frac{2}{5}\ln|x+2|+\frac{2}{5}\ln|x-3|+C$

(*) $\frac{A}{x+2}+\frac{B}{x-3} = \frac{2}{(x+2)(x-3)}$

$=\frac{2}{5}\ln\left|\frac{x-3}{x+2}\right|+C$

$\begin{cases} 2=-3A+2B \\ 0=A+B \end{cases}$ $\quad A=-\frac{2}{5} \quad B=\frac{2}{5}$

(5) $y = e^{\frac{1}{x}}$

ת.ה. $x \neq 0$

נק' קיצון: $f'(x) = -\frac{1}{x^2} \cdot e^{\frac{1}{x}} = \frac{-e^{\frac{1}{x}}}{x^2}$

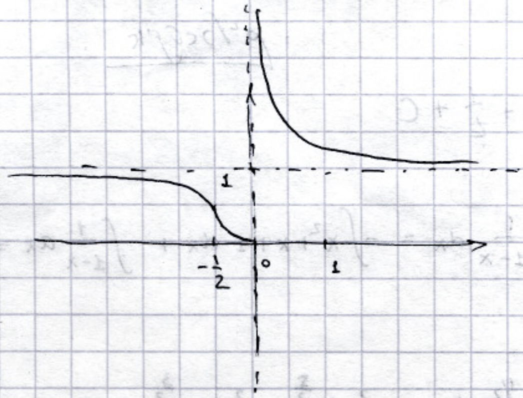
אין נק' קיצון, f יורדת לכל x

$f''(x) = \frac{2}{x^3} \cdot e^{\frac{1}{x}} - \frac{1}{x^2}\left(-\frac{1}{x^2}\right)e^{\frac{1}{x}} = \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^4}(2x+1)$

נבדוק בנק' $x = -\frac{1}{2}$, $x = 0$

	$x<-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}<x<0$	$x>0$
$f''(x)$	$-$	$+$	$+$
$f(x)$	$\cap$	$\cup$	$\cup$

אז: $x = -\frac{1}{2}$ נק' פיתול $\left(-\frac{1}{2}, e^{-\frac{1}{2}}\right)$



אסימפטוטות:

$\lim_{x \to 0^+} e^{\frac{1}{x}} = \infty$

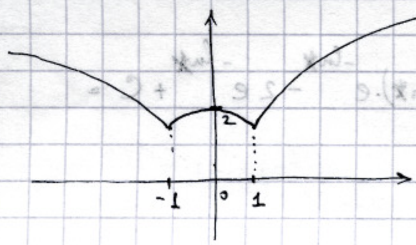
יש אסי' אנכית ב- $\boxed{x=0}$

$\lim_{x \to 0^-} e^{\frac{1}{x}} = 0$

$a = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x} = \ldots = 0$

$b = \lim_{x \to \pm\infty} f(x) - ax = \lim_{x \to \pm\infty} e^{\frac{1}{x}} = 1$

אסי' $\boxed{y=1}$



(6) $y = (x+1)^{\frac{2}{3}} + (x-1)^{\frac{2}{3}}$

ת.ה.: כל x נק' חיתוך: אין חיתוך עם ציר x

$x=0 \Rightarrow y=2 \quad (0,2)$

נק' קיצון: $f'(x) = \frac{2}{3} \cdot (x+1)^{-\frac{1}{3}} + \frac{2}{3}(x-1)^{-\frac{1}{3}}$

נבדוק בנק' $x=1$, $x=-1$ $\left[f(x) \right]$

לא מתאפס

$\left[\frac{2}{3\sqrt[3]{x+1}} + \frac{2}{3\sqrt[3]{x-1}} = 0 \right] \rightarrow x=0$

	$x<-1$	$-1<x<0$	$0<x<1$	$x>1$
$f'(x)$	$-$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	↘	↗	↘	↗

לכן נק' $x=\pm 1$ הן מינימום

נק' $x=0$ מקסימום

$f''(x) = -\frac{2}{9}(x+1)^{-1\frac{1}{3}} - \frac{2}{9}(x-1)^{-1\frac{1}{3}}$

נבדוק בנק' $x = \pm 1$

	$x<-1$	$-1<x<1$	$x>1$
$f''(x)$	$-$	$-$	$-$
$f(x)$	$\cap$	$\cap$	$\cap$

לכן $f(x)$ קמורה $\cap$ לכל x

אסימפטוטות: אין אסי' אנכית

$a = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{\sqrt[3]{(x+1)^2} + \sqrt[3]{(x-1)^2}}{x} = 0$

$b = \lim_{x \to \infty} f(x) - ax = \lim_{x \to \infty} \sqrt[3]{(x+1)^2} + \sqrt[3]{(x-1)^2} = \infty$

אין אסימפטוטה משופעת.

לא להגשה

1. חשבו את האינטגרלים הבאים :

א. $\int \frac{2t-3}{\left(t^2-3t+1\right)^2} dt$

ב. $\int \frac{x^3}{1-x} dx$

ג. $\int x^3\left(2-5x^4\right)^7 dx$

ד. $\int x\ln(x+1)dx$

ה. $\int \frac{x+13}{x^2-4x-5} dx$

ו. $\int \frac{(\ln t)^2}{t^2} dt$

ז. $\int x\cos x^2 dx$

ח. $\int \sin^4 t \cos t dt$

ט. $\int \frac{\sin x}{e^x} dx$

י. $\int \frac{1}{x^2+4x+7} dx$

יא. $\int \frac{\arctan 2x}{1+4x^2} dx$

יב. $\int \frac{x^4}{x^2+1} dx$

יג. $\int \frac{1}{t^2-3t+3} dt$

יד. $\int \frac{5x^2-11x}{(x-1)^2\left(x^2+2\right)} dx$

טו. $\int \frac{12x+5}{x^2\left(x^2+2x+5\right)} dx$

פתרון תרגיל מס' 10

עמ' 1

1.

א. $\int \frac{2t-3}{(t^2-3t+1)^2}\,dt = \frac{(t^2-3t+1)^{-1}}{-1} + c$

אינטגרל מיידי.

ב. $\int \frac{x^3}{1-x}\,dx = -\int (x^2+x+1)\,dx + \int \frac{dx}{1-x} = -\left(\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+x\right) - \ln|1-x| + c$

חילוק – פולינומים.

$$\begin{array}{l} -x^2-x-1 \\ \hline x^3 \;\big|\; -x+1 \\ \underline{x^3-x^2} \\ x^2 \\ \underline{x^2-x} \\ x \\ \underline{x-1} \\ 1 \end{array}$$

ג. $\int x^3(2-5x^4)^7\,dx = -\frac{1}{20}\int -20x^3(2-5x^4)^7\,dx =$

$= -\frac{1}{20}\cdot\frac{(2-5x^4)^8}{8} + c$

ד. $\int x\ln(x+1)\,dx = \frac{x^2}{2}\ln(1+x) - \frac{1}{2}\int \frac{x^2}{x+1}\,dx =$

$u'(x) = x \rightarrow u(x) = \frac{x^2}{2}$

$v(x) = \ln(x+1) \quad v'(x) = \frac{1}{x+1}$

$$\begin{array}{l} x-1 \\ \hline x^2 \;\big|\; x+1 \\ \underline{x^2+x} \\ -x \\ \underline{-x-1} \\ 1 \end{array}$$

$= \frac{x^2}{2}\ln(1+x) - \frac{1}{2}\left[\int (x-1)\,dx + \int \frac{dx}{x+1}\right] =$

$= \frac{x^2}{2}\ln(1+x) - \frac{x^2}{4} + \frac{x}{2} - \frac{1}{2}\ln|x+1| + c$

ה. $\int \frac{x+13}{x^2-4x-5}\,dx = \int \frac{x+13}{(x-5)(x+1)}\,dx = 3\int \frac{dx}{x-5} - 2\int \frac{dx}{x+1} =$

$\frac{x+13}{(x-5)(x+1)} = \frac{A}{x-5} + \frac{B}{x+1}$

$x+13 = A(x+1) + B(x-5)$

נציב: $x=5$: $\quad 18 = 6A \Rightarrow A = 3$

$x=-1$: $\quad 12 = -6B \Rightarrow B = -2$

$= 3\ln|x-5| - 2\ln|x+1| + c$

שא' 2.

ו. $\int \frac{(\ln t)^2}{t^2}dt = \int \frac{s^2}{e^s}ds = \int s^2 e^{-s} ds =$

$s=\ln t \Rightarrow t=e^s$ $\quad ds = \frac{dt}{t}$

$u(s)=s^2 \to u'(s)=2s$ $\quad v'(s)=e^{-s} \to v(s)=-e^{-s}$

$= -s^2e^{-s}+2\int se^{-s}ds = -s^2e^{-s}+2[-se^{-s}+\int e^{-s}ds]$

$u(s)=s \to u'(s)=1$ $\quad v'(s)=e^{-s} \to v(s)=-e^{-s}$

$= -s^2e^{-s}-2se^{-s}-2e^{-s}+C = -\frac{\ln^2 t}{t}-\frac{2\ln t}{t}-\frac{2}{t}+C$

ד. $\int x\cos x^2\,dx = \frac{1}{2}\int 2x\cdot\cos x^2 = \frac{1}{2}\sin x^2 + C$

ח. $\int \sin^4 t\cos t\,dt = \frac{\sin^5 t}{5}+C$

ט. $\int \frac{\sin x}{e^x}dx = \int \sin x\cdot e^{-x}dx = -e^{-x}\sin x+\int e^{-x}\cos x\,dx =$

$u'(x)=e^{-x} \to u(x)=-e^{-x}$ $\quad v(x)=\sin x \to v'(x)=\cos x$

$= -e^{-x}\sin x - e^{-x}\cos x - \int e^{-x}\sin x\,dx$

$u'(x)=e^{-x} \to u(x)=-e^{-x}$ $\quad v(x)=\cos x \to v'(x)=-\sin x$

אם נסמן: $I=\int \sin x\, e^{-x}dx$

נקבל: $I = -e^{-x}(\sin x+\cos x) - I$

$I = -\frac{e^{-x}}{2}(\sin x+\cos x)+C$

י. $\int \frac{dx}{x^2+4x+7} = \int\frac{dx}{(x+2)^2+3} = \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{x+2}{\sqrt{3}}+C$

$4^2-28<0$

י"א. $\int \frac{\arctan 2x}{1+4x^2}dx = \frac{1}{2}\int\frac{2}{1+4x^2}\cdot\arctan 2x\,dx = \frac{1}{2}\cdot\frac{(\arctan 2x)^2}{2}+C$

י"ב. $\int\frac{x^4}{x^2+1}dx = \int\frac{x^4-1+1}{x^2+1}dx = \int\frac{(x^2+1)(x^2-1)+1}{x^2+1}dx$

$= \int(x^2-1)dx + \int\frac{dx}{x^2+1} = \frac{x^3}{3}-x+\arctan x + C$

י"ג. $\int\frac{dt}{t^2-3t+3} = \int\frac{dt}{(t-\frac{3}{2})^2+\frac{3}{4}} = \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{\sqrt{3}(t-\frac{3}{2})}{2}\right)+C$

$9-4\cdot 3<0$

תרג' 3

ד. $\displaystyle\int \frac{5x^2-11x}{(x-1)^2(x^2+2)}dx = \int \frac{dx}{x-1} - 2\int (x-1)^{-2}dx + \int \frac{-x+6}{x^2+2}dx$

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{5x^2-11x}{(x-1)^2(x^2+2)} = \dfrac{A}{x-1} + \dfrac{B}{(x-1)^2} + \dfrac{Cx+D}{x^2+2} \\ 5x^2-11x = A(x-1)(x^2+2) + B(x^2+2) + (Cx+D)(x-1)^2 \\ A=1, \quad B=-2, \quad C=-1, \quad D=6 \end{array}\right\}$$

$$= \ln|x-1| + 2(x-1)^{-1} - \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+2}dx + 6\int \frac{dx}{x^2+2} =$$

$$= \ln|x-1| + \frac{2}{x-1} - \frac{1}{2}\ln(x^2+2) + \frac{6}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}} + C$$

10. $\displaystyle\int \frac{12x+5}{x^2(x^2+2x+5)}dx = 2\int\frac{dx}{x} + \int \frac{dx}{x^2} - \int \frac{2x+5}{x^2+2x+5}dx$

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{12x+5}{x^2(x^2+2x+5)} = \dfrac{A}{x} + \dfrac{B}{x^2} + \dfrac{Cx+D}{x^2+2x+5} \\ A=2, \quad B=1, \quad C=-2, \quad D=-5 \end{array}\right\}$$

$$= 2\ln|x| - \frac{1}{x} - \int \frac{(2x+2)+3}{x^2+2x+5}dx =$$

$$= 2\ln|x| - \frac{1}{x} - \int \frac{(2x+2)dx}{x^2+2x+5} - 3\int \frac{dx}{(x+1)^2+2^2} =$$

$$= 2\ln|x| - \frac{1}{x} - \ln|x^2+2x+5| - \frac{3}{2}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{2} + C$$

.2

א. $\displaystyle\int_1^4 \left(\sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right)dx = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + x^{\frac{1}{2}}\Big|_1^4 =$

$$\frac{16}{3} + 2 - \left(\frac{2}{3} + 1\right) = \frac{17}{3}$$

ב. $\displaystyle\int_1^0 x(2x+5)dx = \int_1^0 (2x^2+5x)dx = \frac{2x^3}{3} + \frac{5x^2}{2}\Big|_1^0 =$

$$= -\left(\frac{2}{3} + \frac{5}{2}\right) = -\frac{19}{6}$$

תרגיל מס' 1

ההגשה בזוגות עד : 31/10/04 16:00

1. פתרו את אי השוויונים הבאים:

1. $\frac{5+x}{9} < (\frac{x}{6}+1)^2$
2. $x^5 - x > 0$
3. $x^4 - 10x^2 + 9 < 0$
4. $(x+2)(x-5)^2(x-3)^4(x+4)^3 > 0$
5. $\frac{(x+2)^4(x-3)}{(4-x)^2(x-5)^3} \le 0$ (רמז : הפכו את המנה למכפלת ביטויים ע"י הכפלת אי השוויון במכנה בריבוע : $/\cdot b^2$ $\frac{a}{b} \le 0$ $\Leftarrow$ $ab \le 0$)

2. הוכיחו את אי השוויונים הבאים:

1. $a^3b + ab^3 \le a^4 + b^4$ לכל a,b ממשיים.
2. $8 \le (a+1)(b+1)(c+1)$ כאשר $abc = 1$, $0 < a$, $0 < b$, $0 < c$.

3. פתרו את המשוואות הבאות:

1. $3 \cdot 2^{x+5} = 8 \cdot 3^{x+3}$
2. $8^x - 4^{x+1} - 2^x + 4 = 0$
3. $(2x^2 - x)^{x^2-3x} = (2x^2 - x)^{x+5}$
4. $\left(\frac{x+1}{x}\right)^{x^2+x} = 1$
5. $\log_9(x+20) \cdot \log_x 3 = 1$
6. $x^{\log x^2+1} = x^3$

4. <u>פתרו את אי השוויונים הבאים:</u>

1. $(2^x - 1)^{-x} \le (2^x - 1)^{2x^2 - 2x}$
2. $\log_x(x+1) < \log_x(2x-1)$
3. $\log_{x-4}(x-2) < 2$

5. <u>הוכיחו ע"י אינדוקציה כי לכל n טבעי מתקיים:</u>

1. $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + 4 \cdot 5 + \ldots + 2n(2n+1) = \frac{4}{3}n(n+1)(2n+1)$
2. $\frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!} \le 2 - \frac{1}{n}$

בהצלחה !

פתרון תרגיל מס' 1

1. אי שוויונים:

1. $$\frac{5+x}{9} < \left(\frac{x}{6}+1\right)^2$$

$$\frac{5+x}{9} < \frac{x^2}{36} + \frac{x}{3} + 1 \quad / \cdot 36$$

$$20+4x < x^2+12x+36$$

$$0 < x^2+8x+16$$

$$0 < (x+4)^2$$

תיאור גרפי:

פרבולה המשיקה לציר ה-x
בנק' $x=-4$.

תשובה: $\boxed{x \neq 4.}$ (הביטוי $(x+4)^2$ מתאפס ב- $x=-4$
וחיובי לכל ערך אחר של x)

2. $$x^5 - x > 0$$

נפרק לגורמים: $x(x^4-1)>0$

לפי נוסחת כפל מקוצר: $x(x^2+1)(x^2-1)>0$

$$x(x^2+1)(x+1)(x-1)>0$$

הביטוי נתון כמכפלה לכן לפי שיטת הנחש:

$x=0$ מאפס את x מס' אי"ז של פעמים לכן נק' חיתוך.

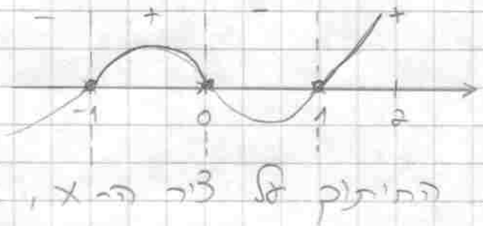
$x=1$ " " $(x-1)$ " " " " " " "

$x=-1$ " " $(x+1)$ " " " " " " "

x^2+1 לא מתאפס מעל הממשיים, הביטוי חיובי

לכן אינו משנה את סימן המכפלה.

תיאור גרפי:



נסמן את נק' החיתוך על ציר ה-x, ונציב $x=2$ בביטוי,

ונקבל $2^5-2=30$, לכן את הפונקציה חיובי עבור $x>1$

תשובה: $\boxed{x>1 \text{ או } -1<x<0}$

3. $x^4-10x^2+9<0$

נציב $t=x^2$: $t^2-10t+9<0$

$$t_{1,2}=\frac{10\pm\sqrt{100-36}}{2}=\frac{10\pm 8}{2}$$

$t_1=9$, $t_2=1$

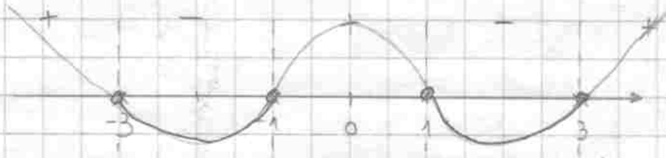
$x^2=9$ $\quad$ $x^2=1$

$x_{1,2}=\pm 3$ $\quad$ $x_{3,4}=\pm 1$

קיבלנו את ארבעת השורשים של הביטוי המקורי.

לכן יש לבדוק מתי: $(x+3)^1(x-3)^1(x+1)^1(x-1)^1<0$

כל שורש x_1,x_2,x_3,x_4 מאפס את הביטוי פעם אחת לכן נק' חיתוך.



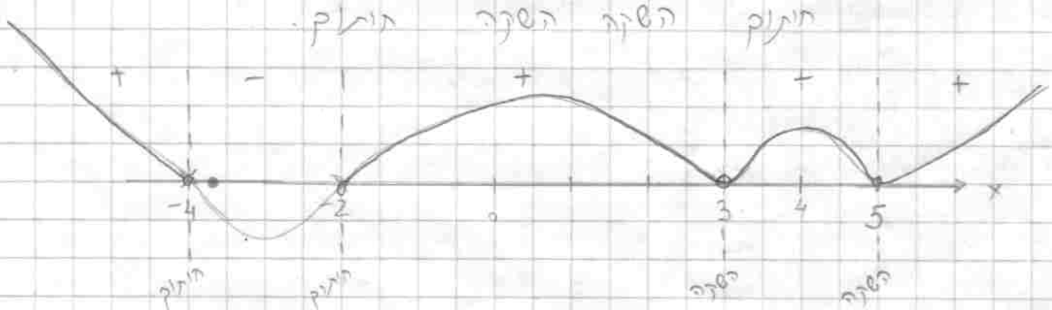
<u>תשובה:</u> $\boxed{1<x<3 \text{ או } -3<x<-1.}$

4. $(x+2)^1(x-5)^2(x-3)^4(x+4)^3>0$

מתאפס ע"י: -4 $\quad 3 \quad 5 \quad -2$

מס' פעמים: אי"ז $\quad$ זוגי $\quad$ זוגי $\quad$ אי"ז

חיתוך $\quad$ השקה $\quad$ השקה $\quad$ חיתוך.



<u>תשובה:</u> $\boxed{x>5 \text{ או } 3<x<4 \text{ או } -2<x<3 \text{ או } x<-4}$

5. $$\frac{(x+2)^4(x-3)}{(4-x)^2(x-5)^3}\le 0 \quad /\cdot(4-x)^4(x-5)^6$$

פתרון אי-השוויון המקורי <u>שקול</u> לפתרון אי השוויון

$$(x+2)^4(x-3)(4-x)^2(x-5)^3\le 0$$

כאשר נזכור שאי השוויון המקורי אינו מוגדר עבור $x=4,5$ המאפסים את המכנה.

לכן ת.ה.: $x\neq 4,5$.

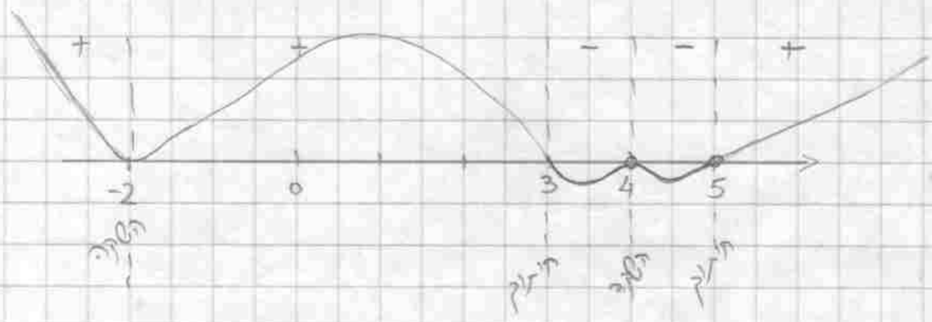
המשך סעיף 5: עמ' 3.

נפתור לפי שיטת הנחש את:

$$(x+2)^4(x-3)^1(4-x)^2(x-5)^3 \le 0$$

מתאפס ע"י: 5, 4, 3, -2

מס' פעמים: אי-זוגי, זוגי, אי-זוגי, זוגי



פתרון אי-שוויון זה: $3 \le x \le 5$, לאחר חיתוך עם ת.ה. נקבל:

<u>פתרון אי-השוויון המקורי:</u> $\boxed{4 < x < 5 \quad \text{או} \quad 3 \le x < 4.}$

2. 1. הוכח: $a^3b + ab^3 \le a^4 + b^4$ לכל $a,b \in \mathbb{R}$.

$$a^3b + ab^3 \le a^4 + b^4 \iff 0 \le a^4 - a^3b - ab^3 + b^4$$

$$\iff 0 \le a^3(a-b) - b^3(a-b) \iff 0 \le (a-b)(a^3-b^3)$$

$$\iff 0 \le (a-b)\underbrace{(a-b)(a^2+ab+b^2)}_{\text{נוסחת כפל מקוצר}} \iff$$

$$0 \le \underbrace{(a-b)^2}_{\text{תמיד אי-שלילי}}(a^2+ab+b^2)$$

נותר להראות ש: (a^2+ab+b^2) אי שלילי.

נבחין בין שני מקרים:

א. $ab \ge 0$: a^2, b^2 אי-שליליים, לכן סה"כ a^2+ab+b^2 אי-שלילי.

ב. $ab < 0$: $(a^2+ab+b^2) \ge a^2+2ab+b^2 = (a+b)^2 \ge 0$

לכן, גם במקרה זה $(a^2+ab+b^2) \ge 0$

ובסה"כ הוכחנו שהגענו לפסוק אמת,

ובכך מסתיימת ההוכחה.

2. צ"ל: $8 \le (a+1)(b+1)(c+1)$, כאשר $abc=1$, $a,b,c>0$.

נפתח את שני האגפים בו-זמנית:

$$(a+1)(b+1)(c+1) \ge 8$$

$$\underbrace{abc}_{=1}+ab+ac+a+bc+b+c+1 \ge 8$$

$$ab+ac+a+bc+b+c+2 \ge 8 \quad /-2$$

$$ab+a\cdot\frac{1}{ab}+a+b\cdot\frac{1}{ab}+b+\frac{1}{ab} \ge 6 \qquad , c=\frac{1}{ab} \text{ נציב}$$

$$ab+\frac{1}{b}+a+\frac{1}{a}+b+\frac{1}{ab} \ge 6 \quad /\cdot ab$$

$$a^2b^2+a+a^2b+b+ab^2+1 \ge 6ab \quad /-6ab$$

$$(a^2b^2-2ab+1)+(a^2b-2ab+b)+(ab^2-2ab+a)\ge 0$$

$$(ab-1)^2+b(a^2-2a+1)+a(b^2-2b+1)\ge 0$$

$$(ab-1)^2+\underset{>0}{b}(a-1)^2+\underset{>0}{a}(b-1)^2 \ge 0$$

$a(b-1)^2$ אי-שלילי כמכפלת אי-שליליים

$b(a-1)^2$ " " "

$(ab-1)^2$ אי-שלילי.

סה"כ קיבלנו סכום של ביטויים אי-שליליים, לכן אי-השוויון האחרון מתקיים.

3. 1.

$$3\cdot 2^{x+5}=8\cdot 3^{x+3}$$

$$3\cdot 2^2\cdot 2^{x+3}=8\cdot 3^{x+3} \quad /:8,\ :2^{x+3}$$

$$\frac{3}{2}=\frac{3^{x+3}}{2^{x+3}}$$

$$\left(\frac{3}{2}\right)^1=\left(\frac{3}{2}\right)^{x+3}$$

הבסיסים שווים, לכן נשווה בין המעריכים:

$$1=x+3$$

תשובה: $\boxed{x=-2}$

2. $8^x - 4^{x+1} - 2^x + 4 = 0$

נעבור לבסיס 2: $(2^3)^x - (2^2)^{x+1} - 2^x + 4 = 0$

$2^{3x} - 4\cdot 2^{2x} - 2^x + 4 = 0$

נציב $t=2^x$: $t^3 - 4\cdot t^2 - t + 4 = 0$

$t^2(t-4) - (t-4) = 0$

$(t-4)(t^2-1) = 0$

והשורשים הם: $t_1 = 4,\ t_2 = 1,\ t_3 = -1$

עבור t_1: $2^x = 4 = 2^2 \Rightarrow x = 2$

עבור t_2: $2^x = 1 = 2^0 \Rightarrow x = 0$

עבור t_3: $2^x = -1$, זה לא יתכן, לכן תשובה זו נפסלת.

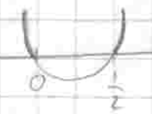
תשובה: $\boxed{x = 0, 2}$.

3. $(2x^2 - x)^{x^2-3x} = (2x^2 - x)^{x+5}$.

ת.ה.

נדרוש תחילה שהבסיס יהיה חיובי: $2x^2 - x > 0$

$x(2x-1) > 0$

תאור גרפי:  השורשים הם $0, \frac{1}{2}$

1- $a>0$.

הפרבולה מעל ציר ה-x כאשר: $\boxed{x > \frac{1}{2} \text{ או } x < 0}$

פתרון המשוואה:

כעת נשים לב שהבסיסים משני אגפי המשוואה שווים, לכן נותר להשוות בין המעריכים: $x^2 - 3x = x + 5$

$x^2 - 4x - 5 = 0$

$x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16+20}}{2} = 2 \pm 3$

$x_1 = 5$, $x_2 = -1$ - שני השורשים נמצאים בת.ה. לכן הם פתרונות אפשריים למשוואה.

מקרה קצה: אפשרות נוספת לפתרון היא כאשר הבסיס שווה ל-1 כי גם במקרה זה מתקיים שוויון.

לכן $2x^2-x=1$

$$2x^2-x-1=0$$

$$x_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{1+8}}{4}=\frac{1\pm3}{4}$$

$x_1=1$, $x_2=-\frac{1}{2}$, גם שורשים אלו נמצאים בת.ה.

לכן תשובה סופית: $\boxed{x=-\frac{1}{2},-1,1,5}$.

4. $$\left(\frac{x+1}{x}\right)^{x^2+x}=1$$

ת.ה.

נמצא תחום שהבסיס חיובי: $\frac{x+1}{x}>0 \quad /\cdot x^2$

שקול לפתרון: $(x+1)x>0$

תיאור גרפי: זו פרבולה ששורשיה הם $0,-1$ ו- $a>0$ לכן

לכן: ת.ה. $\boxed{x<-1 \text{ או } x>0}$

פתרון המשוואה: נשווה את המעריך ל-0: $x^2+x=0$

$$x(x+1)=0 \Rightarrow x_1\neq0,\ x_2\neq1$$

אולם שורשים אלו אינם בת.ה. ,לכן נפסלים.

מקרה ב': נשווה את הבסיס ל-1: $\frac{x+1}{x}=1 \quad /\cdot x$

$x+1=x \quad /-x$

$1\neq0$ הגענו לפסוק שקר

לכן גם מקרה זה לא יתכן

תשובה סופית: $\boxed{\text{אין פתרון}}$

5. $$\log_9(x+20)\cdot\log_x 3=1$$

ת.ה.

נדרוש שבסיס הלוגריתם יהיה חיובי ושונה מ-1: $\boxed{x\neq1,\ x>0}$.

פתרון המשוואה: נעבור לבסיס 3, לפי נוסחת מעבר בסיסים:

$$\log_9(x+20)\cdot\log_x 3=\frac{\log_3(x+20)}{\log_3 9}\cdot\frac{\log_3 3}{\log_3 x}=\frac{\log_3(x+20)}{2}\cdot\frac{1}{\log_3 x}$$

סה"כ קיבלנו:
$$\frac{1}{2}\cdot\frac{\log_3(x+20)}{\log_3 x}=1$$

$$\log_3(x+20)=2\cdot\log_3 x$$

לפי חוקי לוג.: $\log_3(x+20)=\log_3 x^2$

כעת ניתן להשוות בין הביטויים שבתוך הלוגריתמים (כי הבסיסים שווים):
$$x+20=x^2$$
$$x^2-x-20=0$$
$$x_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{1+80}}{2}=\frac{1\pm 9}{2}$$
$$x_1=5\ ,\ \cancel{x_2=-4}$$
לא מתאים.

תשובה: $\boxed{x=5}$

6. $x^{\log x^2+1}=x^3$.

ת.ה. נדרוש שבסיס החזקה יהיה חיובי, לכן:
$\boxed{x>0}$.

פתרון המשוואה: נשווה בין המעריכים: $\log x^2+1=3$
$$\log x^2=2$$
לפי הגדרת הלוגריתם: $10^2=x^2$
$$\Rightarrow 100=x^2 \Rightarrow x=\pm10$$
השורש 10- אינו מתאים. לכן, תשובה: $x=10$.

מקרה קצה:

שוויון מתקיים גם כשהבסיסים שווים ל-'1' וגם $x=1$

$x=1$ מתאים.

תשובה סופית: $\boxed{x=1,10}$

4. 1. $(2^x-1)^{-x} \le (2^x-1)^{2x^2-2x}$.

נבחין בין מס' מקרים:

מקרה א': $2^x-1>1$: $\Leftarrow$ $2^x > 2^1$

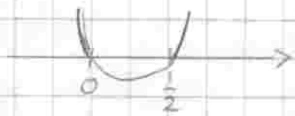
הבסיס 2 גדול מ-1, לכן סימן אי-השוויון נשמר! -

$x>1$

פתרון אי-השוויון: נפתור את $-x \le 2x^2-2x$

$2x^2-x \ge 0$

$x(2x-1) \ge 0 \Rightarrow$



$x \le 0$ או $x \ge \frac{1}{2}$.

נחתוך את הפתרון עם ת.ה. של מקרה א':

תשובה למקרה א': $\boxed{x>1}$

מקרה ב': $0<2^x-1<1$: $\Leftarrow$ $1<2^x<2$

$2^0<2^x<2^1$

הבסיס שלנו הוא '2' לכן אי השוויון נשמר: $0<x<1$

פתרון אי-השוויון: במקרה זה הבסיס בין 0 ל-1 לכן כיוון אי-השוויון בין החזקות מתהפך:

$-x \ge 2x^2-2x$

$2x^2-x \le 0$

$0 \le x \le \frac{1}{2}$

נחתוך את הפתרון עם ת.ה. של מקרה ב':

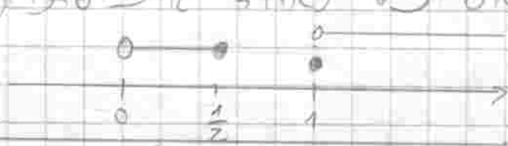
תשובה למקרה ב': $\boxed{0<x\le\frac{1}{2}}$

מקרה ג': כאשר $2^x-1=1$, מתקיים שוויון:

$2^x=2^1$

$\boxed{x=1}$

תשובה סופית: נאחד את פתרונות שלושת המקרים:



$0<x\le\frac{1}{2}$ או $x\ge1$

עמ' 9

2. $\log_x(x+1) < \log_x(2x-1)$

ת.ה. א: נדרוש שבסיס הלוג, x, יהיה חיובי ושונה מ-1, אלה, נוצרה דרישה גם לתנאי כדי החלוקה למקרים $x>1$, $0<x<1$.

ב: נדרוש שהביטויים שבתוך הלוג יהיו חיוביים:

$x+1>0$ וגם $2x-1>0$

$x>-1$ $2x>1$

$x>\frac{1}{2}$

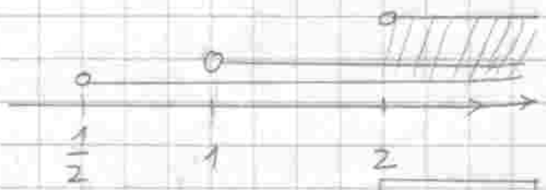
$$\underbrace{\qquad\qquad}_{x>\frac{1}{2}}$$

מקרה א': $x>1$: כיוון אי-השוויון נשמר:

$x+1<2x-1$

$2<x$

נחתוך עם ת.ה.:



תשובה למקרה א': $\boxed{x>2}$

מקרה ב': $0<x<1$: כיוון אי-השוויון מתהפך:

$x+1>2x-1$

$2>x$

נחתוך עם ת.ה.:

תשובה למקרה ב': $\boxed{\frac{1}{2}<x<1}$

תשובה סופית: $\boxed{\frac{1}{2}<x<1 \text{ או } x>2}$

עמ' 10

3. $\log_{x-4}(x-2)<2$

תחום: $x-2>0$ וגם ($x-4>0$ וגם $x-4\neq 1$)

$x>2$

נבדוק תוך כדי החלוקה למקרים

מקרה א': $x-4>1$ $\Leftarrow$ $\boxed{x>5}$

פתרון אי-השוויון: $\log_{x-4}(x-2)<\log_{x-4}(x-4)^2$

(השתמשתי בעובדה ש: $2=\log_{x-4}(x-4)^2$)

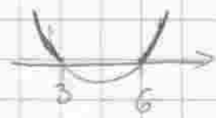
סימן אי-השוויון נשמר לכן:

$$x-2<(x-4)^2$$

$$x-2<x^2-8x+16$$

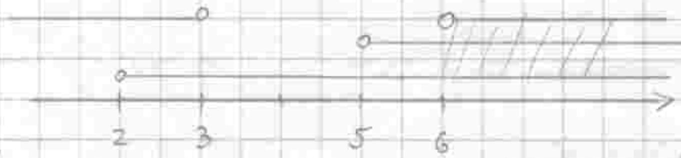
$$0<x^2-9x+18$$

$$x_{1,2}=\frac{9\pm\sqrt{81-72}}{2}=\frac{9\pm 3}{2} \begin{cases}6\\3\end{cases}$$



$x<3$ או $x>6$

נחתוך עם תחום:



תשובה למקרה א': $\boxed{x>6}$.

מקרה ב': $0<x-4<1$: $\boxed{4<x<5}$

סימן אי השוויון מתהפך לכן:

$$x-2<(x-4)^2$$

פתרון אי שוויון זה: $3<x<6$

נחתוך עם תחום:

תשובה למקרה ב': $\boxed{4<x<5}$.

תשובה סופית: $\boxed{4<x<5 \quad \text{או} \quad x>6}$

.5

1. נוכיח ע"י אינדוקציה את הטענה הבאה:

לכל n: $1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+\dots+2n\cdot(2n+1)=\frac{4}{3}n(n+1)(2n+1)$.

בסיס האינדוקציה: נבדוק עבור $n=1$.

$$1\cdot 2+2\cdot 3\overset{?}{=}\frac{4}{3}\cdot 1\cdot(2)(3).$$

$$8\overset{\checkmark}{=}8. \qquad \boxed{\checkmark}$$

הנחת האינדוקציה: נניח כי עבור $n=k$ מתקיים:

$$1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+\dots+2k(2k+1)=\frac{4}{3}k(k+1)(2k+1)$$

הוכחת האינדוקציה: צ"ל כי ל- $n=k+1$ מתקיים:

$$1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+\dots+2(k+1)(2(k+1)+1)=\frac{4}{3}(k+1)(k+2)(2k+3)$$

הוכחה: (שים לב שבמעבר מ-k ל-$k+1$ נוספו שני איברים)

$$\underbrace{1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+\dots+2k\cdot(2k+1)}_{\parallel}+(2k+1)(2k+2)+(2k+2)(2k+3)=$$

לפי הנחת האינדוקציה.

$$=\underbrace{\frac{4}{3}k(k+1)(2k+1)}+(2k+1)(2k+2)+(2k+2)(2k+3)=$$

$$=(k+1)\left[\frac{4}{3}k(2k+1)+2(2k+1)+2(2k+3)\right]=$$

$$=(k+1)\left[\frac{4}{3}k(2k+1)+4k+2+4k+6\right]=$$

$$=(k+1)\left[\frac{4}{3}k(2k+1)+8k+8\right]=\frac{4}{3}(k+1)\left[k(2k+1)+6k+6\right]$$

$$=\frac{4}{3}(k+1)(2k^2+7k+6)=\frac{4}{3}(k+1)(k+2)(2k+3)$$

מ.ש.ל.

2. נוכיח ע"י אינדוקציה, כי לכל n טבעי מתקיים:

$$\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\dots+\frac{1}{n!} \le 2-\frac{1}{n}$$

בסיס האינדוקציה: נבדוק עבור $n=1$:

$$\frac{1}{1!} \overset{?}{\le} 2-\frac{1}{1}$$

$$1 \overset{\checkmark}{\le} 1 \qquad \boxed{\checkmark}$$

הנחת האינדוקציה: נניח כי עבור $n=k$ מתקיים:

$$\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\dots+\frac{1}{k!} \le 2-\frac{1}{k}$$

הוכחת האינדוקציה: צ"ל עבור $n=k+1$ ש:

$$\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\dots+\frac{1}{(k+1)!} \le 2-\frac{1}{k+1}$$

הוכחה:

$$\underbrace{\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\dots+\frac{1}{k!}}_{\text{לפי הנחת האינדוקציה}}+\frac{1}{(k+1)!} \le 2-\frac{1}{k}+\frac{1}{(k+1)!}$$

כעת נותר להוכיח ש: $2-\frac{1}{k}+\frac{1}{(k+1)!} \le 2-\frac{1}{k+1}$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\frac{1}{(k+1)!} \le \frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\frac{1}{(k+1)!} \le \frac{1}{k(k+1)} \quad / \cdot (k+1)!$$

$$1 \le (k-1)!$$

והפסוק זה מתקיים לכל $k \ge 1$.

לכן בסה"כ הוכחנו כי:

$$\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\dots+\frac{1}{(k+1)!} \le 2-\frac{1}{k+1}$$

מ.ש.ל.

תרגיל מס' 2

ההגשה בזוגות עד : 7/11/04 16:00

קבוצות

1. מצאו איחוד וחיתוך לקבוצות הבאות:

1. $A=\{\,3k \mid k\in \mathrm{N}\,\}$ **,** $B=\{\,6k \mid k\in \mathrm{N}\,\}$

2. $A=(-\infty,-2)\cup[0,2)\cup(3,5.5]$, $B=(-2,3]\cup(4,\infty)$

3. $A=\{x \mid (x+2)(x-3)\le 19-x\}$, $B=\{\,x \mid 4<|x-2|<7\,\}$,
$C=\{\,x \mid -x^2+12x-32<0\,\}$

2. משלים:

א. מצאו את $\overline{A}$ (A^c) (ביחס ל- R) כאשר
$A=\{x \mid \sqrt{15-x}<x-3\}$.

ב. מצאו את $\overline{A}$ (A^c) ביחס ל- B כאשר: $A=\left\{\frac{1}{2n} \,\middle|\, n\in \mathrm{N}\right\}$ ו-
$B=\left\{\frac{1}{n} \,\middle|\, n\in \mathrm{N}\right\}$.

3. הוכיחו את הטענות הבאות ע"פ הגדרה:

א. $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$ (חוק הפילוג).

ב. $\overline{(A\cup B)}=\overline{A}\cap\overline{B}$ (דה-מורגן).

4. פתרו את אי השוויונים הבאים:

1. $x-1<\sqrt{x+5}$
2. $-\sqrt{x^2-x-2}<x$
3. $\left|\frac{x-3}{x+4}-2\right|<\frac{1}{2}$
4. $|2x-4|+3|x+1|<|3x+5|+7$

5. <u>הוכיחו באינדוקציה על n את הטענות הבאות:</u>

א. אי-שוויון ברנולי :

לכל $\alpha > -1$ ולכל $n \geq 1$ מתקיים : $(1+\alpha)^n \geq 1 + n\alpha$.

ב. לכל n מספרים ממשיים $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ (n טבעי)

מתקיים : $\left|\sum_{i=1}^{n} a_i\right| \leq \sum_{i=1}^{n} |a_i|$.

6. יהי $a > 1$ ולכן $\sqrt[n]{a} > 1$, כאשר n טבעי . נסמן : $\sqrt[n]{a} = 1 + x_n$

כאשר $x_n > 0$.

הוכיחו כי : א. $\frac{a-1}{n} \leq x_n$

ב. $\frac{a+n-1}{n} \leq \sqrt[n]{a}$

7. הוכיחו לפי פיתוח הבינום של ניוטון כי $2^n > n$ (רמז : 2=1+1).

בהצלחה !

עמ' 1
מרתק 11

פתרון תרגיל מס' 2.

1. מצאו חיתוך ואיחוד לקבוצות הבאות:

א. $A=\{3k \mid k\in \mathbb{N}\}$, ז"א A היא קב' המספרים המתחלקים ב-3 ללא שארית.

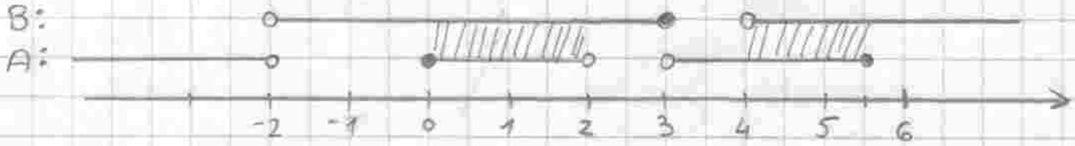
$B=\{6k \mid k\in \mathbb{N}\}$, B קב' המספרים המתחלקים ב-6 ללא שארית, ז"א מתחלקים ב-3 וגם ב-2 ללא שארית.

לכן: $\underline{A\cup B}=A=\{3k \mid k\in \mathbb{N}\}$ (כל מס' המתחלק ב-6 מתחלק גם ב-3, אך לא להפך, לכן $B\subseteq A$, לכן $A\cup B=A$).

$\underline{A\cap B}=B=\{6k \mid k\in \mathbb{N}\}$ (שוב, כיוון ש-$B\subsetneq A$ החיתוך יכול להיות רק B)

ב. $A=(-\infty,-2)\cup[0,2)\cup(3,5.5]$, $B=(-2,3]\cup(4,\infty)$

נצייר בשרטוט הקבוצות על הישר הממשי:



$\underline{A\cup B}=(-\infty,-2)\cup(-2,\infty)=\{x\in \mathbb{R} \mid x\neq -2\}$

$\underline{A\cap B}=[0,2)\cup(4,5.5]$

ג. $A=\{x \mid (x+2)(x-3)\le 19-x\}$, $B=\{x \mid 4<|x-2|<7\}$

$C=\{x \mid -x^2+12x-32<0\}$

תחילה נפשט את הקבוצות:

קבוצה A: $(x+2)(x-3)\le 19-x$

$x^2-3x+2x-6\le 19-x$

$x^2-25\le 0$

$\boxed{-5\le x\le 5} \Rightarrow A=\{x \mid -5\le x\le 5\}$

קבוצה B: $4<|x-2|<7$

נפצל את אי-השוויון הכפול באופן הבא:

$|x-2|<7$ וגם $|x-2|>4$

עמ' 2
מתוך 11

המשך סעיף ג', שאלה 1:

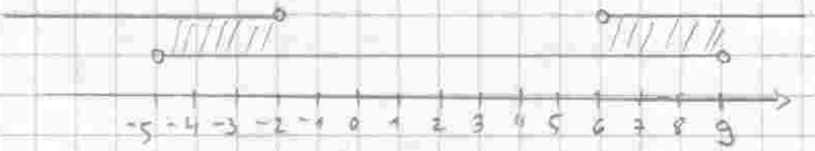
$|x-2|<7$ וגם $|x-2|>4$

$-7<x-2<7 \quad /+2$

$x-2>4$ או $x-2<-4$

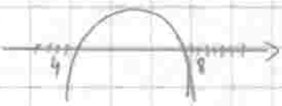
$\boxed{-5<x<9}$

$\boxed{x>6 \text{ או } x<-2}$



לכן: $B=\{x \mid -5<x<-2 \text{ או } 6<x<9\}$

הקבוצה C: $-x^2+12x-32<0$

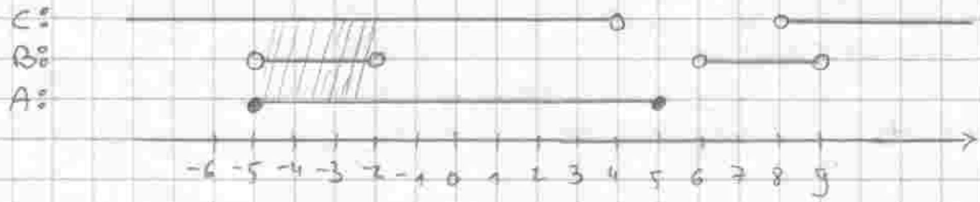


$$x_{1,2}=\frac{-12\pm\sqrt{144-128}}{-2}=\frac{-12\pm 4}{-2}\nearrow^{4}_{\searrow 8}$$

$\boxed{x<4 \text{ או } x>8}$

$C=\{x \mid x<4 \text{ או } x>8\}$

ולבסוף, נשרטט את הקב' על הציר הממשי:



$A\cup B\cup C=(-\infty,5]\cup(6,\infty)=\{x \mid x\le 5 \text{ או } x>6\}$

$A\cap B\cap C=(-5,-2)=\{x \mid -5<x<-2\}$

2. א. מצאו את המשלים ביחס ל-R בקבוצה $A=\{x \mid \sqrt{15-x}<x-3\}$

נמצא תחילה את הקב' A:

$\sqrt{15-x}<x-3$

דרוש תחילה ש: $15-x\ge 0$

לכן ת.ה: $\boxed{x\le 15}$

כעת לפתור למקרים:

1. כאשר $x-3 \geq 0$

צ"ל $\boxed{x \geq 3}$

שני האגפים של אי-השוויון אי-שליליים ולכן ניתן להעלות בריבוע:

$$15-x<(x-3)^2$$

$$15-x<x^2-6x+9 \quad /+x,-15$$

$$0<x^2-5x-6$$

$$x_{1,2}=\frac{5\pm\sqrt{25+24}}{2} \to 6,\ -1$$

$$\boxed{x<-1 \quad \text{או} \quad x>6}$$

נחתוך את התשובה עם דרישת המקרה: $x \geq 3$

ועם ת.ה.: $x \leq 15$

הפתרון עבור מקרה 1: $6<x\leq 15$.

2. המקרה השני הוא כאשר $x-3<0$, צ"ל $x<3$.

אולם, מקרה זה לא יתכן, כי שורש הוא אי-שלילי, ולא יתכן שמספר אי-שלילי יהיה קטן ממס' שלילי. לכן המקרה השני הוא φ.

לכן סה"כ: $A=\{x|6<x\leq 15\}$

נזכור שאנו מחפשים את $\bar{A}$, $\bar{A}=\{x \mid x\leq 6 \text{ או } x>15\}$

ב. מצאו את $\bar{A}$ ביחס ל-B כאשר: $A=\{\frac{1}{2n} \mid n\in N\}$

$B=\{\frac{1}{n} \mid n\in N\}$

$$\bar{A}=B/A=\{\frac{1}{2n-1} \mid n\in N\}$$

הסבר: A היא קב' השברים מהצורה $\frac{1}{k}$ כאשר k טבעי זוגי

B " " " " $\frac{1}{k}$ " k טבעי

לכן: B/A היא קב' השברים מהצורה $\frac{1}{k}$ כאשר k טבעי אי"ז.

עמ' 4
מחוק 11

3. הוכיחו את הטענות הבאות:

א. חוק הפילוג: $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$

הוכחה:

שוויון קבוצות, נוכיח ע"י הכלה כפולה.

כיוון I: צ"ל ש: $A\cup(B\cap C)\subseteq(A\cup B)\cap(A\cup C)$.

עפ"י הגדרת ההכלה יש להראות שאם $x\in A\cup(B\cap C)$ אזי $x\in(A\cup B)\cap(A\cup C)$.

אז, נניח כי $x\in A\cup(B\cap C)$ $\underset{\text{לפי הגדרת האיחוד}}{\Leftarrow}$ $x\in B\cap C$ ② או $x\in A$ ①,

נפצל לשני מקרים: 1. אם $x\in A$ אז $x\in A\cup B$ וגם $x\in A\cup C$.

2. אם $x\in B\cap C$ $\underset{\text{הגדרת החיתוך}}{\Leftarrow}$ $x\in B$ וגם $x\in C$

$\Leftarrow$ $x\in B$ ולכן $x\in A\cup B$ וגם $x\in C$ ולכן $x\in A\cup C$,

לכן סה"כ (ראינו שמתקיים בשני המקרים):

$x\in A\cup B$ וגם $x\in A\cup C$ $\underset{\text{הג' החיתוך}}{\Leftarrow}$ $x\in(A\cup B)\cap(A\cup C)$.

לכן הוכחנו כי $\underline{\underline{A\cup(B\cap C)\subseteq(A\cup B)\cap(A\cup C)}}$.

כיוון II: צ"ל ש: $(A\cup B)\cap(A\cup C)\subseteq A\cup(B\cap C)$

נניח כי $x\in(A\cup B)\cap(A\cup C)$ $\underset{\text{הג' החיתוך}}{\Leftarrow}$, $x\in A\cup B$ וגם $x\in A\cup C$,

I. אם $x\in A$: אז $x\in A\cup(B\cap C)$.

II. אם $x\in B$, אז חייב להתקיים ש: $x\in C$, לכן $x\in B\cap C$

$\Leftarrow$ $x\in A\cup(B\cap C)$.

לכן הוכחנו כי $(A\cup B)\cap(A\cup C)\subseteq A\cup(B\cap C)$.

ובסה"כ $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$. ▨

ב. כלל דה-מורגן: $\overline{A\cup B}=\bar{A}\cap\bar{B}$.

דרך א':

שוב, נוכיח ע"פ הכלה כפולה,

כיוון I: צ"ל: $\overline{A\cup B}\subseteq\bar{A}\cap\bar{B}$

נניח כי: $x\in\overline{A\cup B}$ $\underset{\text{הג' משלים}}{\Leftarrow}$ $x\notin A\cup B$ $\Leftarrow$

עמ' 5 מתוך 11

המשך סעיף ב', שאלה 3:

⇐ נניח בשלילה, כי $x\in A$, אזי $x\in A\cup B$, לכן $x\notin A$.

נניח בשלילה כי $x\in B$, אזי $x\in A\cup B$, לכן $x\notin B$.

סה"כ קיבלנו, ש- $x\notin A$ וגם $x\notin B$ $\underset{\text{הג' המשלים}}{\Rightarrow}$ $x\in\bar B$ וגם $x\in\bar A$

⇐ $x\in\bar A\cap\bar B$

הג' החיתוך

לכן, סה"כ הוכחנו כי $\overline{A\cup B}\subseteq\bar A\cap\bar B$.

כיוון II: צ"ל: $\bar A\cap\bar B\subseteq\overline{A\cup B}$.

נניח כי $x\in\bar A\cap\bar B$ $\underset{\text{הג' החיתוך}}{\Rightarrow}$ $x\in\bar B$ וגם $x\in\bar A$ $\underset{\text{הג' המשלים}}{\Rightarrow}$ $x\notin B$ וגם $x\notin A$

נניח בשלילה כי $x\in A\cup B$ אז יש שני מקרים:

1. $x\in A$, אפשרות זו נפסלה עפ"י מעבר קודם.
2. $x\in B$, גם אפשרות זו נפסלה מאותה סיבה.

לכן, $x\notin A\cup B$ $\underset{\text{הג' המשלים}}{\Rightarrow}$ $x\in\overline{A\cup B}$.

לכן, הוכחנו כי $\bar A\cap\bar B\subseteq\overline{A\cup B}$.

סה"כ, $\overline{A\cup B}=\bar A\cap\bar B$.

בדיקה:

$$\bar A\cap\bar B=\overline{\overline{\bar A\cap\bar B}}=\overline{(\overline{\bar A\cap\bar B})}=\overline{(\bar{\bar A}\cup\bar{\bar B})}=\overline{A\cup B}$$

$A=\bar{\bar A}$ (שלילה כפולה)

לפי דה-מורגן שהוכחנו בתרגול (לכן אפשר להשתמש...)

מ.ש.ל.

4. א. $x-1<\sqrt{x+5}$

ת.ה. $x+5\geq 0$

$\boxed{x\geq -5}$

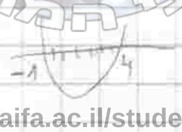
מקרה א': $x-1\geq 0 \Rightarrow \boxed{x\geq 1}$.

שני האגפים חיוביים, לכן ניתן להעלות בריבוע:

$$(x-1)^2<x+5$$

$$x^2-2x+1<x+5 \quad /-x,-5$$

$$x^2-3x-4<0$$

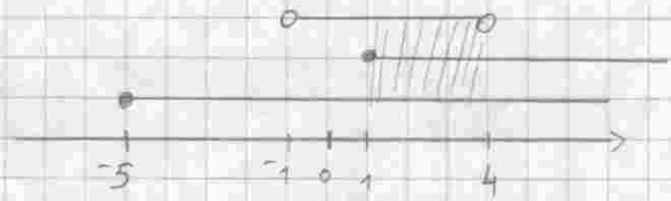


$$x_{1,2}=\frac{3\pm\sqrt{9+16}}{2} \to 4, \ -1 \Rightarrow \boxed{-1<x<4}$$

עמ' 6
מתוק 11

המשך סעיף 1, שאלה 4:

נחתוך עם הדרישה למקרה ועם ת.ה.



סה"כ עבור מקרה א': $\boxed{1 \le x < 4}$

מקרה ב': $x-1<0 \Leftarrow x<1$

כאן, אגף ימין אי-שלילי, ואגף שמאל תמיד שלילי, לכן מתקיים תמיד. נחתוך עם ת.ה.: $\boxed{-5 \le x < 1}$

תשובה סופית: $1 \le x < 4$ או $-5 \le x < 1$

ובסה"כ $-5 \le x < 4$

2. $-\sqrt{x^2-x-2} < x$

ת.ה. נדרוש:
$x^2-x-2 \ge 0$

$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2}$ → 2, -1

$\boxed{x \le -1 \text{ או } x \ge 2}$

שוב, נפצל למקרים:

א'. $x \ge 0$: אז אגף ימין אי-שלילי, ואגף שמאל שלילי.
לכן, לאחר חיתוך עם ת.ה.: $\boxed{x \ge 2}$

ב'. $x<0$: נעביר אגף: $-x < \sqrt{x^2-x-2}$

שני האגפים חיוביים, לכן ניתן להעלות בריבוע:

$x^2 < x^2-x-2$

$x<-2$

נחתוך עם הדרישה למקרה ועם ת.ה.: $\boxed{x<-2}$

תשובה סופית: $\boxed{x<-2 \text{ או } x \ge 2}$

עמ' 7
שורה 11

3. $\left|\frac{x-3}{x+4}-2\right| < \frac{1}{2}$

$$-\frac{1}{2} < \frac{x-3}{x+4}-2 < \frac{1}{2}$$

$-\frac{1}{2} < \frac{x-3}{x+4}-2$ וגם $\frac{x-3}{x+4}-2 < \frac{1}{2}$

$0 < \frac{x-3}{x+4}-1.5$ $\qquad$ $\frac{x-3}{x+4}-2.5 < 0$

$0 < \frac{x-3-1.5x-6}{x+4}$ $\qquad$ $\frac{x-3-2.5x-10}{x+4} < 0$

$\underbrace{0 < \frac{-0.5\cdot x-9}{x+4}}_{\text{II}}$ וגם $\underbrace{\frac{-1.5x-13}{x+4} < 0}_{\text{I}}$

I: $(-1.5x-13>0$ וגם $x+4<0)$ או $(-1.5x-13<0$ וגם $x+4>0)$

$-1.5x>13$ וגם $x<-4$ $\qquad$ $-1.5x<13$ $\qquad$ $x>-4$

$\underbrace{x<-\frac{26}{3} \text{ וגם } x<-4}$ $\qquad$ $\underbrace{x>-\frac{26}{3} \text{ וגם } x>-4}$

$\left(x<-\frac{26}{3}\right)$ או $(x>-4)$

* נשים לב שלא בדקנו מה קורה כאשר $x=4$, כיוון שאי-השוויון לא מוגדר ב- $x=4$!

II: $\left(-\frac{x}{2}-9>0\right.$ וגם $\left.x+4>0\right)$ או $\left(-\frac{x}{2}-9<0\right.$ וגם $\left.x+4<0\right)$

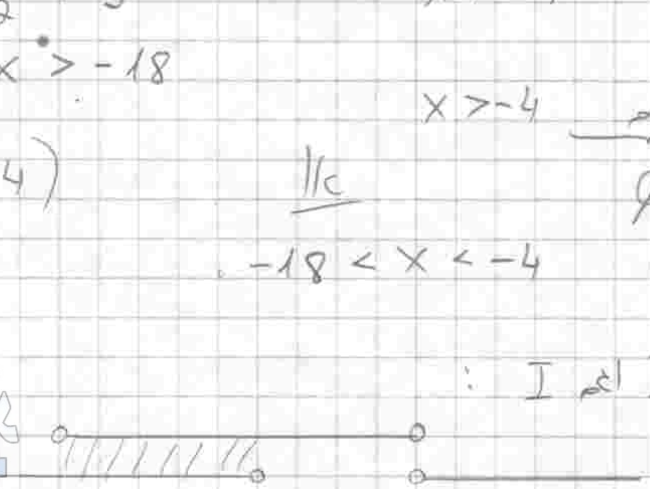
$-\frac{x}{2}>9$ $\qquad$ $x>-4$ $\qquad$ $-\frac{x}{2}<9$ וגם $x<-4$

$\underbrace{x<-18 \text{ וגם } x>-4}_{\emptyset}$ $\qquad$ $x>-18$

$\emptyset$ או $(-18<x<-4)$

לכן II: $-18<x<-4$.

ולבסוף, II וגם I:



תשובה סופית: $-18<x<-\frac{26}{3}$

עמ' 8
תרגיל 11

4. $|2x-4| + 3|x+1| < |3x+5| + 7$

נבדוק מתי כל ביטוי בתוך ערך מוחלט מתאפס:

$2x-4=0 \qquad x+1=0 \qquad 3x+5=0$

$x=2 \qquad x=-1 \qquad x=-\frac{5}{3}$

נחלק את הישר הממשי לארבעה תחומים בהתאם:

$x<-\frac{5}{3}$ (4); $-\frac{5}{3} \le x < -1$ (3); $-1 \le x < 2$ (2); $x \geq 2$ (1)

(1) $x \geq 2$, כל הביטויים בתוך הערכים המוחלטים חיוביים, לכן:

$2x-4+3(x+1) < 3x+5+7$

$2x < 13$

$\underbrace{\boxed{x < 6.5} \text{ וגם } x \geq 2}$

$\boxed{2 \le x < 6.5}$

(2) $-1 \le x < 2$:

$-(2x-4)+3x+3 < (3x+5)+7$

$-2x+\cancel{7} < 5+\cancel{7} \quad /:(-2)$

$\underbrace{x > -2.5 \text{ וגם } -1 \le x < 2}$

$\boxed{-1 \le x < 2}$

(3) $-\frac{5}{3} \le x < -1$:

$-(2x-4)-3(x+1) < (3x+5)+7$

$-5x+1 < 3x+12$

$-8x < 11$

$\underbrace{x > -\frac{11}{8} \text{ וגם } -\frac{5}{3} \le x < -1}$

$\boxed{-\frac{11}{8} < x < -1}$

(4) $x < -\frac{5}{3}$:

$-(2x-4)-3(x+1) < -(3x+5)+7$

$-5x+1 < -3x+2$

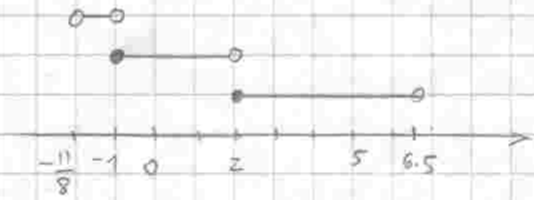
$-2x < 1$

$\underbrace{x > -\frac{1}{2} \text{ וגם } x < -\frac{5}{3}}$

$\emptyset$

המשך סעיף 4, שאלה 4:

תשובה סופית: איחוד בין המקרים:



ובסה"כ: $-\frac{11}{8} < x < 6.5$

5. א. צ"ל: לכל $\alpha > -1$ ולכל $n \geq 1$ מתקיים $(1+\alpha)^n \geq 1+n\cdot\alpha$.

הוכחה באינדוקציה על n:

i. בסיס האינדוקציה: עבור $n=1$:
$$(1+\alpha)^1 \overset{?}{\geq} 1+1\cdot\alpha$$
$$1+\alpha \geq 1+\alpha \quad \boxed{\checkmark}$$

ii. הנחת האינדוקציה: עבור $n=k$ נניח כי:
$$(1+\alpha)^k \geq 1+k\cdot\alpha$$

iii. הוכחה: צ"ל כי עבור $n=k+1$ מתקיים:
$$(1+\alpha)^{k+1} \geq 1+(k+1)\alpha$$

נוכיח:
$$(1+\alpha)^{k+1} = (1+\alpha)^k(1+\alpha) \underset{\text{לפי הנחת האינד'}}{\geq} (1+k\alpha)(1+\alpha) =$$
$$= 1+\alpha+k\alpha+k\alpha^2 = 1+(k+1)\alpha+\underbrace{k\alpha^2}_{\geq 0} \geq 1+(k+1)\alpha$$

לכן, סה"כ $(1+\alpha)^{k+1} \geq 1+(k+1)\alpha$

מ.ש.ל

ב. צ"ל: לכל n מספרים ממשיים $a_1, a_2, \dots, a_n$, $n \in \mathbb{N}$,
מתקיים: $|a_1+a_2+\dots+a_n| \leq |a_1|+|a_2|+\dots+|a_n|$

טענה זו היא הכללה של אי-שוויון המשולש. נוכיח
באינדוקציה על n:

בסיס: עבור $n=1$: $\boxed{\checkmark}$ $|a_1| \leq |a_1|$

נבדוק גם עבור $n=2$: $|a_1+a_2| \overset{?}{\leq} |a_1|+|a_2|$

וזה נכון עפ"י א"ש המשולש $\boxed{\checkmark}$

עמ' 10 המשך סעיף ב', שאלה 5:
גיליון 11

הנחת האינדוקציה: נניח כי עבור $n=k$

מתקיים: $|a_1+a_2+\dots+a_k| \le |a_1|+|a_2|+\dots+|a_k|$

הוכחת האינדוקציה: צ"ל כי עבור $n=k+1$ מתקיים:

$$|a_1+a_2+\dots+a_{k+1}| \le |a_1|+|a_2|+\dots+|a_{k+1}|$$

הוכחה:

$$|a_1+a_2+\dots+a_k+a_{k+1}| = |(a_1+a_2+\dots+a_k)+a_{k+1}| \underset{\text{לפי אי-שוויון המשולש}}{\le}$$

$$\le |a_1+a_2+\dots+a_k|+|a_{k+1}| \underset{\text{לפי הנחת האינדוקציה}}{\le} (|a_1|+|a_2|+\dots+|a_k|)+|a_{k+1}|$$

ובסה"כ הראינו:

$$|a_1+a_2+\dots+a_{k+1}| \le |a_1|+|a_2|+\dots+|a_{k+1}|$$

מש"ל.

6. יהי $a>1$ לכן $\sqrt[n]{a}>1$, כש- $n\in\mathbb{N}$.

נסמן: $\sqrt[n]{a}=1+x_n$, כאשר $x_n>0$.

א. צ"ל: $x_n \le \frac{a-1}{n}$

הוכחה:

מכיוון כי $\sqrt[n]{a}=1+x_n$,

נעלה בחזקת n: $a=(1+x_n)^n$

$$a=(1+x_n)^n \underset{\text{אי-שוויון ברנולי}}{\ge} 1+n\cdot x_n$$

לכן: $a \ge 1+n\cdot x_n$

$a-1 \ge n\cdot x_n \quad /:n \quad ,(n>0)$

$$\underline{\underline{x_n \le \frac{a-1}{n}}}$$

ב. צ"ל: $\sqrt[n]{a} \le \frac{a+n-1}{n}$

הוכחה:

$$\sqrt[n]{a} = 1+x_n \underset{\text{לפי סעיף קודם}}{\le} 1+\frac{a-1}{n} = \frac{a+n-1}{n}$$

בסה"כ קיבלנו: $\sqrt[n]{a} \le \frac{a+n-1}{n}$

מש"ל

עמ' 11
מתוך 11

7. הוכח לפי פיתוח הבינום של ניוטון כי:

$$2^n > n$$

<u>הוכחה:</u>

$$2^n = (1+1)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}1^{n-k}\cdot 1^k = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} =$$

$$= \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \dots + \binom{n}{n} = \frac{n!}{0!\,n!} + \frac{n!}{1!(n-1)!} + \frac{n!}{2!(n-2)!} + \dots + \frac{n!}{n!\,0!} =$$

$$= 1 + n + \underset{>0}{\binom{n}{2}} + \underset{>0}{\binom{n}{3}} + \dots + \underset{>0}{\binom{n}{n-1}} + \underset{>0}{\binom{n}{n-2}} > n+1 > n$$

נתבונן במקדם הבינומי $\binom{n}{k}$:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} > 0$$

תמיד גדול מ-0 כמנת מס' חיוביים.

לכן סה"כ: $2^n > n$.

מש"ל.

דרך נוספת לפתרון (לאו לפי פיתוח הבינום):

$$2^n = (1+1)^n \underset{\downarrow}{\geq} 1 + n\cdot 1 > n$$

אי-שוויון ברנולי

מש"ל

תרגיל מס' 3

ההגשה בזוגות עד : 15/11/04 18:00

קבוצות חסומות ולא חסומות

1. מצאו האם הקבוצות הבאות חסומות – אם הקבוצה חסומה יש להראות חסמים. אם הקבוצה אינה חסומה יש להוכיח זאת.
הסבירו היטב כל שלב.

$$1.\quad A=\left\{ x\in\Re \mid x=2+(-1)^n\frac{n+1}{n}\,,\, n\in \mathrm{N}\right\}$$

$$2.\quad A=\left\{ x\in\Re \mid x=\frac{3n^3-n}{2n^2}\,,\, n\in \mathrm{N}\right\}$$

2. מצאו עבור הקבוצות הבאות סופרימום, אינפימום (אם קיימים) .
ציינו האם יש מינ' או מקס'.
עבור סעיף א' בלבד הוכיחו את קיומם לפי הגדרה.

א. $$A=\left\{(-1)^{n^2}+\frac{1}{n}\ \middle|\ n\in \mathrm{N}\right\}$$

ב. $$B=\left\{ x\in\Re \mid x=\frac{(-1)^n}{n}\,,\, n\in \mathrm{N}\right\}$$

ג. $$C=\left\{ x\in\Re \mid x=1+\frac{2n+3}{2n+5}Sin(\frac{n\pi}{2})\,,\, n\in \mathrm{N}\right\}$$

ד. $$D=\left\{ x\in\Re \mid 0<x^2<3\right\}$$

3. הוכיחו את הטענה הבאה :
אם I אינפימום של הקבוצה K , אז :

$$\forall\varepsilon>0,\exists\, x\in K: I\le x<I+\varepsilon$$

4. יהיו A ו- B שתי קבוצות חסומות מלעיל של מספרים ממשיים.
נניח כי לכל $x\in A$ קיים $y\in B$ כך ש- $x<y$. הוכיחו כי
$Sup(A)\le Sup(B)$. האם $Sup(A)<Sup(B)$?

5. מצאו תחום הגדרה לפונקציות הבאות:

1. $y=\sqrt{Ln\frac{5x-x^2}{4}}$
2. $f(x)=\sqrt{x^2-x-2}+\frac{1}{\sqrt{3+2x-x^2}}$
3. $f(x)=\sqrt{Log_x 2\cdot Log_2(4-x)}$

6. האם $f(x)$ זוגית, אי-זוגית או שום דבר (לא זוגית ולא אי-זוגית) ?

1. $f(x)=\frac{Tan(x)}{x^2+1}$
2. $f(x)=\frac{Sin^3x}{x}-2$
3. $f(x)=\sqrt{1+x+x^2}-\sqrt{1-x+x^2}$
4. $f(x)=\frac{2x+17}{x^2}$
5. $f(x)=Log\frac{1-x}{1+x}$

7. הוכיחו את הטענות הבאות:

1. סכום של פונקציות זוגיות נותן פונקציה זוגית.
2. מכפלה או מנה של שתי פונקציות זוגיות היא פונקציה זוגית.
3. מכפלה או מנה של שתי פונקציות אי-זוגיות היא פונקציה זוגית.

8. נתונה הפונקציה הבאה, המוגדרת בחלקים:

$$f(x)=\begin{cases} Sinx & -\pi\le x\le 0 \\ 2 & 0<x\le 1 \\ x^2+1 & 1<x\le 4 \end{cases}$$

מצאו את : $f\left(\frac{-\pi}{2}\right),\ f\left(\frac{1}{2}\right),\ f(0),\ f(3)$.

ציירו את גרף הפונקציה.

עמ' 1
מתוך 9

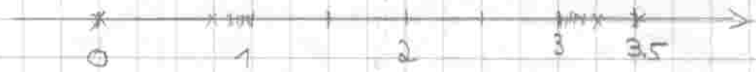
פתרון תרגיל מס' 3

1. האם הקב' הבאות חסומות:

א. $A=\{x\in\mathbb{R} \mid x = 2+(-1)^n\cdot\frac{n+1}{n}, n\in\mathbb{N}\}$

נפרט באיברי A: $\underbrace{2+(-1)^1\frac{2}{1}}_{0}, \underbrace{2+(-1)^2\frac{3}{2}}_{3.5}, \underbrace{2+(-1)^3\frac{4}{3}}_{\frac{2}{3}}, \underbrace{2+(-1)^4\frac{5}{4}}_{3.25}, \underbrace{2+(-1)^5\frac{6}{5}}_{\frac{4}{5}}, \ldots$

נציג את איברי A על הישר הממשי:



ניתן לבדוק כי לא קיים $x\in A$ כך ש- $x>3.5$, וכן לא קיים $x\in A$ כך ש: $x<0$, לכן A חסומה מלעיל ע"י 3.5, ומלרע ע"י 0, לכן A חסומה.

ב. $A=\{x\in\mathbb{R} \mid x=\frac{3n^3-n}{2n^2}, n\in\mathbb{N}\}$

נפרט באיברי A: $\underbrace{\frac{3-1}{2}}_{1}, \underbrace{\frac{3\cdot8-2}{2\cdot4}}_{\frac{11}{4}}, \underbrace{\frac{3\cdot27-3}{2\cdot3^2}}_{\frac{13}{3}}, \underbrace{\frac{3\cdot64-4}{2\cdot16}}_{\frac{47}{8}}, \ldots$

נראה כי האיברים גדלים, ככל ש-n גדל.

חסם מלרע ל-A הוא 1, נוכיח שאין ל-A חסם מלעיל:

נוכיח כי $\forall M, \exists x\in A: x>M$

נקח M- $x>M$ ונגיע ל- x הספציפי המקיים זאת

$$x=\frac{3n^3-n}{2n^2}=\frac{3n^3}{2n^2}-\frac{n}{2n^2}=\frac{3}{2}n-\frac{1}{2n}\geq\frac{3}{2}n-\frac{1}{2}>M$$

הדרישה

הקטנו את הביטוי ע"י החלפת $\frac{1}{2n}$ ב- $\frac{1}{2}$.

זה מתקיים כאשר: $3n-1>2M$

$3n>2M+1$

$n>\frac{2M+1}{3}$

לכן, אם ניקח את $n_0=\left[\frac{2M+1}{3}\right]+1$, נקבל ש: $x_{n_0}>M$,

לכן הראינו שאין ל-A חסם מלעיל, לכן A אינה חסומה.

עמ' 2
מתוך 9

2. מצאו Inf, Sup, Min, Max לקבוצות הבאות:

1) $A = \{(-1)^{n^2} + \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$

נתבונן באיברי A: $\underbrace{-1+1}, \underbrace{1+\frac{1}{2}}, \underbrace{-1+\frac{1}{3}}, \underbrace{1+\frac{1}{4}}, \underbrace{-1+\frac{1}{5}}, \dots$

$0, \frac{3}{2}, -\frac{2}{3}, 1.25, -\frac{4}{5}, \dots$

האיבר הגדול ביותר ב-A הוא 1.5, הוא מתקבל

עבור n זוגי ו- $\frac{1}{n}$ הגדול ביותר עבור $n \in \mathbb{N}$ $\Leftarrow$

$n=2$ $\Leftarrow$ $\underline{\underline{Sup A = Max A = 1.5}}$ $(1.5 \in A)$

ניתן לראות כי עבור n אי-זוגי האיברים 'מתקרבים' ל-(-1),

ורצה להוכיח כי $Inf A = -1$.

לפי הגדרה יש להראות:

א. $\underline{\forall x \in A,\ x \geq -1}$: עבור n זוגי: $x = 1 + \underset{>0}{\frac{1}{n}} > 1+0 > -1$

עבור n אי-זוגי: $x = -1 + \underset{>0}{\frac{1}{n}} > -1+0 > -1$

ב. $\underline{\forall \varepsilon > 0,\ \exists x \in A : x < -1+\varepsilon}$:

נתבונן רק ב-x-ים המתקרבים ל- 1-, כלומר עם n אי-זוגי:

$x = -1 + \frac{1}{n} < -1 + \varepsilon \quad / +1$

$\frac{1}{n} < \varepsilon$

$1 < \varepsilon n \quad / : \varepsilon \ (\varepsilon > 0)$

$\frac{1}{\varepsilon} < n$

n כפי גדול מ- $\frac{1}{\varepsilon}$ יהיה $n = [\frac{1}{\varepsilon}] + 1$

אולם אנו צריכים שבנוסף ש-n יהיה אי-זוגי לכן

ניקח את $n_0 = 2[\frac{1}{\varepsilon}] + 1$ (גם אי-זוגי גם גדול מ- $\frac{1}{\varepsilon}$)

אם כן, x_0 מקיים את הדרישה:

$$x_0 = (-1)^{n_0^2} + \frac{1}{n_0} < -1 + \varepsilon$$

לכן הוכחנו כי $\underline{\underline{Inf A = -1}}$. $-1 \notin A$

ל- A אין מינימום.

אמ' 3
מרתון 9

המשך שאלה 2, סעיף 2:

2) $B = \{ x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{(-1)^n}{n},\ n \in \mathbb{N} \}$

איברי B המתאימים ל- $n = 1,2,3,4,5,6$ הם:

$-1,\ \frac{1}{2},\ -\frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ -\frac{1}{5},\ \frac{1}{6}$

$\operatorname{Inf} B = \operatorname{Min} B = -1$

$\operatorname{Sup} B = \operatorname{Max} B = \frac{1}{2}$

3) $C = \{ x \in \mathbb{R} \mid x = 1 + \frac{2n+3}{2n+5} \cdot \sin\frac{n\pi}{2},\ n \in \mathbb{N} \}$

איברי C המתאימים ל- $n = 1:8$:

$1+\frac{5}{7},\ 1,\ 1-\frac{9}{11},\ 1,\ 1+\frac{13}{15},\ 1,\ 1-\frac{17}{19},\ 1$

לכן, $\operatorname{Inf} C = 0\ ,\ \operatorname{Sup} C = 2$

וגם, $2, 0 \notin C$ לכן ל- C אין מינימום ואין מקסימום.

4) $D = \{ x \in \mathbb{R} \mid 0 < x^2 < 3 \}$

$D = \{ x \in \mathbb{R} \mid -\sqrt{3} < x < 0 \ \text{או}\ 0 < x < \sqrt{3} \}$

$\operatorname{Inf} D = -\sqrt{3}\ ;\ \operatorname{Sup} D = \sqrt{3}$

$\pm\sqrt{3} \notin D$, לכן ל- D אין מינימום ואין מקסימום.

3. צ"ל כי: אם I אינפימום של הקב' K אז לכל $\varepsilon > 0$, קיים $x \in K$ כך ש: $I \le x < I + \varepsilon$

הוכחה:

דרך ההוכחה: נניח על דרך השלילה כי I אינפימום ונניח שלא מתקיים ש: "$\forall \varepsilon > 0\ \exists x \in K:\ I \le x < I + \varepsilon$"

עמ' 4
מתוך 9

המשך שאלה 3:

הוכחה:

יהי I אינפימום של הקב' K, נניח בשלילה כי

לא ש- קיים: $\forall \varepsilon>0 \ \exists x\in K: I\le x$ וגם $x<I+\varepsilon$

$\Downarrow$

כלומר: $\exists \varepsilon>0: \forall x\in K: not(I\le x$ וגם $x<I+\varepsilon)$

עפ"י כלל דה-מורגן: $\exists \varepsilon>0: \forall x\in K: x<I$ או $x\ge I+\varepsilon$

אם $\forall x\in K$ $x<I$, I אינו אינפימום של K, סתירה.

אם $\forall x\in K$ $x\ge I+\varepsilon$, $I+\varepsilon$ חסם מלרע יותר גדול מ-I $\Leftarrow$

I אינו אינפימום של K, סתירה להנחה.

ראינו שבכל מקרה, הגענו לסתירה להנחה, לכן סיימנו. ∎

4. תהיינה A ו-B שתי קבוצות חסומות מלעיל של מספרים ממשיים. נניח כי לכל $x\in A$ קיים $y\in B$ כך ש: $x<y$.

צ"ל כי $\sup A\le \sup B$.

הוכחה:

לכל $x\in A$, קיים $y\in B$ כך ש: $x<y$.

לכל $y\in B$ מ-קיים $y\le \sup B$, לכן סה"כ:

$\forall x\in A: x\le \sup B \Leftarrow x<y\le \sup B$

קיבלנו ש: $\sup B$ הוא חסם מלעיל של A. אז

$\sup A\le \sup B$ כי $\sup A$ הוא החסם מלעיל הקטן ביותר.

∎

האם $\sup A<\sup B$?

נניח כי: $A=B=\{x \mid x<1\}$ שתי קב' חסומות מלעיל של מספרים ממשיים, ברור כי לכל $x\in A$ קיים $y\in B$ כך ש: $x<y$. אולם $\sup A=\sup B=1$

ולא מ-קיים ש: $1<1$!

תמ' 5
מתוך 9

5. מצאו תחום הגדרה לפונקציות הבאות:

1. $y=\sqrt{\ln\frac{5x-x^2}{4}}$

I. נדרוש שהביטוי בתוך ה-ln יהיה חיובי:

$$\frac{5x-x^2}{4}>0$$

II. נדרוש שהביטוי מתחת לשורש יהיה אי-שלילי:

$$\ln\frac{5x-x^2}{4}\geq 0=\ln 1$$

$$\ln\frac{5x-x^2}{4}\geq \ln 1$$

$$\Downarrow$$

$(e>1)$

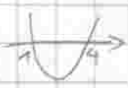
$$\frac{5x-x^2}{4}\geq 1$$

נשים לב שתנאי II כולל את תנאי I, לכן נמשיך עם תנאי II בלבד:

$$5x-x^2\geq 4$$

$$x^2-5x+4\leq 0$$

$$x_{1,2}=\frac{5\pm\sqrt{25-16}}{2} \begin{matrix} \nearrow 4 \\ \searrow 1 \end{matrix}$$



לכן, ת.ה. הוא:

$$\boxed{1\leq x\leq 4}$$

2. $f(x)=\sqrt{x^2-x-2}+\frac{1}{\sqrt{3+2x-x^2}}$

I. נדרוש כי הביטוי מתחת לשורש הראשון יהיה אי-שלילי:

$$x^2-x-2\geq 0$$

$$x_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{1+8}}{2} \begin{matrix} \nearrow 2 \\ \searrow -1 \end{matrix}$$

$$\boxed{x\leq -1 \text{ או } x\geq 2}$$

II. נדרוש גם שהביטוי מתחת לשורש השני יהיה חיובי (שונה מ-0):

$$3+2x-x^2>0$$

$$x^2-2x-3<0$$

$$x_{1,2}=\frac{2\pm\sqrt{4+12}}{2} \begin{matrix} \nearrow 3 \\ \searrow -1 \end{matrix}$$

$$\boxed{-1<x<3}$$

לאחר חיתוך בין I ל-II נקבל כי ת.ה. של f(x):

$$\boxed{2\leq x<3}$$

עמ' 6
מתוק 9

שאלה 5, סעיף 3:

$$f(x)=\sqrt{\log_x 2\cdot\log_2(4-x)}$$

I. $4-x>0$

$\underline{x<4}$

II. $\underline{x\neq 1\ ,\ x>0}$

III. $\log_x 2\cdot\log_2(4-x)\geq 0$

$$\frac{\log_2 2}{\log_2 x}\cdot\log_2(4-x)\geq 0$$

$$\frac{\log_2(4-x)}{\log_2 x}\geq 0$$

זה שקול לפתרון של: $\log_2(4-x)\cdot\log_2 x\geq 0$

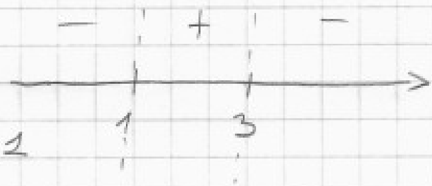
כאשר נזהר כי $\log_2 x\neq 0$

$\Downarrow$

$x\neq 1$.

$\log_2(4-x)\cdot\log_2 x\geq 0$

מתאפסים: $x=3\ ,\ x=1$



מס' אי-זוגי של פעמים לכן נקי חיתוך.

$1\leq x\leq 3$ וגם $x\neq 1$

$$\boxed{1<x\leq 3}$$

לאחר חיתוך $I\cap II\cap III$: $\boxed{1<x\leq 3}$

6. האם $f(x)$ זוגית, אי-זוגית או שום דבר?

א. $f(x)=\dfrac{tg\,x}{x^2+1}$

ת.ה. של $f(x)$ סימטרי ביחס לראשית הצירים לכן אפשר להמשיך:

$$f(-x)=\frac{\tan(-x)}{(-x)^2+1}=\frac{\frac{\sin(-x)}{\cos(-x)}}{x^2+1}=\frac{\frac{-\sin x}{\cos x}}{x^2+1}=\frac{-tg\,x}{x^2+1}=-f(x)$$

$\Leftarrow$ $f(x)$ אי-זוגית

שאלה 6, סעיף ב':

ב. $f(x)=\frac{\sin^3 x}{x}-2$ ת.ה. של $f(x)$: $x\neq 0$ לכן סימטרי;

$$f(-x)=\frac{\sin^3(-x)}{-x}-2=\frac{(-\sin x)^3}{-x}-2=\frac{-\sin^3 x}{-x}-2$$

$$f(-x)=\frac{\sin^3 x}{x}-2=f(x) \Rightarrow$$ $f(x)$ זוגית

ג. $f(x)=\sqrt{1+x+x^2}-\sqrt{1-x+x^2}$ ת.ה. כל $\mathbb{R}$, אפשר להמשיך:

$$f(-x)=\sqrt{1-x+(-x)^2}-\sqrt{1+x+(-x)^2}=\sqrt{1-x+x^2}-\sqrt{1+x+x^2}$$
$$=-\left(\sqrt{1+x+x^2}-\sqrt{1-x+x^2}\right)=-f(x)$$

$f(x)$ אי-זוגית.

ד. $f(x)=\frac{2x+17}{x^2}$ ת.ה. $x\neq 0$, אפשר להמשיך:

$$f(-x)=\frac{-2x+17}{(-x)^2}=\frac{-2x+17}{x^2}$$

קיבלנו כי $f(-x)\neq -f(x)$ וגם $f(-x)\neq f(x)$,

לכן $f(x)$ "שום-דבר".

ה. $f(x)=\log\frac{1-x}{1+x}$ ת.ה. $D=\{x \mid -1<x<1\}$ סימטרי, לכן:

$$f(-x)=\log\frac{1-(-x)}{1-x}=\log\frac{1+x}{1-x}=\log\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{-1}=-\log\frac{1-x}{1+x}$$

$$f(-x)=-f(x) \Rightarrow$$ $f(x)$ אי-זוגית

7. א. צ"ל: סכום של פונקציות זוגיות נותן פונקציה זוגית.

הוכחה:

תהיינה $f(x)$, $g(x)$ פונקציות זוגיות, צ"ל $\forall x\in D$

$f(-x)=f(x)$ וגם $g(-x)=g(x)$

אזי $h(x)=(f+g)(x)$:

$$h(-x)=(f+g)(-x)=f(-x)+g(-x)\underset{\text{לפי נתון}}{=}f(x)+g(x)=(f+g)(x)=$$
$$=h(x)$$

סה"כ $\forall x\in D$: $h(-x)=h(x)$, קיבלנו ש-$h(x)$ זוגית.

עמ' 8
פרק 9

שאלה 7, סעיף ב':

ב. צ"ל: מכפלה או מנה של שתי פונקציות זוגיות היא פונקציה זוגית.

<u>הוכחה</u>: תהיינה $f(x), g(x)$ פונקציות זוגיות מעל תחום סימטרי ביחס לראשית D. $\forall x\in D,\ f(-x)=f(x),\ g(-x)=g(x)$

תהי $h(x)=(f\cdot g)(x)$ אז:

כפל, לפי הגדרה

$\forall x\in D$ $$h(-x)=(fg)(-x)=f(-x)\,g(-x)=f(x)\cdot g(x)=(f\cdot g)(x)=h(x)$$

קיבלנו ש $h(-x)=h(x)$, $h(x)$ זוגית.

<u>הערה</u>: הוכחה זו תקפה גם עבור מנת פונקציות, אם נגדיר את $g(x)$ כך: $g(x)=\frac{1}{p(x)}$

כאשר $\forall x\in D,\ p(x)\neq 0$.

ה. צ"ל: מכפלה או מנה של פונקציות אי-זוגיות היא פונקציה זוגית.

<u>הוכחה</u>:

תהיינה $f(x), g(x)$ פונקציות אי-זוגיות מעל תחום סימטרי ביחס לראשית, D. $\forall x\in D,\ f(-x)=-f(x),\ g(-x)=-g(x)$

נגדיר את $h(x)$ להיות $h(x)=(f\cdot g)(x)$

$$\forall x\in D;\ h(-x)=(f\cdot g)(-x)=f(-x)\cdot g(-x)=-f(x)\cdot(-g(x))$$
$$=f(x)\cdot g(x)=(fg)(x)=h(x)$$

קיבלנו כי $h(-x)=h(x)$ לכל $x\in D \Rightarrow h(x)$ זוגית.

כנ"ל לגבי מנת פונקציות אי-זוגיות.

טמ' 9
מתוק 9

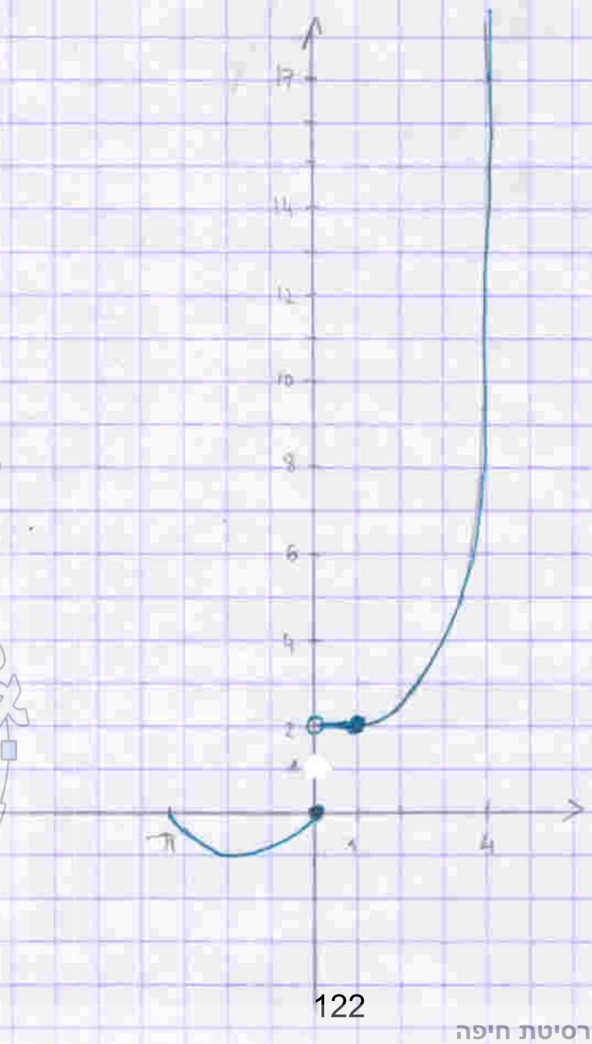
8. נתונה הפונקציה:

$$f(x)=\begin{cases}\sin x & -\pi\le x\le 0\\ 2 & 0<x\le 1\\ x^2+1 & 1<x\le 4\end{cases}$$

מצאו את: $f(-\frac{\pi}{2}), f(\frac{1}{2}), f(0), f(3)$

1. $-\pi\le -\frac{\pi}{2}\le 0$, $f(-\frac{\pi}{2})=\sin(-\frac{\pi}{2})=-\sin(\frac{\pi}{2})=-1$
2. $0<\frac{1}{2}\le 1$, $f(\frac{1}{2})=2$
3. $-\pi\le 0\le 0$ $f(0)=\sin(0)=0$
4. $1<3\le 4$ $f(3)=3^2+1=10$

שרטטו את גרף הפונקציה:



תרגיל מס' 4

ההגשה **בזוגות** עד : 22/11/04 17:00

פונקציות

1. הוכיחו: אם $f(x)$ פונקציה מונוטונית עולה, אזי הפונקציה $-f(x)$ מונוטונית יורדת.

2. בדקו האם הפונקצות הבאות חד-חד-ערכיות בתחום הגדרתן:

$$y=2^x \quad , \quad y=\left|2x-17\right| \quad , \quad y=3^{\frac{x+1}{x-1}}$$

3. נתונה $f(x+1)=x^2-3x+2$ מצאו את $f(x)$.

4. הרכיבו את זוגות הפונקציות הבאים $(g\circ f, f\circ g)$. ציינו את תחום ההגדרה והטווח של $f, g, f\circ g, g\circ f$. אם יש צורך, עדכנו את תחום ההגדרה :

א. $(-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}) \quad g(x)=\tan(x) \quad , \quad f(x)=3^{2x}$

ב. $g(x)=\dfrac{1}{x} \quad , \quad f(x)=\dfrac{x+1}{x-5}$

5. תהי $f(t)$ פונקציה המוגדרת בתחום $0<t<1$. מצאו את תחום ההגדרה של $f\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$.

6. עבור הפונקציות הבאות, קבעו האם יש להן פונקציות הפוכות. אם כן, מצאו אותן:

$$f(x)=\begin{cases} x^2+5 & , x\ge 0 \\ -x^2+5 & , x<0 \end{cases} \quad , \quad f(x)=[x]$$

7. האם הפונקציה $f(x)=5^{\sin(3x^2)}+x\log_2 x$ אלמנטרית ?
אם כן, פרטו את סדרת הפעולות האלמנטריות ממנה היא מתקבלת.

סדרות

8. רשמו את חמשת האיברים הראשונים של כל אחת מהסדרות הבאות :

א. $a_1 = 1$, $a_{n+1} = 2a_n + 3(-1)^n$

ב. $a_n = 2^{n-1} - n^2 + 3$

ג. $a_1 = a_2 = 3$, $a_{n+2} = 2\sqrt{a_{n+1}a_n}$

9. בדקו את המונוטוניות של הסדרות הבאות:

א. $a_n = \frac{2^n}{n}$

ב. $a_n = \frac{n}{2n^2 + 1}$

ג. $a_n = \sqrt{n} + \frac{1}{n}$

10. בדקו האם הסדרות הבאות חסומות, והוכיחו את טענתכם.

א. $a_n = \frac{n^2 + 1}{n + 2}$

ב. $a_n = \sqrt{n^2 + 1} - \sqrt{n}$

ג. $a_n = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n\cdot(n+1)}$

בהצלחה!

עמ' 1
מתוך 9

פתרון תרגיל מס' 4

1. צ"ל: אם $f(x)$ פונקציה מונוטונית עולה, אזי $-f(x)$ מונוטונית יורדת.

הוכחה:

תהי $f(x)$ פונקציה מונוטונית עולה בתחום D, כך ש:

$$\forall x_1,x_2\in D:\ x_1\le x_2 \Rightarrow f(x_1)\le f(x_2) \iff 0\le f(x_2)-f(x_1).$$

אזי לכל $x_1,x_2\in D$ כך ש: $x_1\le x_2$:

$$g(x_1)-g(x_2)\underset{\text{הגדרת } g(x)}{=}-f(x_1)-(-f(x_2))=f(x_2)-f(x_1)\underset{\text{לפי נתון}}{\ge} 0$$

לכן, סה"כ $g(x_1)\ge g(x_2)$ והוכחנו ש- $g(x)$ מונוטונית יורדת. ∎

2. בדקו האם הפונקציות הבאות חד-חד-ערכיות בתחום הגדרתן:

א. $y=2^x$ (ת.ה. הוא $\mathbb{R}$)

נבדוק לפי הגדרה אם לכל $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ מתקיים $f(x_1)=f(x_2) \Leftarrow x_1=x_2$. נניח $2^{x_1}=2^{x_2}$.

אז כיוון שיש שוויון, והבסיסים שווים ושונים מ-'1' מתקיים ש- $x_1=x_2$. לכן $f(x)$ חח"ע ב-$\mathbb{R}$.

ב. $y=|2x-17|$

כדי להראות ש- y אינה חח"ע, מספיק להביא דוגמה נגדית: עבור

$x=8 \Rightarrow |2x-17|=|16-17|=|-1|=1$

$x=9 \Rightarrow |2x-17|=|18-17|=|1|=1$

אם כן קיבלנו ש: $f(8)=f(9)$ אבל $8\ne 9$ $\Leftarrow$ y אינה חח"ע

עמ' 2
מתוך 9

ה. $y = 3^{\frac{x+1}{x-1}}$ $\quad D = \{x \mid x \neq 1\}$ ת.ה.

נניח כי $x_1, x_2 \in D$ ו- $f(x_1) = f(x_2)$ צ"ל:

$$3^{\frac{x_1+1}{x_1-1}} = 3^{\frac{x_2+1}{x_2-1}}$$

הבסיסים שווים ושונים מ-'1' לכן:
$$\frac{x_1+1}{x_1-1} = \frac{x_2+1}{x_2-1}$$

נכפיל בהצלבה:
$$(x_1+1)(x_2-1) = (x_2+1)(x_1-1)$$

$$\cancel{x_1x_2} - x_1 + x_2 \cancel{-1} = \cancel{x_2x_1} - x_2 + x_1 \cancel{-1} \quad / -x_1x_2,\ +1,\ +x_1,\ +x_2$$

$$2x_2 = 2x_1 \quad /:2$$

$$x_2 = x_1$$

$\Leftarrow$ y חח"ע ב- D.

3. נתונה $f(x+1) = x^2 - 3x + 2$. צריך למצוא את $f(x)$.

נסמן $t = x+1 \Leftarrow x = t-1$. $f(t)$ היא הרכבת פונקציות.

$$f(x+1) = f(t) = (t-1)^2 - 3(t-1) + 2 = t^2 - 2t + 1 - 3t + 3 + 2$$

$$f(t) = t^2 - 5t + 6$$

$$\Leftarrow \quad f(x) = x^2 - 5x + 6$$

4. א. $f(x) = 3^{2x}$, $\quad g(x) = tg\,x \quad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

$g: D \to \mathbb{R}$, נתון: $D = \{x \mid -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\}$

נחשב את $(f \circ g)(x)$: $f \circ g$ מוגדרת כי הטווח של g, $\mathbb{R}$, מוכל בתחום של f $(\mathbb{R})$ $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{R}$. לכן ניתן לחשב:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(tg x) = 3^{2tg\,x}$$

ו- $f \circ g: D \to \mathbb{R}$.

נחשב את $(g \circ f)(x)$: יש לצמצם את תחום ההגדרה של f כך שהטווח של f יהיה מוכל בתחום של g (D)

צ"ל נרצה ש: $-\frac{\pi}{2} < 3^{2x} < \frac{\pi}{2}$

מאחר ו-'3' מס' חיובי יש צורך לבדוק רק את: $0 < 3^{2x} < \frac{\pi}{2}$

עמ' 3
מתוך 9

המשך סעיף א, שאלה 4:

i. $0 < 3^{2x}$ $\boxed{x\text{ לכל}}$.

ii. $3^{2x} < \frac{\pi}{2}$

$2x < \log_3 \frac{\pi}{2}$

$\boxed{x < \frac{1}{2}\log \frac{\pi}{2}}$

לכן נגדיר את $f: D_0 \to \mathbb{R}$ $D_0 := \{x \mid x < \frac{1}{2}\log_3 \frac{\pi}{2}\}$

כעת $f(D_0) \subseteq D$, וניתן לחשב את $g \circ f$:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(3^{2x}) = tg(3^{2x})$$

ו- $g \circ f : D_0 \to \mathbb{R}$.

ב. $f(x) = \frac{x+1}{x-5}$, $g(x) = \frac{1}{x}$

$f: \mathbb{R} \setminus \{5\} \to \mathbb{R}$ $g: \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$

נחשב את $(g \circ f)(x)$:

עדכון תחום: נרצה ש: $f(x) = \frac{x+1}{x-5} \neq 0$

$\Downarrow$

$x \neq -1$

לכן, נגדיר את $f: \mathbb{R} \setminus \{5, -1\} \to \mathbb{R}$ וניתן לחשב:

$$(g \circ f)(x) = g\left(\frac{x+1}{x-5}\right) = \frac{x-5}{x+1}$$

ו- $g \circ f : \mathbb{R} \setminus \{5, -1\} \to \mathbb{R}$.

נחשב את $(f \cdot g)(x)$:

עדכון תחום: נרצה ש: $g(x) = \frac{1}{x} \neq 5$

$\Downarrow$

$x \neq \frac{1}{5}$.

אז, נגדיר את $g: \mathbb{R} \setminus \{0, \frac{1}{5}\} \to \mathbb{R}$, וניתן לחשב:

$$(f \cdot g)(x) = f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\frac{1}{x}+1}{\frac{1}{x}-5} = \frac{\frac{1+x}{x}}{\frac{1-5x}{x}} = \frac{1+x}{1-5x}$$

ו- $f \cdot g : \mathbb{R} \setminus \{0, \frac{1}{5}\} \to \mathbb{R}$

עמ' 4
מתוך 9

5. תהי $f(t)$ פונקציה המוגדרת בתחום $0<t<1$. מה תחום ההגדרה של $f\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$?

$f\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$ הינו הרכבה של $f(t)$ על $g(x)=\frac{x+1}{x-1}$. צריך לדרוש שהתמונה של $g(x)$ תהיה מוכלת בתחום של f, כלו׳:

$$0<\frac{x+1}{x-1}<1$$

נפתור שני אי-שוויונים:

① $\frac{x+1}{x-1}<1$ וגם $\frac{x+1}{x-1}>0$

$$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$$

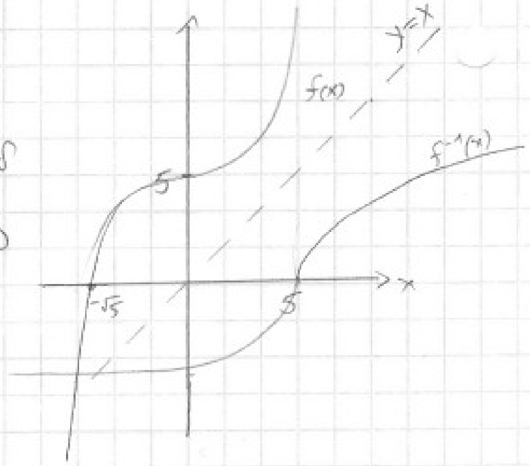
$(x<1)$ וגם $(x>1$ או $x<-1)$

$$x<-1$$

לכן, תחום ההגדרה של $f\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$ הוא $D=\{x \mid x<-1\}$.

6. עבור הפונקציות הבאות, קבעו האם יש להן פונקציות הפוכות, אם כן, מצאו אותן.

$$f(x)=\begin{cases} x^2+5, & (x\geq 0) \\ -x^2+5, & (x<0) \end{cases}$$



לפי הגרף, ניתן לראות כי $f(x)$ חח"ע ועל בתחום הגדרתה.

$x\geq 0$: $y=x^2+5$

$x^2=y-5$

$x=\pm\sqrt{y-5}$

$x=\sqrt{y-5}\,,\ y\geq 5$ כיוון ש-x אי-שלילי:

$x<0$: $y=-x^2+5$

$x^2=5-y$

$x=\pm\sqrt{5-y}$

עמ' 5 מתוך 9

המשך שאלה 6:

כיוון ש- $x<0$: $y<5$, $x=-\sqrt{5-y}$

ומסה"כ קיבלנו:
$$f^{-1}(x)=\begin{cases}\sqrt{x-5} & x\geq 5\\ -\sqrt{5-x} & x<5\end{cases}$$

$$f(x)=[x]$$

$f(x)$ מוגדרת לכל $\mathbb{R}$.

נראה כי $f(x)$ אינה חח"ע, ע"י דוגמה נגדית:

ניקח $x_1=1$, $x_2=1.5$, $x_1,x_2\in\mathbb{R}$:

$$f(x_1)=f(1)=[1]=1=[1.5]=f(1.5)=f(x_2)$$

קיבלנו $f(x_1)=f(x_2)$, <u>אבל</u> $x_1\neq x_2$ (כי $1\neq 1.5$)

לכן, $f(x)$ אינה חח"ע, ובוודאי שאין לה פונקציה הפוכה.

7. האם $f(x)=5^{\sin(3x^2)}+x\log_2 x$ אלמנטרית?

<u>תשובה</u>: כן, $f(x)$ אלמנטרית.

נתאר את סדרת הפעולות האלמנטריות ממנה היא מתקבלת:

x - פונק' אלמנטרית

$x\cdot x=x^2$, אלמנטרית כמכפלת פונק' אלמנטריות.

$3\cdot x^2=3\cdot x^2$, " " " " ('3' הפונק' הקבועה)

$\sin 3x^2 \Leftarrow g(x)=3x^2$, $\sin(g(x))$ אלמנטרית כהרכבת פונק' אלמ'.

$5^{\sin 3x^2} \Leftarrow f(x)=\sin(3x^2)$, $5^{f(x)}$ " " " "

$\log_2 x \Leftarrow$ פונק' אלמנטרית.

$x\cdot\log_2 x \Leftarrow$ אלמנטרית כמכפלת פונק' אלמ'.

לבסוף: $5^{\sin(3x^2)}+x\log_2 x$ אלמנטרית כסכום של פונק' אלמנטריות.

עמ' 6
מתוק 9

8. רשמו את חמשת האיברים הראשונים של כל אחת מהסדרות הבאות:

א.

$$a_{n+1}=2a_n+3(-1)^n \quad , \quad a_n=1$$

נתון: $a_1=1$

$a_2=a_{1+1}=2\cdot a_1+3\cdot(-1)^1=2-3=-1$

$a_3=a_{2+1}=2\cdot a_2+3\cdot(-1)^2=-2+3=1$

$a_4=a_{3+1}=2\cdot a_3+3\cdot(-1)^3=2-3=-1$

$a_5=a_{4+1}=2\cdot a_4+3\cdot(-1)^4=-2+3=1$

ניתן להבחין שהסדרה היא: $\left\{(-1)^{n+1}\right\}_{n=1}^{\infty}=\{1,-1,1,-1,1,\dots\}$

ב.

$$a_n=2^{n-1}-n^2+3$$

$a_1=2^0-1^2+3=3$

$a_2=2^1-2^2+3=1$

$a_3=2^2-3^2+3=-2$

$a_4=2^3-4^2+3=-5$

$a_5=2^4-5^2+3=-6$

ג.

$$a_{n+2}=2\sqrt{a_{n+1}a_n} \quad , \quad a_1=a_2=3$$

נתון: $a_1=a_2=3$

$a_3=2\sqrt{a_2a_1}=2\sqrt{3\cdot3}=6$

$a_4=2\sqrt{a_3a_2}=2\sqrt{6\cdot3}=6\sqrt{2}$

$a_5=2\sqrt{a_4\cdot a_3}=2\sqrt{6\sqrt{2}\cdot6}=12\sqrt[4]{2}$

עמ' 7 מתוך 9

9. בדקו את המונוטוניות של הסדרות הבאות:

א.
$$a_n = \frac{2^n}{n}$$

נבדוק את הערך של $\frac{a_{n+1}}{a_n}$:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2^{n+1}}{n+1} \cdot \frac{n}{2^n} = \frac{2n}{n+1} = \frac{(n+1)}{n+1} + \underbrace{\frac{n-1}{n+1}}_{\geq 0} \geq 1$$

קיבלנו, ש: $a_{n+1} \geq a_n$ לכל n. $\{a_n\}$ עולה לכל n.

אפשר גם לבדוק ש: $\{a_n\}$ עולה ממש לכל $n \geq 2$.

ב.
$$a_n = \frac{n}{2n^2+1}$$

נראה כי הסדרה מונוטונית יורדת ממש, כלומר: $a_n > a_{n+1}$

$$a_n = \frac{n}{2n^2+1} \overset{?}{>} \frac{n+1}{2(n+1)^2+1} = a_{n+1}$$

$$\frac{n}{2n^2+1} \overset{?}{>} \frac{n+1}{2n^2+4n+3}$$

$$\cancel{2n^3}+4n^2+3n \overset{?}{>} \cancel{2n^3}+2n^2+n+1$$

$$2n^2+2n-1 \overset{?}{>} 0$$

$$n_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4+8}}{4} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{3}}{4} \begin{array}{l} \nearrow 0.366 \\ \searrow -1.366 \end{array}$$

$n > 0.366$ או $\cancel{n < -1.366}$

$\Downarrow$

$n \geq 1$

נפסל כי n טבעי.

קיבלנו ש: $\{a_n\}$ יורדת ממש לכל n.

ג.
$$a_n = \sqrt{n} + \frac{1}{n}$$

נראה ש- $\{a_n\}$ מונוטונית עולה ממש, כלומר $a_n < a_{n+1}$

$$a_n = \sqrt{n} + \frac{1}{n} \overset{?}{<} \sqrt{n+1} + \frac{1}{n+1} = a_{n+1}$$

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \overset{?}{<} \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$$

$$\frac{1}{n(n+1)} \overset{?}{<} \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$$

עמ' 8 מתוקן

המשך שאלה 9, סעיף ג':

$$\frac{1}{n(n+1)} \overset{?}{<} \sqrt{n+1}-\sqrt{n}$$

נכפיל את אגף ימין בלבד ב: $\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \ (=1)$

$$\frac{1}{n(n+1)} \overset{?}{<} \left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\cdot\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$$

$$\frac{1}{n(n+1)} \overset{?}{<} \frac{\cancel{n}+1-\cancel{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$$

נכפול בהצבה:

$$\sqrt{n+1}+\sqrt{n} \overset{?}{<} n(n+1)$$

נצא מאגף שמאל ונגיע לאגף ימין:

צ"ל: $\underline{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} < \sqrt{n+1}+\sqrt{n+1} = 2\sqrt{n+1} \underset{2\le n}{\le} n\sqrt{n+1} < \underline{n(n+1)}$

לכן קיבלנו בסה"כ ש: $a_{n+1}>a_n$ ל-$n\geq 2$

לכן, $\{a_n\}$ מונוטונית עולה ממש.

10. בדוק האם הסדרות הבאות חסומות.

א. $a_n=\frac{n^2+1}{n+2}$

נראה כי הסדרה אינה חסומה מלמעלה:

צ"ל: $\forall M,\ \exists a_n : a_n > M$

$$a_n=\frac{n^2+1}{n+2} \underset{\text{הקטנת המונה}}{>} \frac{n^2}{n+2} \underset{n>2}{>} \frac{n^2}{n+n} = \frac{n^2}{2n} = \frac{n}{2} > M$$

אם ניקח $n_0=[2M]+1$, אזי $M<a_{n_0}$, והראינו ש-$\{a_n\}$ אינה חסומה מלמעלה.

ב. $a_n=\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n}$

נראה באותו אופן, כי הסדרה אינה חסומה מלמעלה

$$a_n=\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n} > \sqrt{n^2+1} > \sqrt{n^2} = n > M$$

אם ניקח $n_0=[M]+1$, $a_{n_0}>M$.

הסדרה $\{a_n\}$ אינה חסומה מלמעלה.

תיקון לתרגיל בית מס' 4
שאלה 10, סעיף ב'.

בפתרון שפורסם, נפלה טעות.
התיקון מובא להלן:

10. ב. נראה כי הסדרה: $a_n = \sqrt{n^2+1} - \sqrt{n}$
אינה חסומה מלעיל:

צ"ל: $\forall M,\ \exists a_n : a_n > M$

$$a_n = \sqrt{n^2+1} - \sqrt{n} \geq \sqrt{n^2} - \sqrt{n} \underset{\downarrow}{=} \frac{(\sqrt{n^2}-\sqrt{n})(\sqrt{n^2}+\sqrt{n})}{(\sqrt{n^2}+\sqrt{n})}$$

כפל בצמוד

$$= \frac{n^2-n}{n+\sqrt{n}} \geq \frac{n^2-n}{n+n} = \frac{n(n-1)}{2n} = \frac{n-1}{2} \underset{\downarrow}{>} M$$

נדרוש

עבור $n_0 = [2M+1]+1$ נקבל $a_{n_0} > M$.
לכן, a_n אינה חסומה מלעיל.

עמ' 9 מתוך 9

ב. $a_n = \frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\dots+\frac{1}{n(n+1)}$

נראה כי $\{a_n\}$ חסומה:

לכל n, $a_n \geq \frac{1}{2}$ כי האיבר הראשון הוא $\frac{1}{2}$, ובכל שלב מוסיפים איברים חיוביים.

כדי להוכיח ש: $\{a_n\}$ חסומה מלמעלה, נשתמש בעובדה ש: $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$.

ואז נוכל לרשום את הסכום $a_n = \frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\dots+\frac{1}{n(n+1)}$ באופן הבא:

$$a_n = \left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\dots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$

הביטוי שקיבלנו נקרא <u>טור טלסקופי</u>, כל האיברים חוץ מהראשון והאחרון מצטמצמים:

$$a_n = 1-\frac{1}{n+1} < 1 \quad \forall n\in\mathbb{N}$$

לכן $\frac{1}{2} \leq a_n < 1$.

$\Leftarrow$ $\{a_n\}$ חסומה.

תרגיל מס׳ 5

ההגשה **בזוגות** עד : 29/11/04 17:00

גבול של סדרה

1. א. הוכיחו לפי הגדרה כי: $\lim_{n\to\infty}\frac{n+6}{n+4}=1$

ב. הראו כי $\lim_{n\to\infty}\frac{n+6}{n+4}\neq 2$

ג. עבור $\varepsilon=10^{-2}$, מצאו כמה מאברי הסדרה נמצאים מחוץ לסביבה $(1-\varepsilon,1+\varepsilon)$

2. הוכיחו לפי הגדרת הגבול :

א. $\lim_{n\to\infty}\frac{1000n}{n^2+1}=0$

ב. $\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+1}{n^2+n+1}=2$

ג. $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n!}=0$

3. חשבו את הגבולות הבאים:

א. $\lim_{n\to\infty}\frac{n^7+5n^2+8}{8n^7+4n^2+2}$

ב. $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\sqrt{n+\frac{1}{2}}$

ג. $\lim_{n\to\infty}\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n}$

ד. $\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n}$

ה. $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)$

ו. $\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!-n!}{(n+1)!+n!}$

ז. $\lim_{n\to\infty}\frac{2^n}{n!}$

ח. $\lim_{n\to\infty}\left(8^n+4^n+2^n\right)^{\frac{1}{n}}$

ט. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{(2n)!}{(n!)^2}}$

י. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}\right)$

4. מדוע לסדרה $a_n=\frac{3}{n}+(-1)^n$ אין גבול ? תנו הסבר תיאורטי.

5. הוכח או הפרך:

א. אם $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n)^2=L$, אזי $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=L$ או $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=-L$.

ב. אם $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=L$ ו- $L\neq 0$, אז $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=1$.

ג. אם $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$ ו- $\forall n\in N:\ a_n>0$, אז $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=0$

ד. אם $\lim\limits_{n\to\infty}(n\cdot a_n)=1$, אזי $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה חסומה.

ה. אם קיים הגבול $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n+b_n)$, אזי קיימים הגבולות: $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ ו- $\lim\limits_{n\to\infty}b_n$

בהצלחה!

פתרון תרגיל מס' 5

1. א. הוכיחו לפי הגדרה כי $\lim_{n\to\infty}\frac{n+6}{n+4}=1$.

צ"ל כי לכל $\varepsilon>0$, קיים $n_0\in\mathbb{N}$, כך שלכל $n\geq n_0$, $\left|\frac{n+6}{n+4}-1\right|<\varepsilon$.

$$\left|\frac{n+6}{n+4}-1\right|=\left|\frac{\cancel{n}+6-\cancel{n}-4}{n+4}\right|=\left|\frac{2}{n+4}\right| \underset{\text{לכל } n \text{ טבעי}}{=} \frac{2}{n+4} \underset{\text{נדרוש}}{<} \varepsilon$$

$$2<\varepsilon n+4\varepsilon$$

$$n>\frac{2-4\varepsilon}{\varepsilon}$$

עבור $n_0=\left[\frac{2-4\varepsilon}{\varepsilon}\right]+1$ מתקיים שלכל $n\geq n_0$ $|a_n-1|<\varepsilon$ ∎

ב. הראו כי $\lim_{n\to\infty}\frac{n+6}{n+4}\neq 2$.

I. נתבונן בהגדרת הגבול: $\forall\varepsilon>0,\ \exists n_0,\ \forall n\geq n_0: |a_n-L|<\varepsilon$

נניח בשלילה ש- $L=2$ הינו הגבול, אז לפי הגדרת הגבול,

לכל $\varepsilon>0$ יש N_0 טבעי, כך שלכל $n\geq N_0$ $\left|\frac{n+6}{n+4}-2\right|<\varepsilon$.

<u>דרך הפתרון</u>: אם נראה כי יש (קיים) $\varepsilon>0$ עבורו לא מתקיים התנאי, הרי שסתרנו את העובדה ש-2 הינו גבול!

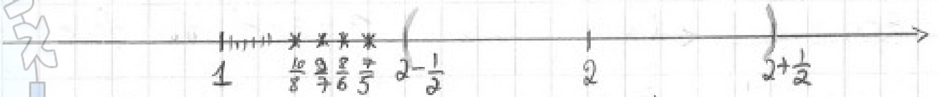
$$\left|\frac{n+6}{n+4}-2\right|=\left|\frac{-n-2}{n+4}\right|=\frac{n+2}{n+4}=\frac{(n+4)-2}{n+4}=1-\frac{2}{n+4}$$

לכל n טבעי מתקיים: $\frac{2}{n+4}\leq\frac{2}{1+4}=\frac{2}{5} \Rightarrow 1-\frac{2}{n+4}\geq 1-\frac{2}{5}=\frac{3}{5}$

אם כן, מצאנו שעבור $\varepsilon=\frac{3}{5}$, לכל n: $|a_n-2|\geq\frac{3}{5}$,

לכן, 2 אינו גבול הסדרה.

II. <u>דרך נוספת</u>: נתבונן בפריסת איברי הסדרה על ציר הממשיים. ונבחר "ידנית" את ε שיביא לסתירה.



נבחר את $\varepsilon=\frac{1}{2}$, ונראה כי בסביבה $(2-\frac{1}{2}, 2+\frac{1}{2})$ אין אף איבר של הסדרה, ובוודאי שאין אינסוף איברים של הסדרה!

עמ' 2 מתוך 7

אם כן נניח כי $\varepsilon=\frac{1}{2}$, אם 2 הוא גבול הסדרה, הרי שצריך להתקיים כי קיים n_0 כך שלכל $n\geq n_0$:

$$\left|\frac{n+6}{n+4}-2\right|<\frac{1}{2} \iff \frac{n+2}{n+4}<\frac{1}{2}$$

נכפיל / במכנה

$$\Rightarrow 2n+4<n+4$$

$$\boxed{n<0}$$

קיבלנו כי $|a_n-2|<\frac{1}{2}$ נכון עבור $n<0$, אבל n טבעי!

לכן סתירה!

ג. עבור $\varepsilon=10^{-2}$ מצאו כמה מאיברי הסדרה נמצאים מחוץ לסביבה $(1-10^{-2},1+10^{-2})$.

מסעיף א', מצאנו שהאינדקס של האיבר <u>הראשון</u> שבתוך הסביבה הוא: $n_0=\left[\frac{2-4\varepsilon}{\varepsilon}\right]+1$.

נחשב עבור $\varepsilon=10^{-2}$: $n_\varepsilon=\left[\frac{2-4\cdot 10^{-2}}{10^{-2}}\right]+1=197$

לכן יש <u>196</u> איברים מחוץ לסביבה: $(1-\varepsilon,1+\varepsilon)$.

2.א. הוכיחו לפי הגדרת הגבול:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1000n}{n^2+1}=0$$

צ"ל: $\circledast\ \forall\varepsilon>0:\exists n_0,\forall n\geq n_0:|a_n-0|<\varepsilon$

$$\left|\frac{1000n}{n^2+1}-0\right|=\left|\frac{1000n}{n^2+1}\right|=\frac{1000n}{n^2+1}\underset{\downarrow}{<}\frac{1000n}{n^2}=\frac{1000}{n}\underset{\downarrow}{<}\varepsilon$$

הקטנת המכנה ← הגדלת השבר   דרישה

נמצא איזה 'n' מקיים: $\frac{1000}{n}<\varepsilon$:

אם ניקח: $n_0=\left[\frac{1000}{\varepsilon}\right]+1$ אזי לכל $n\geq n_0$: $\left|\frac{1000n}{n^2+1}\right|<\varepsilon$

ב.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+1}{n^2+n+1}=2$$

צ"ל: $\circledast$:

$$\left|\frac{2n^2+1}{n^2+n+1}-2\right|=\left|\frac{2n^2+1-2n^2-2n-2}{n^2+n+1}\right|=$$

$$=\left|\frac{-2n-1}{n^2+n+1}\right|=\frac{2n+1}{n^2+n+1}\underset{\downarrow}{<}\frac{2n+n}{n^2}=\frac{3\cancel{n}}{n^{\cancel{2}}}=\frac{3}{n}\underset{\downarrow}{<}\varepsilon$$

הגדלת המונה + הקטנת המכנה   דרישה

עמ' 3 מתוך 7

עבור $n_0=\left[\frac{3}{\varepsilon}\right]+1$ מתקיים, $\forall n\geq n_0$: $|a_n-2|<\varepsilon$.

ג. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n!}=0$.

צ"ל: (*)

$$\left|\frac{1}{n!}-0\right|=\frac{1}{n!}<\frac{1}{n}\underset{\text{דרישה}}{<}\varepsilon$$

ניקח $n_0=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]+1$, אז עבור $n\geq n_0$: $\left|\frac{1}{n!}-0\right|<\varepsilon$.

3. א. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^7+5n^2+8}{8n^7+4n^2+2}$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^7+5n^2+8}{8n^7+4n^2+2}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^7\left(1+\frac{5}{n^5}+\frac{8}{n^7}\right)}{n^7\left(8+\frac{4}{n^5}+\frac{2}{n^7}\right)}=$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{5}{n^5}+\frac{8}{n^7}}{8+\frac{4}{n^5}+\frac{2}{n^7}}\underset{\text{אריתמטיקה של גבולות}}{=}\frac{1+0+0}{8+0+0}=\frac{1}{8}$$

ב. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\sqrt{n+\frac{1}{2}}$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\sqrt{n+\frac{1}{2}}\underset{\text{כפל בצמוד}}{=}\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\left(\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\right)\cdot\sqrt{n+\frac{1}{2}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\cdot\sqrt{n+\frac{1}{2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+\frac{1}{2}}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\underset{\text{נחלק מונה ומכנה ב-}\sqrt{n}}{=}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{1}{2n}}}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1}}\underset{\lim\sqrt{a_n}=\sqrt{\lim a_n}}{=}\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$$

ג. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n}$

נשתמש בזהות:

$$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)\Rightarrow a-b=\frac{a^3-b^3}{a^2+ab+b^2}$$

ועבור: $b=\sqrt[3]{n}$, $a=\sqrt[3]{n+1}$:

$$\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n}=\frac{(n+1)-n}{(n+1)^{\frac{2}{3}}+(n(n+1))^{\frac{1}{3}}+n^{\frac{2}{3}}}<\frac{1}{n^{\frac{2}{3}}}$$

לכן נקבל:

$$0<\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n}<\frac{1}{n^{\frac{2}{3}}}$$

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^{\frac{2}{3}}}=0$, לכן לפי כלל סנדביץ': $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n}=0$

עמ' 4
פרק 7

ד. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n}$.

$$\underset{\substack{\downarrow n\to\infty \\ 0}}{0} < \frac{n!}{n^n} = \frac{1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot n}{\underbrace{n\cdot n\cdot n\cdot\cdots\cdot n}_{\leq 1}} \leq \underset{\substack{\downarrow n\to\infty \\ 0}}{\frac{1}{n}}$$

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$

לכן, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n}=0$, לפי כלל סנדביץ'

ה. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)$

$$\underset{\substack{\downarrow \\ 1}}{\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}} \leq \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \leq \underset{\substack{\downarrow \\ 1}}{\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}}$$

כי:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}} = 1$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+1}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}} = 1$$

לכן, לפי סנדביץ', $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)=1$

ו. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)!-n!}{(n+1)!+n!}$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!-n!}{(n+1)!+n!} = \lim_{n\to\infty}\frac{\cancel{n!}(n+1-1)}{\cancel{n!}(n+1+1)} = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+2} = 1$$

ז. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^n}{n!}$

$$\underset{\substack{\downarrow n\to\infty \\ 0}}{0} \leq \frac{2^n}{n!} = \frac{2\cdot2\cdot2\cdot\ldots\cdot2}{1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot n} \leq \frac{2\cdot\overbrace{2\cdot2\cdot\ldots\cdot2}^{n-2}\cdot2}{1\cdot\underbrace{2\cdot2\cdot\ldots\cdot2}_{n-2}\cdot n} = \underset{\substack{\downarrow n\to\infty \\ 0}}{\frac{4}{n}}$$

$\left(\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4}{n}=0\right)$

לכן, לפי כלל סנדביץ':

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2^n}{n!}=0$$

עמ' 5
מרוק 7

ח. $\lim_{n\to\infty}(8^n+4^n+2^n)^{\frac{1}{n}}$

$$8=\sqrt[n]{8^n}\le\sqrt[n]{8^n+4^n+2^n}\le\sqrt[n]{8^n+8^n+8^n}=8\sqrt[n]{3}$$

$n\to\infty\downarrow$ 8 $\qquad$ $n\to\infty\downarrow$ 8

$$\left(\lim 8\cdot\sqrt[n]{3}\right)=8\cdot\lim\sqrt[n]{3}\underset{\text{לפי משפט}}{=}8\cdot1=8)$$

לכן, לפי כלל סנדוויץ': $\lim_{n\to\infty}(8^n+4^n+2^n)^{\frac{1}{n}}=8$.

ט. $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{(2n)!}{(n!)^2}}$

נסמן $a_n=\frac{(2n)!}{(n!)^2}$, ונחשב את $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n-1}}$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n)!}{(n!)^2}\cdot\frac{((n-1)!)^2}{(2(n-1))!}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n-2)!(2n-1)\cdot2n}{[\cancel{(n-1)!}\cdot n][\cancel{(n-1)!}\cdot n]}\cdot\frac{\cancel{(n-1)!}\cdot\cancel{(n-1)!}}{\cancel{(2n-2)!}}=\lim_{n\to\infty}\frac{4n-2}{n}$$

$$=\underline{\underline{4}}$$

לכן, לפי משפט:
$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{(2n)!}{(n!)^2}}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n-1}}=4$$

י. $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\dots+\frac{1}{n(n+1)}\right)=$$

לפי הזהות: $\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\dots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\right]\underset{\text{טור טלסקופי}}{=}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1-0=\underline{\underline{1}}$$

עמ' 6
מתרגל 7

4. מדוע לסדרה $a_n=\frac{3}{n}+(-1)^n$ אין גבול?

עבור ערכי n זוגיים ("גדולים"), איברי הסדרה "קרובים" ל- $L_1=1$.

עבור ערכי n אי-זוגיים ("גדולים"), איברי הסדרה "קרובים" ל- $L_2=-1$.

אם נקיף את L_1 ו- L_2 ברדיוס $\varepsilon=\frac{1}{3}$ (למשל), אזי בכל אחת מהסביבות נמצא אינסוף איברים.

הדבר נוגד את הגדרת הגבול: מחוץ לכל אחת מהסביבות חייב להיות מס' <u>סופי</u> של איברים.

5. הוכח או הפרך:

א. אם $\lim a_n^2 = L^2$ אז $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$ או $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -L$.

<u>דוגמה נגדית</u>: ניקח את $a_n=(-1)^n$, אזי $a_n^2=(-1)^{2n}=1$.

ו- $\lim\limits_{n\to\infty} a_n^2 = 1$, אבל:

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 1$ וגם $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq -1$.

לכן הטענה אינה נכונה.

ב. אם $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$, ו- $L\neq 0$, אזי $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=1$

<u>הוכחה</u>: אם $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$, אזי $\lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1} = L$,

ו- $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} \underset{\downarrow}{=} \frac{\lim a_{n+1}}{\lim a_n} = \frac{L}{L} = 1$

אריתמטיקה של גבולות

ג. אם $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, ו- $\forall n\in\mathbb{N}: a_n>0$ אזי $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=0$.

<u>דוגמה נגדית</u>: ניקח את $a_n=\frac{1}{n}$.

אזי מתקיים ש: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$, ו- $\forall n\in\mathbb{N}: \frac{1}{n}>0$, אבל:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n}} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}} \underset{\downarrow}{=} \frac{1}{1} = 1 \neq 0$$

לפי משפט

ד. אם $\lim (n\cdot a_n)=1$, אזי $\{a_n\}$ סדרה חסומה.

הוכחה:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{n\cdot a_n}{n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cdot(n\cdot a_n) =$$

אריתמטיקה של גבולות

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cdot\lim_{n\to\infty} na_n = 0\cdot 1 = 0$$

קיבלנו ש- $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, ז"א $\{a_n\}$ סדרה מתכנסת,

ולפי משפט, כל סדרה מתכנסת היא חסומה ∎

ה. אם קיים הגבול $\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)$, אזי קיימים הגבולות

$\lim_{n\to\infty} a_n$, $\lim_{n\to\infty} b_n$.

דוגמה נגדית:

ניקח: $a_n = \frac{1}{n} + (-1)^n$, $b_n = \frac{1}{n} - (-1)^n$

אזי: $a_n + b_n = \frac{2}{n} \Leftarrow \lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)=0$,

הגבול $\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)$ קיים, אבל $\{a_n\}$ ו- $\{b_n\}$

אינן מתכנסות.

תרגיל מס' 6

ההגשה **בזוגות** עד : 05/12/04 16:00

גבול של סדרה

1. הוכיחו לפי הגדרה כי: א. $\lim_{n\to\infty}\left(n^2-n\right)=\infty$

ב. $\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{n^2+3}{2n+1}}=\infty$

2. השאלה בוטלה

3. חשבו את הגבולות הבאים (בכל דרך שנלמדה בהרצאה או בתרגול או בפרק 3 סעיף 11 בן ציון קון):

א. $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{7+3n}{9+3n}\right)^n$

ב. $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n$

ג. $\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{\sqrt[n]{(2n)!}}$

ד. $\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n^2-4}\right)^{3n^2+5}$

ה. $\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2n^4+10n^3+100}}{3\sqrt{n}+4n^2}$

ו. $\lim_{n\to\infty}\frac{n^3-3n^4+n^5}{10n^6-n^4+1}$

ז. $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n-2}\right)^{3n+2}$

ח. $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n^2]{n^3+1}$

4. הוכיחו כי הסדרות הבאות מתכנסות וחשבו את גבולותיהן:

א. $a_1=\sqrt{3}\quad,\quad a_{n+1}=\sqrt{3a_n}$

ב. $a_1=\frac{1}{4}\quad,\quad a_{n+1}=\frac{1}{4}+a_n^2$

5. מצאו את כל הגבולות החלקיים של:

א. $a_n = \frac{1}{n^2+1} + (-1)^n$

ב. $a_n = \left(\frac{n + (-1)^n}{n} \right)^n$

6. מצאו גבול עליון וגבול תחתון לסדרות הבאות:

א. $\left\{ 3 + (-1)^n + \frac{1}{n} \right\}_{n=1}^{\infty}$

ב. $\left\{ \frac{2n \sin \frac{n\pi}{2}}{n+3} \right\}_{n=1}^{\infty}$

ג. $\left\{ n \cos \frac{n\pi}{4} \right\}_{n=1}^{\infty}$

7. הוכיחו כי לסדרות הבאות אין גבול:

א. $a_n = (-1)^{[\sqrt{n}]} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n$

ב. $a_n = 1 + \frac{n}{n+1} \cos \frac{n\pi}{2}$

ג. $a_n = 1 + 2(-1)^{n+1} + 3(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$

8. בדקו לפי קריטריון קושי את התכנסות הסדרות הבאות:

א. $a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\cos(k!)}{k(k+1)}$

ב. $a_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{\ln(k)} \quad n = 2,3,4,\ldots$

9. הוכח או הפרך:

א. אם $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ ולכל n , $a_n \geq 0$ אז $\lim_{n\to\infty} \sqrt{a_n} = \sqrt{L}$.

ב. אם $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ אז $\lim_{n\to\infty} |a_n| = |L|$.

ג. אם $\lim_{n\to\infty} |a_n| = |L|$ אז $\lim_{n\to\infty} a_n = L$.

ד. אם $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ ולכל n , $a_n \neq 0$ אז $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = \infty$ או $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = -\infty$.

ה. אם $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ אז $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = 0$.

בהצלחה!!!

עמ' 1 מתוך 10

פתרון תרגיל מס' 6

1. הוכיחו לפי הגדרה

א. $\lim_{n\to\infty} (n^2 - n) = \infty$

צ"ל: $\forall M, \exists n_0, \forall n \geq n_0 : a_n > M$

$$a_n = n^2 - n = n(n-1) > (n-1)^2 > n-1 \underset{\text{דרוש}}{>} M$$

עבור $n_0 = [M+1]+1$ מתקיים $\forall n \geq n_0 :$ $a_n > M$.

ב. $\lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{n^2+3}{2n+1}} = \infty$

צ"ל: $\forall M, \exists n_0, \forall n \geq n_0 : a_n > M$

$$a_n = \sqrt{\frac{n^2+3}{2n+1}} > \sqrt{\frac{n^2}{2n+n}} = \frac{n}{\sqrt{3n}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \sqrt{n} \underset{\text{דרישה}}{>} M$$

$\Leftarrow$ $\sqrt{n} > \sqrt{3} \cdot M$ (כיוון ששני האגפים חיוביים, נעלה בריבוע).

$$n > 3M^2$$

ניקח $n_0 = [3M^2]+1$, ואז לכל $n \geq n_0$ $a_n > M$ ■

3. א.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{7+3n}{9+3n}\right)^n$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{7+3n}{9+3n}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{9+3n-2}{9+3n}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{2}{9+3n}\right)^n=$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\left(1-\frac{2}{9+3n}\right)^{3n+9}}{\left(1-\frac{2}{9+3n}\right)^9}\right)^{\frac{1}{3}}=\frac{\lim_{n\to\infty}\sqrt[3]{\left(1-\frac{2}{9+3n}\right)^{3n+9}}}{\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{2}{9+3n}\right)^3}=$$

$$=\frac{\left(e^{-2}\right)^{\frac{1}{3}}}{1^3}=e^{-\frac{2}{3}}$$

ב.

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n$$

$$\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n=\left[\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}\right]^{\frac{1}{n}}$$

$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}=e$, לכן עבור $\varepsilon=\frac{e}{2}$, קיים N_0 כך שלכל $n\ge N_0$:

$$\frac{e}{2}<\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}<\frac{3e}{2}$$

לכן:

$$\underset{\substack{\downarrow\, n\to\infty\\ 1}}{\sqrt[n]{\frac{e}{2}}}<\sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}}<\underset{\substack{\downarrow\, n\to\infty\\ 1}}{\sqrt[n]{\frac{3e}{2}}}$$

לכן, לפי סנדביץ': $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n=1$.

ג.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{\sqrt[n]{(2n)!}}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{\sqrt[n]{(2n)!}}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{n^{2n}}{(2n)!}}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}$$

נסמן: $a_n=\frac{n^{2n}}{(2n)!}$

ונחשב את:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^{2n}}{(2n)!}\cdot\frac{(2n-2)!}{(n-1)^{2n-2}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^{2n-2}\cdot n^2\cdot\cancel{(2n-2)!}}{(n-1)^{2n-2}\cdot\cancel{(2n-2)!}(2n-1)\cdot 2n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n-1}\right)^{2n-2}\cdot\frac{n^2}{4n^2-2n}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}\right]^2\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{4n^2-2n}=e^2\cdot\frac{1}{4}=\frac{e^2}{4}$$

לכן, לפי משפט:
$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{\sqrt[n]{(2n)!}}=\frac{e^2}{4}$$

ד.
$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n^2-4}\right)^{3n^2+5}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n^2-4}\right)^{3n^2+5}=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n^2-4}\right)^{3n^2-12}\cdot\left(1-\frac{1}{n^2-4}\right)^{17}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left[\left(1-\frac{1}{n^2-4}\right)^{n^2-4}\right]^3\cdot\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n^2-4}\right)^{17}=e^{-3}\cdot 1^{17}=e^{-3}$$

ה.
$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2n^4+10n^3+100}}{3\sqrt{n}+4n^2}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2n^4+10n^3+100}}{3\sqrt{n}+4n^2}\underset{\downarrow}{=}\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2+\frac{10}{n}+\frac{100}{n^4}}}{3\sqrt{\frac{1}{n^3}}+4}=\frac{\sqrt{2}}{4}$$

נחלק מונה ב-n^2

ו.
$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^3-3n^4+n^5}{10n^6-n^4+1}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^5-3n^4+n^3}{10n^6-n^4+1}\underset{\downarrow}{=}0$$

מנת פולינומים $\frac{P(n)}{Q(n)}$

כי: $6=\deg Q(n)>\deg P(n)=5$

ז.
$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n-2}\right)^{3n+2}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n-2}\right)^{3n+2}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-2+3}{n-2}\right)^{3n-6+8}=$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{3}{n-2}\right)^{n-2}\right]^3\cdot\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{3}{n-2}\right)^8=\left(e^3\right)^3\cdot 1^8=e^9$$

ח.
$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n^2]{n^3+1}$$

$$\sqrt[n^2]{1}\le\sqrt[n^2]{n^3+1}\le\sqrt[n^2]{n^4}$$
$$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\downarrow 1$$

$$1)\ \lim_{n\to\infty}\sqrt[n^2]{n^4}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n^2]{(n^2)^2}=1\quad;\quad 2)\ \lim_{n\to\infty}\sqrt[n^2]{1}=1$$

הסבר: $\left\{\sqrt[n^2]{(n^2)^2}\right\}$ היא תת-סדרה של $\left\{\sqrt[n]{n^2}\right\}$ (עם $k=n^2$),

לכן מתכנסת גם ל-1, כמו כן $\sqrt[n^2]{1}\xrightarrow[n\to\infty]{}1$ לכן

בסה"כ לפי כלל סנדביץ': $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n^2]{n^3+1}=1$

4. א. צ"ל כי: $a_{n+1}=\sqrt{3a_n}$, $a_1=\sqrt{3}$ מתכנסת

ונחשב את הגבול.

1. נראה כי הסדרה מונוטונית עולה כלומר $a_{n+1} > a_n$.

נוכיח באינדוקציה על n:

<u>בסיס</u>: $a_2=\sqrt{3\sqrt{3}} \cong 2.28 > 1.7 \cong \sqrt{3} = a_1$ ☑

<u>הנחה</u>: נניח כי עבור $n=k$ מתקיים $a_{k+1} > a_k$.

<u>הוכחה</u>: צ"ל עבור $n=k+1$ כי $a_{k+2} > a_{k+1}$.

$$a_{k+2}=\sqrt{3a_{k+1}} \underset{\text{לפי הנחת האינד'}}{>} \sqrt{3a_k} = a_{k+1}$$

☑

2. נראה כי הסדרה חסומה: $0 < a_n$ לכל n.

נראה כי a_n חסומה מלעיל ע"י 3:

נוכיח באינדוקציה על n:

<u>בסיס</u>: $a_1=\sqrt{3} < 3$ ☑

<u>הנחה</u>: נניח כי עבור $n=k$, $a_k < 3$.

<u>הוכחה</u>: נוכיח עבור $n=k+1$, $a_{k+1} < 3$.

$$a_{k+1}=\sqrt{3\cdot a_k} \underset{\text{לפי ההנחה}}{<} \sqrt{3\cdot 3} = 3$$

☑

סה"כ $0 < a_n < 3$ לכן חסומה.

הוכחנו כי $\{a_n\}$ מונוטונית עולה וחסומה, לכן היא מתכנסת לגבול סופי. נחשבו.

ניתן להניח כי $\lim_{n\to\infty} a_n = c$, c קבוע סופי כלשהו.

אז מתקיים:

$$c=\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty}\sqrt{3\cdot a_n} = \sqrt{3\cdot c}$$

$$\Leftarrow \quad c=\sqrt{3\cdot c}$$

$$c^2=3c$$

$$c=0,3 \quad \Leftarrow \quad c(c-3)=0$$

לא יתכן ש- $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, כי a_n עולה, ו- $a_1=\sqrt{3}$.

לכן, $\lim_{n\to\infty} a_n = 3$.

עמ' 5
מתוך 10

ב. צ"ל: $a_1=\frac{1}{4}$, $a_{n+1}=\frac{1}{4}+a_n^2$

מתכנסת ונחשב את גבולה.

1. נראה כי הסדרה מונוטונית עולה: צ"ל, $a_{n+1}>a_n$.

נוכיח באינדוקציה על n:

<u>בסיס:</u> $a_2=\frac{1}{4}+\frac{1}{16}=\frac{5}{16}>\frac{1}{4}=a_1$

<u>הנחה:</u> נניח כי עבור $n=k$ מתקיים: $a_{k+1}>a_k$.

<u>הוכחה:</u> נוכיח כי עבור $n=k+1$ מתקיים: $a_{k+2}>a_{k+1}$:

$$a_{k+2}=\frac{1}{4}+(a_{k+1})^2 \underset{\text{לפי הנחה}}{>} \frac{1}{4}+(a_k)^2=a_{k+1}$$

2. נראה כי $\{a_n\}$ חסומה.

$0<a_n$ לכל n (סדרה של מס' חיוביים).

ונוכיח כי $a_n<\frac{1}{2}$ לכל n: נוכיח באינדוקציה.

<u>בסיס:</u> עבור $n=1$: $a_1=\frac{1}{4}<\frac{1}{2}$.

<u>הנחה:</u> עבור $n=k$, נניח כי $a_k<\frac{1}{2}$

<u>הוכחה:</u> נוכיח עבור $n=k+1$ ש: $a_{k+1}<\frac{1}{2}$.

$$a_{k+1}=\frac{1}{4}+a_k^2<\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$$

אם כן הוכחנו ש: $0<a_n<\frac{1}{2}$ לכל n, לכן חסומה.

סה"כ, a_n מונוטונית עולה וחסומה, לכן עפ"י משפט, מתכנסת לגבול סופי.

נניח כי $\lim_{n\to\infty} a_n=c$, c קבוע סופי כלשהו. אזי:

$$c=\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}a_{n+1}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{4}+a_n^2\right)=\frac{1}{4}+c^2$$

$$\Leftarrow \quad c^2-c+\frac{1}{4}=0$$

$$c=\frac{1}{2} \Leftarrow \left(c-\frac{1}{2}\right)^2=0$$

לכן, $\lim_{n\to\infty}a_n=\frac{1}{4}$

עמ' 6
מתוך 10

5. א. מצאו את כל הגבולות החלקיים:

$$a_n = \frac{1}{n^2+1} + (-1)^n$$

עבור n-ים זוגיים $(n=2k)$:
$$a_n = \frac{1}{n^2+1} + 1$$

אז:
$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2+1}+1\right) = 1$$

עבור n-ים אי-זוגיים $(n=2k+1)$
$$a_n = \frac{1}{n^2+1} - 1$$

אז
$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2+1}-1\right) = -1$$

ב.
$$a_n = \left[\frac{n+(-1)^n}{n}\right]^n$$

$$a_n = \left[\frac{n+(-1)^n}{n}\right]^n = \left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right)^n$$

עבור n-ים זוגיים:
$$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

לכן,
$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$$

עבור n-ים אי-זוגיים:
$$a_n = \left(1-\frac{1}{n}\right)^n$$

לכן,
$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{e}$$

6. א. מצאו גבול עליון וגבול תחתון.

$$a_n = 3 + (-1)^n + \frac{1}{n}$$

גבול עליון:
$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n = \overline{\lim_{n\to\infty}}\left(3+(-1)^n+\frac{1}{n}\right) = 3+1+0 = \underline{\underline{4}}$$

גבול תחתון:
$$\underline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n = \underline{\lim_{n\to\infty}}\left(3+(-1)^n+\frac{1}{n}\right) = 3-1+0 = \underline{\underline{2}}$$

ב.
$$a_n = \frac{2n\sin\frac{n\pi}{2}}{n+3}$$

גבול עליון: עבור $n=4k-3,\ k\in\mathbb{N}$ (בדקו!)
$$\sin\frac{n\pi}{2} = 1$$

לכן:
$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n = \overline{\lim_{n\to\infty}}\, \frac{2n\sin\frac{n\pi}{2}}{n+3} = \lim_{n\to\infty}\frac{2n\cdot 1}{n+3} = \underline{\underline{2}}$$

גבול תחתון: עבור $n=4k-1,\ k\in\mathbb{N}$ (בדקו!)
$$\sin\frac{n\pi}{2} = -1$$

לכן:
$$\underline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n = \underline{\lim_{n\to\infty}}\, \frac{2n\sin\frac{n\pi}{2}}{n+3} = \lim_{n\to\infty}\frac{-2n}{n+3} = \underline{\underline{-2}}$$

עמ' 7
מיוק 10

ג. $a_n = n\cos\frac{n\pi}{4}$

<u>גבול עליון</u>: עבור $n=8k,\ k\in\mathbb{N}$: $\cos\frac{n\pi}{4}=1$.

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n = \overline{\lim_{n\to\infty}}\, n\cos\frac{n\pi}{4} = \lim_{n\to\infty} n\cdot 1 = \infty$$

<u>גבול תחתון</u>: עבור $n=8k-4\ ,\ k\in\mathbb{N}$ $\cos\frac{n\pi}{4} = -1$.

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n = \underline{\lim_{n\to\infty}}\, n\cdot\cos\frac{n\pi}{4} = \lim_{n\to\infty} n\cdot(-1) = -\infty$$

הוכחנו כי לסדרה הנתונה אין גבול.

7. א. $a_n = (-1)^{[\sqrt{n}]}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

* עבור $\sqrt{n}=2k$

$k\in\mathbb{N}$, $n=4k^2$, ניקח את תת-הסדרה $\{a_{4k^2}\}$.

וכן: $a_{4k^2} = (-1)^{2k}\left(1+\frac{1}{4k^2}\right)^{4k^2} \Rightarrow a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

לכן: $\lim_{k\to\infty} a_{4k^2} = \lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{4k^2}\right)^{4k^2} = e$

* עבור $\sqrt{n}=2k+1 \Leftarrow n=4k^2+4k+1\ ,\ k\in\mathbb{N}$,

ניקח את תת הסדרה: $\{a_{4k^2+4k+1}\}$

אז: $a_n = -\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

לכן, $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} -\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = -e$

קיבלנו שתי תת-סדרות של a_n שמתכנסות לגבולות שונים, לכן, לפי משפט, ל-a_n אין גבול.

ב. $a_n = 1+\frac{n}{n+1}\cos\frac{n\pi}{2}$.

* עבור $n=4k\ ,\ k\in\mathbb{N}$: נתבונן בתת-הסדרה $\{a_{4k}\}$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{4k}{4k+1}\cos(2\pi k)\right) = \lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{4k}{4k+1}\cdot 1\right) = 1+1 = \underline{\underline{2}}$$

* עבור $n=4k-2\ ,\ k\in\mathbb{N}$ נתבונן בתת-הסדרה: $\{a_{2k}\}$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{2k}{2k+1}\cdot\cos[(2k-1)\pi]\right) = \lim_{k\to\infty}\left(1-\frac{2k}{2k+1}\right) = 1-1 = \underline{\underline{0}}$$

עמ' 8
מועד 10

שב, קיבלנו שני תתי-סדרות המתכנסות לגבולות שונים $(0,2)$

לכן, לפי משפט ל-a_n אין גבול.

ג. $a_n = 1 + 2(-1)^{n+1} + 3(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$

* עבור $n = 4k,\ k \in \mathbb{N}$:

$$a_{4k} = 1 + 2(-1)^{4k+1} + 3(-1)^{\frac{4k(4k-1)}{2}} = 1 - 2 + 3 = \underline{\underline{2}}$$

לכן:

$$\lim_{k\to\infty} a_{4k} = \underline{\underline{2}}.$$

* עבור $n = 4k-1,\ k \in \mathbb{N}$:

$$a_{4k-1} = 1 + 2(-1)^{4k-1+1} + 3(-1)^{\frac{(4k-1)(4k-2)}{2}}$$

$$= 1 + 2(-1)^{4k} + 3(-1)^{(4k-1)(2k-1)} = 1 + 2 - 3 = \underline{\underline{0}}$$

לכן,

$$\lim_{k\to\infty} a_{4k-1} = \underline{\underline{0}}$$

שב, קיבלנו שני תתי-סדרות של a_n עם גבולות שונים,

לכן, ל-a_n אין גבול!

8. א. נבדוק לפי קריטריון קושי את התכנסות הסדרה:

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\cos(k!)}{k(k+1)}$$

נראה כי לכל $\varepsilon > 0$ קיים n_0, כך שלכל $n \geq n_0$ ולכל $p \in \mathbb{N}$

כך ש:

$$|a_{n+p} - a_n| < \varepsilon$$

$$|a_{n+p} - a_n| = \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{\cos(k!)}{k(k+1)} \right| \underset{\substack{\downarrow \\ \text{הכללה של אי-שוויון המשולש}}}{\leq} \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{|\cos(k!)|}{k(k+1)} \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{1}{k(k+1)}$$

$$= \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+2)(n+3)} + \dots + \frac{1}{(n+p)(n+p+1)} = \left(\frac{1}{n+1} - \cancel{\frac{1}{n+2}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{n+2}} - \frac{1}{n+3}\right) + \dots$$

$$\dots + \left(\cancel{\frac{1}{n+p}} - \frac{1}{n+p+1}\right) = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+p+1} < \frac{1}{n+1} \underset{\substack{\downarrow \\ \text{דרוש}}}{\leq} \varepsilon$$

$$n > \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon} \Leftarrow 1 < n\varepsilon + \varepsilon$$

עמ' 9 מתוך 10

ניקח $n_0 = [\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}]+1$, אז לכל $n \geq n_0$ מתקיים

$|a_{n+p} - a_n| < \varepsilon$, לכן הסדרה הינה סדרת קושי ומתכנסת!

ב. $a_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{\ln(k)}$ $\quad n \geq 2$

נוכיח כי a_n אינה סדרת קושי.

$$|a_{n+p} - a_n| = \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{1}{\ln(k)} \right| = \left| \frac{1}{\ln(n+1)} + \frac{1}{\ln(n+2)} + \dots + \frac{1}{\ln(n+p)} \right|$$

$$\underset{n>2}{=} \frac{1}{\ln(n+1)} + \frac{1}{\ln(n+2)} + \dots + \frac{1}{\ln(n+p)} \geq \frac{p}{\ln(n+p)} > \frac{p}{n+p}$$

עבור $p=n$ נקבל:

$$|a_{2n} - a_n| \geq \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}$$

אם כך, קיים $\varepsilon>0$ $(\varepsilon = \frac{1}{2})$ וקיים $p=n$, כך שלכל n:

$$|a_{n+p} - a_n| \geq \varepsilon$$

לכן, a_n אינה סדרת קושי.

9. הוכח או הפרך.

א. אם $\lim_{n\to\infty} a_n = L$, ולכל n, $a_n \geq 0$ אז $\lim_{n\to\infty} \sqrt{a_n} = \sqrt{L}$.

<u>הוכחה</u>: נחלק לשני מקרים. עבור $L>0$:

ידוע כי לכל $\varepsilon>0$ קיים n_0 כך שלכל $n \geq n_0$ מתקיים: $|a_n - L| < \varepsilon$.

לכן בפרט עבור $\varepsilon' = \varepsilon \cdot \sqrt{L}$ קיים n_0 כך שלכל $n \geq n_0$:

$|a_n - L| < \varepsilon'$.

$$|\sqrt{a_n} - \sqrt{L}| \underset{\text{כפל בצמוד}}{=} \frac{|\sqrt{a_n} - \sqrt{L}| \cdot |\sqrt{a_n} + \sqrt{L}|}{\sqrt{a_n} + \sqrt{L}} = \frac{|a_n - L|}{\sqrt{a_n} + \sqrt{L}} < \frac{\varepsilon'}{\sqrt{L}} = \frac{\varepsilon\sqrt{L}}{\sqrt{L}} = \varepsilon$$

$$\Leftarrow \quad |\sqrt{a_n} - \sqrt{L}| < \varepsilon$$

עבור $L=0$: ידוע כי $\forall \varepsilon>0$, קיים n_0 כך שלכל $n \geq n_0$ $|a_n - 0| < \varepsilon$, לכן בפרט עבור $\varepsilon' = \varepsilon^2$ מתקיים $|a_n| < \varepsilon'$

$$|\sqrt{a_n} - \sqrt{0}| = |\sqrt{a_n}| < \sqrt{\varepsilon'} = \sqrt{\varepsilon^2} = \varepsilon$$

מ.ש.ל.

עמ' 10
מרוק 10

ב. אם $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ אזי $\lim_{n\to\infty} |a_n| = |L|$.

הוכחה:

ידוע כי לכל $\varepsilon > 0$ קיים n_0 כך שלכל $n \geq n_0$: $|a_n - L| < \varepsilon$

$$\big||a_n| - |L|\big| \leq |a_n - L| < \varepsilon$$

תרגול מס 2

מש"ל.

ג. אם $\lim_{n\to\infty} |a_n| = |L|$, אזי $\lim_{n\to\infty} a_n = L$.

דוגמא נגדית:

ניקח את $a_n = (-1)^n$. $|a_n| = |(-1)^n| = 1$

לכן $\lim_{n\to\infty} |a_n| = 1$ אלא a_n אינה מתכנסת,

לכן $\lim a_n$ בכלל אינו קיים!

ד. אם $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ ולכל n, $a_n \neq 0$ אזי:

$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = \infty$ או $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = -\infty$.

דוגמא נגדית:

ניקח את $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$. אזי $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

אלא: $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{(-1)^n}$ אינו קיים!

ה. אם $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$, אזי $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = 0$.

הוכחה:

נתון כי $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$, לכן, לפי הגדרה: $\forall M, \exists n_0, \forall n \geq n_0\ a_n > M$

ובפרט עבור $M = \frac{1}{\varepsilon}$: קיים N_ε כך שלכל $n \geq N_\varepsilon$: $a_n > \frac{1}{\varepsilon}$.

$$a_n > \frac{1}{\varepsilon} \iff -\varepsilon < 0 < \frac{1}{a_n} < \varepsilon \Rightarrow \left|\frac{1}{a_n} - 0\right| < \varepsilon.$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = 0.$$

עמ' 10
תרגיל 10

ב. אם $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$ אזי $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = |L|$.

<u>הוכחה:</u>

ידוע כי לכל $\varepsilon>0$ קיים n_0 כך שלכל $n\geq n_0$: $|a_n-L|<\varepsilon$

$$||a_n|-|L|| \leq |a_n-L| < \varepsilon$$

תרגיל מס' 2

מש"ל.

ג. אם $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = |L|$, אז $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$.

<u>דוגמה נגדית:</u>

ניקח את $a_n=(-1)^n$. $|a_n|=|(-1)^n|=1$

לכן $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = 1$ אבל a_n אינה מתכנסת,

לכן $\lim a_n$ בכלל אינו קיים!

ד. אם $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=0$ וגם לכל n, $a_n\neq 0$ אזי:

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{a_n}=\infty$ או $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{a_n}=-\infty$.

<u>דוגמה נגדית:</u>

ניקח את $a_n=\frac{(-1)^n}{n}$. אזי $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=0$.

אבל: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{(-1)^n}$ אינו קיים!

ה. אם $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\infty$, אזי $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{a_n}=0$.

<u>הוכחה:</u>

נתון כי $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\infty$, לכן, לפי הגדרה: $\forall M, \exists n_0, \forall n\geq n_0\ a_n>M$

ובפרט עבור $M=\frac{1}{\varepsilon}$: קיים N_ε כך שלכל $n\geq N_\varepsilon$: $a_n>\frac{1}{\varepsilon}$.

$$a_n>\frac{1}{\varepsilon} \iff -\varepsilon<0<\frac{1}{a_n}<\varepsilon \implies \left|\frac{1}{a_n}-0\right|<\varepsilon.$$

$$\Longleftarrow \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n}=0.$$

תרגיל מס' 7

ההגשה **בזוגות** עד : 10/12/04 (יום שישי) 12:00

גבול של פונקציה

1. הוכיחו לפי הגדרת הגבול של היינה :

א. $\lim_{x\to 0}\frac{2x+5}{x+2}=\frac{5}{2}$

ב. $\lim_{x\to 0}\frac{x^2-x-1}{x-1}=1$

ג. $\lim_{x\to 3}\frac{2x+1}{x^2+5}=\frac{1}{2}$

2. הוכיחו לפי הגדרת הגבול של קושי:

א. $\lim_{x\to 5}\frac{x^2-13x+40}{4x-20}=-\frac{3}{4}$

ב. $\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x+1}=1$

ג. $\lim_{x\to-\infty}\frac{2x+1}{1-x}=-2$

ד. $\lim_{x\to 0}\frac{2}{x^2+x^4}=\infty$

3. <u>חשבו</u> את הגבולות הבאים :

א. $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+2x+1}{3x^2+x-4}$

ב. $\lim_{x\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{x}}{x}$

ג. $\lim_{x\to\infty}\frac{x+\cos x}{x+1}$

ד. $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-2x}{x^3-x-6}$

ה. $\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{2x^2+3}}{4x+2}$

ו. $\lim_{x\to 0}\frac{\left(1+x^2\right)^{\frac{1}{3}}-1}{x^2}$

ז. $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+2x+1}{3x^2+x-4}$

ח. $\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x}}{\sqrt{x^3+x}-x}$

ט. $\lim_{x\to\alpha}\frac{\cos x-\cos\alpha}{x-\alpha}$

י. $\lim_{x\to 0}\frac{\tan 2x}{\sin 5x}$

4. הראו כי הגבולות הבאים אינם קיימים :

א. $\lim_{x\to\infty}x\sin x$

ב. $\lim_{x\to\infty}\cos x$

ג. $\lim_{x\to 2}g(x)$, $g(x)=\begin{cases}\frac{|x-2|}{x-2} & x\neq 2\\ 0 & x=2\end{cases}$

5. הוכח או הפרך:

א. אם $\lim_{x\to x_0}f(x)=\infty$ ו- $g(x)>1$ לכל x, אז $\lim_{x\to x_0}f(x)\cdot g(x)=\infty$.

ב. אם $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=1$, אז $\lim_{x\to\infty}\left(f(x)-x\right)=0$

גבולות חד-צדדיים ורציפות

6. חשבו גבולות חד-צדדיים, וקבעו האם קיים הגבול:

א. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{1}{1-x^3}$ ג. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{|x|}$

ב. $\lim\limits_{x\to 1}3^{\frac{1}{x-1}}$ ד. $\lim\limits_{x\to 2}f(x)$, $f(x)=\begin{cases}x^2-3 & x\ge 2\\ \frac{x}{2} & x<2\end{cases}$

7. עבור אילו ערכים של a קיים הגבול של $f(x)=\begin{cases}\frac{\sin 3x}{x} & x>0\\ \frac{x+5}{2x+a} & x<0\end{cases}$

בנק' $x=0$?

8. בדקו היכן הפונקציות הבאות רציפות. בכל מקרה של אי-רציפות, ציינו מאיזה סוג היא:

א. $f(x)=\frac{x-3}{(x+2)(x-1)}$ ג. $f(x)=\frac{1}{\sin x}$

ב. $f(x)=\begin{cases}x & |x|\le 1\\ 1 & |x|>1\end{cases}$ ד. $f(x)=[x]+[-x]$

9. א. תהי $f(x)$ פונקציה רציפה בקטע (a,b) ותהיינה $x_1,\dots,x_n\in(a,b)$
כאשר $n>1$ הוכיחו שקיימת נק' $c\in(a,b)$, שעבורה

$$f(c)=\frac{1}{n}\left(f(x_1)+\dots+f(x_n)\right)$$

ב. תהי $f(x)$ פונקציה רציפה בקטע (a,b) האם לכל $c\in(a,b)$ ניתן למצוא
נקודות $x_1,\dots,x_n\in(a,b)$ שונות זו מזו ($n>1$) כך ש-

$$f(c)=\frac{1}{n}\left(f(x_1)+\dots+f(x_n)\right)\ ?$$

10. תהי $f(x)$ פונקציה רציפה, האם

א. $g(x)=\frac{f(x)}{1+f(x)}$ רציפה ?

ב. $g(x)=\frac{f(x)}{1+(f(x))^2}$ רציפה ?

11. הראו כי למשוואה $x^7-3x=1$ קיים פתרון ב- $[1,2]$.

12. א. הוכיחו (לפי הגדרה) כי $f(x)=\sqrt{x}$ רציפה במ"ש ב- $[1,\infty)$

ב. הוכיחו כי $f(x)=\sqrt{x}$ רציפה במ"ש ב- $(0,\infty)$

ג. הוכיחו כי $f(x)=\frac{1}{x}$ אינה רציפה במ"ש ב- $(0,\infty)$

חלק ג'

7 עמודים.

פתרון תרגיל מס' 7

גבול של פונקציה.

1. הוכיחו לפי הגדרת הגבול של היינה:

א. $$\lim_{x\to 0}\frac{2x+5}{x+2}=\frac{5}{2}$$

תהי $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה כלשהי השואפת ל- 0. נתבונן ב- $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n)=\lim_{n\to\infty}\frac{2x_n+5}{x_n+5}=\frac{2\lim\limits_{n\to\infty}x_n+5}{\lim\limits_{n\to\infty}x_n+2}=\frac{2\cdot 0+5}{0+2}=\frac{5}{2}$$

אריתמטיקה של גבולות

ב. $$\lim_{x\to 0}\frac{x^2-x-1}{x-1}=1$$

תהי $\{x_n\}$ סדרה כלשהי השואפת ל- 0. נתבונן ב- $\{f(x_n)\}$:

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n)=\lim_{n\to\infty}\frac{x_n^2-x_n-1}{x_n-1}=\frac{(\lim\limits_{n\to\infty}x_n)^2-\lim\limits_{n\to\infty}(x_n)-1}{\lim\limits_{n\to\infty}x_n-1}=\frac{0^2-0-1}{0-1}=$$

$$=1$$

קיבלנו ש: $f(x)\to 1$ כאשר $x\to 0$, לפי הגדרת היינה.

ג. $$\lim_{x\to 3}\frac{2x+1}{x^2+5}=\frac{1}{2}$$

תהי $\{x_n\}\xrightarrow[n\to\infty]{}3$. נתבונן ב- $\{f(x_n)\}$:

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n)=\lim_{n\to\infty}\frac{2x_n+1}{x_n^2+5}=\frac{2\cdot\lim\limits_{n\to\infty}x_n+1}{(\lim\limits_{n\to\infty}x_n)^2+5}=\frac{2\cdot 3+1}{3^2+5}=\frac{1}{2}$$

2. הוכיחו לפי הגדרת הגבול של קושי:

א. $$\lim_{x\to 5}\frac{x^2-13x+40}{4x-20}=-\frac{3}{4}$$

יהי $\varepsilon>0$, נחפש $\delta>0$ כך שלכל x יתקיים:

$$|x-5|<\delta \Rightarrow \left|f(x)+\frac{3}{4}\right|<\varepsilon$$

$$|f(x)+\frac{3}{4}| = |\frac{x^2-13x+40}{4(x-5)} + \frac{3}{4}| = |\frac{(x-8)\cancel{(x-5)}}{4\cancel{(x-5)}} + \frac{3}{4}|$$

$$= |\frac{x-5}{4}| \underset{\text{דרישה}}{<} \varepsilon$$

נבחר $\delta = 4\varepsilon$, כלומר:

$$|x-5| < \delta \Rightarrow |x-5| < 4\varepsilon \Rightarrow \frac{|x-5|}{4} < \varepsilon$$

■

ג. $\lim_{x\to\infty} \frac{x}{x+1} = 1$

יהי $\varepsilon>0$, נחפש $M>0$, כך שלכל x יתקיים:

$$x > M \Rightarrow |f(x)-1| < \varepsilon$$

$$|f(x)-1| = |\frac{x}{x+1} - 1| = |\frac{x-x-1}{x+1}| = \frac{1}{|x+1|} = (*)$$

מה חישובים:

$$|x+1| > M+1 \Leftarrow x+1 > M+1 \Leftarrow x > M$$

$$\frac{1}{|x+1|} < \frac{1}{M+1} \Leftarrow$$ (כי $x+1$ מס' חיובי!)

נמשיך:

$$(*) \le \frac{1}{M+1} \underset{\text{דרישה}}{<} \varepsilon$$

$$M > \frac{1}{\varepsilon} - 1 \Leftarrow M+1 > \frac{1}{\varepsilon} \Leftarrow$$

אז ניקח $M = [\frac{1}{\varepsilon}] + 1$ (כדי ש-M יהיה בטוח > 0)

יתקיים ש: $|f(x)-1| < \varepsilon$ ■

ה. $\lim_{x\to-\infty} \frac{2x+1}{1-x} = -2$

יהי $\varepsilon>0$, נחפש $M<0$, כך שלכל $x<M$ יתקיים $|f(x)+2|<\varepsilon$.

$$|f(x)+2| = |\frac{2x+1}{1-x} + 2| = \frac{3}{|1-x|} \le \frac{3}{1-x} \le \frac{3}{-x} \underset{\text{דרישה}}{<} \varepsilon$$

לכל $a\in\mathbb{R}$: $a \le |a|$

נבחר, $M = [-\frac{3}{\varepsilon}]$ ואז לכל $x<M$ יתקיים ש $|f(x)+2| < \varepsilon$.

3

ד. $\lim_{x\to 0} \frac{2}{x^2+x^4} = \infty$

צ"ל כי לכל $M>0$ קיימת $\delta>0$ כך שלכל x:

$$|x-0|<\delta \Rightarrow f(x)>M$$

נגביל את δ להיות $\delta\le 1$:

אז $|x|<\delta\le 1 \Rightarrow x^4\le x^2 \Rightarrow x^4+x^2\le 2x^2$

$$\Rightarrow \frac{2}{x^4+x^2} \ge \frac{\cancel{2}}{\cancel{2}x^2} = \frac{1}{x^2}$$

לכן

$$f(x)=\frac{2}{x^4+x^2}\ge \frac{1}{x^2} \underset{\text{דרושה}}{>} M$$

נבחר $\delta \le \frac{1}{\sqrt{M}}$ ונקבל ש: $f(x)>M$.

3. חשבו את הגבולות הבאים:

א. $$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2+2x+1}{3x^2+x-4} = \lim_{x\to\infty} \frac{\cancel{x^2}\left(1+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}{\cancel{x^2}\left(3+\frac{1}{x}-\frac{4}{x^2}\right)} = \lim_{x\to\infty} \frac{1+\overset{\to 0}{\frac{2}{x}}+\overset{\to 0}{\frac{1}{x^2}}}{3+\underset{\to 0}{\frac{1}{x}}-\underset{\to 0}{\frac{4}{x^2}}}$$

$$= \frac{1+0+0}{3+0-0} = \frac{1}{3}$$

ב. $$\lim_{x\to\infty} \frac{\sin\frac{1}{x}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x}\cdot\sin\frac{1}{x} = 0$$

כי $|\sin x|\le 1$

ו- $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$.

ג. $$\lim_{x\to\infty} \frac{x+\cos x}{x+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{\cancel{x}\left(1+\frac{\cos x}{x}\right)}{\cancel{x}\left(1+\frac{1}{x}\right)} = \lim_{x\to\infty} \frac{1+\overset{\to 0}{\frac{1}{x}\cdot\cos x}}{1+\underset{\to 0}{\frac{1}{x}}}$$

$\cos x$ חסומה, ו- $\frac{1}{x}\to 0$ כאשר $x\to\infty$ לכן $\frac{1}{x}\cos x\to 0$

וסה"כ: $\lim_{x\to\infty}\frac{x+\cos x}{x+1} = \frac{1+0}{1+0} = 1$

ד. $$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-2x}{x^3-x-6} = \lim_{x\to 2} \frac{x\cancel{(x-2)}}{(x^2+2x+3)\cancel{(x-2)}} = \lim_{x\to 2}\frac{x}{x^2+2x+3} =$$

אפשר להציב (למה?)

$$= \frac{2}{2^2+2\cdot 2+3} = \frac{2}{11}$$

ה. $$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{2x^2+3}}{4x+2} \underset{\downarrow}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{2+\frac{3}{x^2}}}{4+\frac{2}{x}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

נחלק מונה ומכנה ב-x.

ו. $$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x^2)^{\frac{1}{3}}-1}{x^2} \underset{\downarrow}{=} \lim_{x\to 0}\frac{(1+x^2)-1}{x^2\left[(1+x^2)^{\frac{2}{3}}+(1+x^2)^{\frac{1}{3}}\cdot 1+1^2\right]} =$$

$$\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b} = \frac{a-b}{(\sqrt[3]{a})^2+\sqrt[3]{a}\sqrt[3]{b}+(\sqrt[3]{b})^2}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{\left[(1+x^2)^{\frac{2}{3}}+(1+x^2)^{\frac{1}{3}}+1\right]} \underset{\downarrow}{=} \frac{1}{1+1+1} = \frac{1}{3}$$

ניתן להציב $x=0$

ד.

נפלה טעות בהדפסה, אמור היה להיות:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-3x+2}{x^4-4x+3} \underset{\downarrow}{=} \lim_{x\to 1}\frac{\cancel{(x-1)}(x^2+x-2)}{\cancel{(x-1)}(x^3+x^2+x-3)} \overset{(*)}{=} \lim_{x\to 1}\frac{(x^2+x-2)}{(x^3+x^2+x-3)}$$

מונה ומכנה מתאפסים עבור $x=1$, לכן נפרק לגורמים.

חישובי עזר:

$$\begin{array}{l} (x^3-3x+2) : (x-1) = x^2+x-2 \\ -(x^3-x^2) \\ \quad x^2-3x+2 \\ -(x^2-x) \\ \quad -2x+2 \\ \quad -2x+2 \\ \quad = \; = \end{array} \qquad \begin{array}{l} (x^4-4x+3) : (x-1) = x^3+x^2+x-3 \\ -(x^4-x^3) \\ \quad x^3-4x+3 \\ -(x^3-x^2) \\ \quad x^2-4x+3 \\ \quad x^2-x \\ \quad -3x+3 \\ \quad -3x+3 \\ \quad = \; = \end{array}$$

קיבלנו שעדיין מונה ומכנה מתאפסים ב- $x=1$, לכן, נמשיך בפירוק:

$$\begin{array}{l} (x^2+x-2) : (x-1) = x+2 \\ x^2-x \\ \quad 2x-2 \\ \quad 2x-2 \\ \quad = \; = \end{array} \qquad \begin{array}{l} (x^3+x^2+x-3) : (x-1) = x^2+2x+3 \\ -(x^3-x^2) \\ \quad 2x^2+x-3 \\ -(2x^2-2x) \\ \quad 3x-3 \end{array}$$

$$(*) = \lim_{x\to 1}\frac{\cancel{(x-1)}(x+2)}{\cancel{(x-1)}(x^2+2x+3)} \underset{\downarrow}{=} \frac{1+2}{1^2+2\cdot 1+3} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

כעת ניתן סוף סוף להציב.

5

ח.
$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x}}{\sqrt{x^3+x}-x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\cancel{x}\left(\overbrace{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}^{\to 1}+\sqrt{\frac{1}{x}}\right)^{\to 0}}{\cancel{x}\left(\underbrace{\sqrt{x+\frac{1}{x}}}_{\infty}-1\right)}$$

$$=\frac{1+0}{\infty-1}=\underline{\underline{0}}$$

ט.
$$\lim_{x\to\alpha}\frac{\cos x-\cos\alpha}{x-\alpha}\underset{\text{זהות טריג'}}{=}\lim_{x\to\alpha}\frac{-2\sin\frac{x-\alpha}{2}\sin\frac{x+\alpha}{2}}{x-\alpha}=$$

$$=\lim_{x\to\alpha}-\frac{\sin\frac{x-\alpha}{2}}{\left(\frac{x-\alpha}{2}\right)}\cdot\sin\frac{x+\alpha}{2}=-1\cdot\sin\frac{\alpha+\alpha}{2}=\underline{\underline{-\sin\alpha}}$$

כי כאשר $x\to\alpha \iff \frac{x-\alpha}{2}\to 0$

ולכן $\frac{\sin\left(\frac{x-\alpha}{2}\right)}{\frac{x-\alpha}{2}}\to 1$

י.
$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}2x}{\sin 5x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin 2x}{\cos 2x}}{\sin 5x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin 2x}{2x}\cdot\frac{2\cancel{x}}{\cos 2x}}{\frac{\sin 5x}{5x}\cdot 5\cancel{x}}$$

$$=\frac{1\cdot\frac{2}{1}}{1\cdot 5}=\underline{\underline{\frac{2}{5}}}$$

כי: $\frac{\sin 2x}{2x},\frac{\sin 5x}{5x}\to 1$ כאשר $x\to 0$.

ו- $\cos 2x\to 1$ כי $2x\to 0$!

4. א. הראו כי הגבולות הבאים אינם קיימים:

$$\lim_{x\to\infty}x\cdot\sin x.$$

נשתמש בהגדרת הגבול של היינה, ונראה שתי סדרות

$\{x_n\}$, $\{y_n\}$ השואפות ל- ∞, אך $\lim_{n\to\infty}f(x_n)\neq\lim_{n\to\infty}f(y_n)$

תהיינה $x_n=2\pi n$, $y_n=2\pi n+\frac{\pi}{2}$, מתקיים $x_n,y_n\xrightarrow[n\to\infty]{}\infty$.

אולם:

$$\lim_{n\to\infty}f(x_n)=\lim_{n\to\infty}(2\pi n)\cdot\sin(2\pi n)=\lim_{n\to\infty}(2\pi n)\cdot 0=\lim_{n\to\infty}0=0$$

$$\neq$$

$$\lim_{n\to\infty}f(y_n)=\lim_{n\to\infty}\left(2\pi n+\frac{\pi}{2}\right)\sin\left(2\pi n+\frac{\pi}{2}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(2\pi n+\frac{\pi}{2}\right)\cdot 1=\infty$$

לפי הגדרת הגבול של היינה, קיבלנו כי ל- $f(x)$ אין גבול כאשר $x\to\infty$

6

ב. $\lim_{x\to\infty} \cos x$.

בדומה לסעיף הקודם, נבחר $x_n = 2\pi n$, $y_n = 2\pi n + \pi$

נקבל

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} \cos(2\pi n) = \lim_{n\to\infty} 1 = 1$$

$$\lim_{n\to\infty} f(y_n) = \lim_{n\to\infty} \cos(2\pi n + \pi) = \lim_{n\to\infty} (-1) = -1$$

קיבלנו, שלפי הגדרת הגבול של היינה, אין ל- $f(x)=\cos x$ גבול כאשר $x\to\infty$.

אגב, ניתן היה לקחת בדיוק את אותן הסדרות מהסעיף הקודם.

ג. $\lim_{x\to 2} g(x)$,
$$g(x)=\begin{cases}\frac{|x-2|}{x-2} & x\neq 2\\ 0 & x=2\end{cases}$$

נבחר $x_n = 2-\frac{1}{n}$, $y_n = 2+\frac{1}{n}$

מתקיים ש: $x_n, y_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 2$.

אז:

$$\lim_{n\to\infty} g(x_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{|2-\frac{1}{n}-2|}{2-\frac{1}{n}-2} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}}{-\frac{1}{n}} = -1$$

$$\lim_{n\to\infty} g(y_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{|2+\frac{1}{n}-2|}{2+\frac{1}{n}-2} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = 1$$

שוב, לפי הגדרת הגבול של היינה ל- $g(x)$ אין גבול ב- $x=2$!

הוכח את הפרק:

5. א. אם $\lim_{x\to x_0} f(x)=\infty$ ו- $g(x)>1$ לכל x, אז $\lim_{x\to x_0} f(x)\cdot g(x)=\infty$.

הוכחה:

מהנתון ש: $\lim_{x\to x_0} f(x)=\infty$, נובע שלכל $M>0$ קיים $\delta>0$ כך ש: $|x-x_0|<\delta \Rightarrow f(x)>M$

ובנתון ש: $f(x)\cdot g(x) > f(x)\cdot 1 > M$

לכן, מצאנו שלכל $M>0$ קיים $\delta>0$ כך ש:

$$|x-x_0|<\delta \Rightarrow f(x)\cdot g(x) > M$$

לכן: $\lim_{x\to x_0} f(x)\cdot g(x) = \infty$

ז

2. אם $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$, אז $\lim_{x\to\infty}(f(x)-x) = 0$

דוגמה נגדית:

יהי $f(x) = x+1$, אזי מתקיים ש:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x+1}{x} = 1$$

אולם,

$$\lim_{x\to\infty} (f(x)-x) = \lim_{x\to\infty} (x+1-x) = \lim_{x\to\infty} 1 = 1 \neq 0$$

מכאן שהטענה שגויה. ∇

פתרון תרגיל מס' 7
חלק ב'

גבולות חד-צדדיים ורציפות.

חשבו גבולות חד-צדדיים וקבעו האם קיים הגבול:

6. א. $\lim_{x\to 1} \frac{1}{1-x^3}$.

נחשב $\lim_{x\to 1^+} \frac{1}{1-x^3}$: $x\to 1^+ \Rightarrow x^3 \to 1^+ \Rightarrow$

$1-x^3 \to 0^- \Rightarrow \frac{1}{1-x^3} \to -\infty$.

נחשב: $\lim_{x\to 1^-} \frac{1}{1-x^3}$: $x\to 1^- \Rightarrow x^3 \to 1^- \Rightarrow$

$1-x^3 \to 0^+ \Rightarrow \frac{1}{1-x^3} \to \infty$.

קיבלנו ש: $\lim_{x\to 1^+} f(x) \neq \lim_{x\to 1^-} f(x)$ לכן הגבול לא קיים ב- $x=1$.

ב. $\lim_{x\to 1} 3^{\frac{1}{x-1}}$

$\lim_{x\to 1^+} 3^{\frac{1}{x-1}}$: $x\to 1^+ \Rightarrow x-1\to 0^+ \Rightarrow \frac{1}{x-1}\to\infty$

$\Rightarrow 3^{\frac{1}{x-1}} \to \infty$.

$\lim_{x\to 1^-} 3^{\frac{1}{x-1}}$: $x\to 1^- \Rightarrow x-1\to 0^- \Rightarrow \frac{1}{x-1}\to -\infty$

$\Rightarrow 3^{\frac{1}{x-1}} \to 0$.

קיבלנו ש: $\lim_{x\to 1^-} 3^{\frac{1}{x-1}} = 0 \neq \lim_{x\to 1^+} 3^{\frac{1}{x-1}} = \infty$, לכן הגבול לא קיים ב- $x=1$.

ג. $\lim_{x\to 0} \frac{x}{|x|}$.

$\lim_{x\to 0^+} \frac{x}{|x|} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\cancel{x}}{\cancel{x}} = \lim_{x\to 0^+} 1 = 1$

$|x| = x$

$x > 0$

$\neq$

$\lim_{x\to 0^-} \frac{x}{|x|} = \lim_{x\to 0^-} \frac{x}{-x} = \lim_{x\to 0^-}(-1) = -1$

$x<0 \Rightarrow |x| = -x$

שוב, לא קיים גבול ב- $x=0$.

ד. $f(x)=\begin{cases} x^2-3 & x\geq 2 \\ \frac{x}{2} & x<2 \end{cases}$; $\lim_{x\to 2} f(x)$

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) \underset{x\geq 2}{=} \lim_{x\to 2^+} x^2-3 \underset{\text{ניתן להציב}}{=} 2^2-3 = \underline{1}$$

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) \underset{x<2}{=} \lim_{x\to 2^-} \frac{x}{2} \underset{\text{ניתן להציב}}{=} \frac{2}{2} = \underline{1}$$

קיבלנו ש: $\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^-} f(x)$

לכן, לפי משפט: $\lim_{x\to 1} f(x) = \underline{1}$.

7. עבור אילו ערכים של a קיים הגבול של:

$$f(x)=\begin{cases} \frac{\sin 3x}{x} & x>0 \\ \frac{x+5}{2x+a} & x<0 \end{cases}$$

בנק' $x=0$:

ל-$f(x)$ יש גבול ב- $x=0$ אמ"מ קיימים שני הגבולות החד צדדיים והם שווים.

לכן נחשב $\lim_{x\to 0^+} f(x)$:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) \underset{x>0}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin 3x}{x} \underset{\text{הכפלנו וחילקנו ב- 3.}}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin 3x}{3x}\cdot 3 = 1\cdot 3 = \underline{\underline{3}}$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) \underset{x<0}{=} \lim_{x\to 0^-} \frac{x+5}{2x+a}$$

נפצל לשני מקרים:

$a=0$: $\lim_{x\to 0^-} \frac{x+5}{2x} = \lim_{x\to 0^-} \left(\frac{1}{2}+\frac{5}{2x}\right) = -\infty$

אבל $3 \neq -\infty$, לכן עבור $a=0$ לא קיים גבול ב- $x=0$.

$a\neq 0$: $\lim_{x\to 0^-} \frac{x+5}{2x+a} \underset{\text{ניתן להציב}}{=} \frac{0+5}{20+a} = \frac{5}{a}$

מתי $\frac{5}{a}=3$?

כלומר, $a=\frac{5}{3}$. לכן עבור $a=\frac{5}{3}$ $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = 3$

ל- $f(x)$ יש גבול ב- $x=0$! $\lim_{x\to 0} f(x) = 3$.

8. בדקו היכן הפונקציות הבאות רציפות, ובמקרה של אי-רציפות ציינו מאיזה סוג היא.

א. $f(x)=\dfrac{x-3}{(x+2)(x-1)}$

$f(x)$ רציפה בכל הנק' שבהן $(x+2)(x-1)\neq 0$ כפונק' אלמנטרית.

כלומר, $f(x)$ רציפה בכל $x\in\mathbb{R}$, כך ש: $x\neq 1,\ x\neq -2$.

עבור $x=1$: נבדוק גבולות חד-צדדיים:

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-}\frac{x-3}{(x+2)(x-1)} = +\infty$$

כי $x-1\to 0^-$ וגם! $x-3<0$

קיבלנו כי אחד הגבולות החד-צדדיים לא קיים במובן הצר לכן:

$x=1$ נק' אי-רציפות מסוג II (עיקרית). (אין צורך לבדוק את הגבול השני)

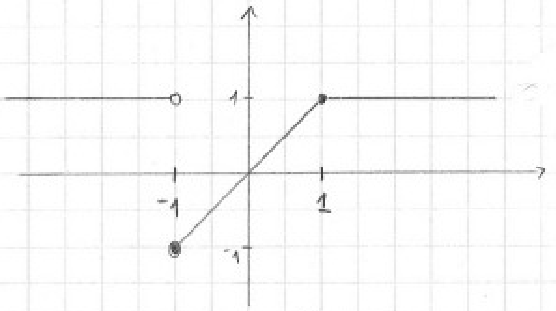
עבור $x=-2$:

$$\lim_{x\to -2^+} f(x)=\lim_{x\to -2^+}\frac{(x-3)}{(x+2)(x-1)} \underset{\downarrow}{=} +\infty$$

$x+2\to 0^+,\ x-3\to -5^+$
$x-1\to -3^+$

ושוב, הגבול מימין לא קיים בנק' $x=-2$ במובן הצר, לכן $x=-2$ נק' אי-רציפות מסוג II.

ב. $f(x)=\begin{cases} x & |x|\le 1 \\ 1 & |x|>1\end{cases}$



נתבונן בגרף הפונקציה:

$f(x)$ רציפה בנק' $x\neq\pm 1$ כפונקציה אלמנטרית.

עבור $x=1$: נבדוק גבולות חד צדדיים:

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) \underset{|x|>1}{=} \lim_{x\to 1^+} 1 = 1 = f(1)$$
$$\parallel$$
$$\lim_{x\to 1^-} f(x) \underset{|x|<1}{=} \lim_{x\to 1^-} x = 1 = f(1)$$

לכן $f(x)$ רציפה ב- $x=1$.

עבור $x=-1$:

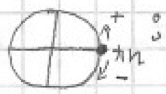
$$\lim_{x\to -1^+} f(x) \underset{|x|<1}{=} \lim_{x\to -1^+} x = -1 = f(-1)$$
$$\neq$$
$$\lim_{x\to -1^-} f(x) \underset{|x|>1}{=} \lim_{x\to -1^-} 1 = 1 \neq f(-1)$$

המשך: קיבלנו כי שני הגבולות קיימים במובן הרחב, אך שונים זה מזה, לכן $x=-1$ נק' אי-רציפות מסוג I.

ה. $f(x)=\frac{1}{\sin x}$

עבור $x\in\mathbb{R}$ כך ש: $x\neq \pi n$ $f(x)$ רציפה כהרכבה כונק' אלמנטריות. עבור $x=\pi n$ נבחין בשני מקרים:

1. $x=\pi n$, n זוגי:

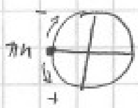


$$\lim_{x\to \pi n^+}\frac{1}{\sin x}=+\infty$$

$\sin \pi n \to 0^+$

קיבלנו שאחד הגבולות החד-צדדיים לא קיים במובן הצר, לכן $x=\pi n$ כאשר n זוגי נק' אי-רציפות מסוג II.

2. $x=\pi n$, n אי-זוגי:



$$\lim_{x\to \pi n^-}\frac{1}{\sin x}=+\infty$$

שוב, הגבול לא קיים במובן הצר לכן $x=\pi n$, כאשר n אי-זוגי נק' אי-רציפות מסוג II.

ובסה"כ $x=\pi n$ (n כלשהו) נק' אי-רציפות מסוג II.

ו. $f(x)=[x]+[-x]$

עבור x_0 שאינו מס' שלם ניתן לייצגו כך $x_0=n+q$ כאשר $n\in\mathbb{Z}$, $0\le q<1$. ו- $-x_0=-n-q$.

ו- $[x_0]=n$, $[-x_0]=-n-1$

לכן עבור x_0 כזה: $f(x_0)=n+(-n-1)=-1$.

ומתקיים: $\lim_{x\to x_0^+}f(x)=\lim_{x\to x_0^-}f(x)=f(x_0)=-1$

בנק' $x=n$, $n\in\mathbb{Z}$ נבדוק גבולות חד-צדדיים:

$$\lim_{x\to n^+}f(x)=n+(-n-1)=-1\neq f(n)=n+(-n)=0$$

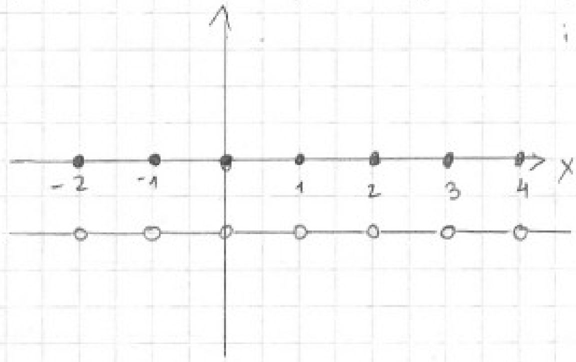
$$\lim_{x\to n^-}f(x)=(n-1)+(-n)=-1\neq f(n)=0$$

קיבלנו שהגבולות החד-צדדיים קיימים ושווים, אך שונים

המשך:

מגדר הפונקציה בנק' $x=n$ לכן נק' אי-רציפות סליקה.

תאור גרפי:



תהי $f(x)$ פונק' רציפה:

א. האם $g(x)=\frac{f(x)}{1+f(x)}$ רציפה?

דוגמה נגדית: נבחר $f(x)=-1$, $f(x)$ רציפה כפונק' קבועה.

אם $g(x)=\frac{f(x)}{1+f(x)}$ אינה מוגדרת בכל נק',

לכן אינה רציפה.

ב. האם $g(x)=\frac{f(x)}{1+(f(x))^2}$ רציפה?

כן! $1+(f(x))^2$ חיובי ממש ולא מתאפס לכל $x\in\mathbb{R}$.

לכן $g(x)=\frac{f(x)}{1+(f(x))^2}$ מוגדרת על כל הישר, ומתקיים:

$$\lim_{x\to x_0} g(x)=\frac{\lim_{x\to x_0} f(x)}{1+\left(\lim_{x\to x_0} f(x)\right)^2}\underset{\downarrow}{=}\frac{f(x_0)}{1+f(x_0)^2}=g(x_0)$$

רציפה $f(x)$

לכן $g(x)$ רציפה לכל $x\in\mathbb{R}$.

א. תהי $f(x)$ פונק' רציפה בקטע (a,b) ותהיינה

$x_1,\dots,x_n\in(a,b)$ כאשר $n>1$. הוכח שקיימת נק' $c\in(a,b)$

שמקיימת: $f(c)=\frac{1}{n}\left(f(x_1)+\dots+f(x_n)\right)$

הוכחה:

הקבוצה $\{f(x_1),\dots,f(x_n)\}$ סופית ולכן יש לה מינימום,

נסמנו ב- $f(x_i)$, ומקסימום שנסמנו ב- $f(x_j)$. נניח בה"כ כי:

$x_j<x_i$. מתקיים כי:

$$\frac{1}{n}\cdot n\cdot f(x_i)\le\frac{1}{n}\left(f(x_1)+\dots+f(x_n)\right)\le\frac{1}{n}\cdot n\cdot f(x_j)$$

כלומר: $f(x_i) \le \frac{1}{n}(f(x_1)+\ldots+f(x_n)) \le f(x_j)$ 6

$f(x)$ רציפה בקטע (a,b) לכן גם רציפה ב- $[x_j, x_i]$,

לכן, לפי משפט ערך הביניים של קושי קיימת נק'

$c \in [x_j, x_i] \Rightarrow c \in (a,b)$ שבה $f(c)=\frac{1}{n}(f(x_1)+\ldots+f(x_n))$.

$\boxtimes$

2. תהי $f(x)$ פונקציה רציפה בקטע (a,b). הוכח/הפרך: לכל $c\in(a,b)$

ניתן למצוא נק' $x_1, x_2, \ldots, x_n \in (a,b)$ שונות זו מזו ($n \ge 1$) כך ש:

$f(c) = \frac{1}{n}(f(x_1)+\ldots+f(x_n))$.

פתרון: התשובה היא לא!, ניקח למשל את $f(x)=x^2$,

הרציפה בקטע $(-1,1)$, אז בנק' $c=0$: $f(c)=f(0)=0$,

אז אי-אפשר למצוא נק' שונות $x_1 \ldots x_n$ כך ש:

$$\frac{1}{n}(f(x_1)+\ldots+f(x_n)) = \frac{1}{n}(x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2) = 0$$

11. הראו כי למשוואה $x^7-3x=1$ קיים פתרון

ב- $[1,2]$.

<u>פתרון:</u> נסמן: $f(x)=x^7-3x-1$.

למשוואה $x^7-3x=1$ יש פתרון אמ"מ ל-$f(x)$ יש

שורש בקטע הסגור $[1,2]$.

נבדוק את ערכי $f(x)$ בקצוות הקטע:

$$f(1) = 1^7 - 3\cdot 1 - 1 = -3 < 0$$
$$f(2) = 2^7 - 3\cdot 2 - 1 = 121 > 0$$

כלומר, הפונק' הרציפה בקטע הסגור $[1,2]$, $f(x)$ מקבלת

ערכים מנוגדים בקצוות הקטע, לכן 8 תנאי משפט

ערך הביניים מתקיימים, לכן ל-$f(x)$ יש שורש ב- $[1,2]$,

כלומר קיים $c\in[1,2]$ כך ש: $f(c)=0$

12. לא בחומר!

תרגיל מס' 8

ההגשה **בזוגות** עד : 16:00 02/01/05

1. חשבו לפי ההגדרה את הנגזרת של הפונקציה בנקודה הנתונה:

א. $f(x)=x^3 \quad , \quad x=2$

ב. $f(x)=\frac{1}{x} \quad , \quad x\neq 0$

ג. $f(x)=2x^3+3x-1 \quad , \quad x=a$

ד. $f(x)=\sqrt{x} \quad , \quad x\neq 0$

2. חשבו לפי חוקי גזירה את הנגזרות של הפונקציות הבאות:

א. $y=\frac{x^4-x^2+2}{x\sqrt{x}}$

ב. $y=\frac{1}{\sqrt{3x^2-1}}$

ג. $y=\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{10}$

ד. $y=\sqrt[4]{\frac{x-1}{x+2}}$

ה. $y=\sqrt[3]{x+\sqrt{x}}$

ו. $y=3\sin x\cos^2 x+\sin^3 x$

ז. $y=\arcsin\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

ח. $y=\ln(\arcsin x)$

ט. $y=e^{\cos^2 x}$

י. $y=\ln\frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}-x}$

יא. $y=2^{\arcsin 3x}$

3. גזירה לוגריתמית: חשבו את הנגזרות של הפונקציות הבאות:

א. $y=x^m \quad , \quad m$ ממשי .

ב. $y=a^x \quad , \quad a>0$

ג. $y=x^{\ln x}$

ד. $y=x^{x^x}$

4. חשבו את הנגזרות החד צדדיות בנק׳ הנתונה:

א. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x-1}{1+e^{\frac{1}{x-1}}} & , \quad x\neq 1\\ 0 & , \quad x=1\end{cases} \qquad , \quad x=1$

ב. $f(x)=\begin{cases}\sin x & , \quad x\geq 0\\ x^2 & , \quad x<0\end{cases} \qquad , \quad x=0$

5. עבור אילו ערכים של a ו- b הפונקציה $f(x)=\begin{cases}x^2 & , \quad x\geq x_0\\ ax+b & , \quad x<x_0\end{cases}$ תהיה רציפה וגזירה בנק׳ x_0 ?

6. הוכח או הפרך: אם $f(x)$ גזירה ב- $x=0$, אזי $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(f\left(\frac{1}{n}\right)-f(0)\right)=f'(0)$.

7. חשבו את : $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-2f(x)+f(x-h)}{h}$

8. נתונה $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x^3}{x} & , \quad x\neq 0\\ 0 & , \quad x=0\end{cases}$ חשבו את $f'(x)$ לכל x.

9.

א. נתון $g(x)=x^2+3x$, מצאו את משוואת הישר המשיק לגרף בנק׳ $x=2$.

ב. מצאו נק׳ שבה המשיק ל- $g(x)=x^2-7x+3$ מקביל לישר $5x+y-3=0$.

10.

א. בהסתמך על העובדה שהפונקציה ההפוכה ל- $y=e^x$ היא $x=\ln y$, ועל כך ש- $(\ln y)'=\frac{1}{y}$. הוכיחו כי $(e^x)'=e^x$.

ב. בהסתמך על העובדה שהפונקציה ההפוכה ל- $y=\arctan x$ היא $x=\tan y$, ועל כך ש- $(\tan y)'=\frac{1}{\cos^2 y}$ חשבו את $(\arctan x)'$.

בהצלחה!!!

פתרון תרגיל מס' 8

1.

חשבו לפי הגדרה את הנגזרת של הפונק' בנק' הנתונה.

א. $f(x)=x^3$; $x=2$.

נחשב לפי הגדרה את $f'(2)$:

$$f'(2)=\lim_{h\to0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{(2+h)^3-2^3}{h}=$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{\cancel{2^3}+3\cdot2^2h+3\cdot2\cdot h^2+h^3-\cancel{2^3}}{h}=\lim_{h\to0}(12+\underset{\downarrow 0}{6\cdot h}+\underset{\downarrow 0}{h^2})=\underline{\underline{12}}$$

ב. $f(x)=\frac{1}{x}$; $x\neq0$.

נחשב את $f'(x)$, כאשר $x\neq0$:

$$f'(x)=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{\frac{1}{x+h}-\frac{1}{x}}{h}=\lim_{h\to0}\frac{\frac{\cancel{x}-\cancel{x}-h}{x(x+h)}}{h}=$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{-\cancel{h}}{\cancel{h}\cdot x\cdot(x+h)}=-\frac{1}{x^2}$$

ג. $f(x)=2x^3+3x-1$, $x=a$.

נחשב לפי הגדרה את $f'(a)$:

$$f'(a)=\lim_{h\to0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{2(a+h)^3+3(a+h)-1-(2a^3+3a-1)}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{6a^2h+6ah^2+2h^3+3h}{h}=\lim_{h\to0}(6a^2+6ah+2h^2+3)$$

$$=6a^2+3$$

ד. $f(x)=\sqrt{x}$ $x\neq0$.

נחשב לפי הגדרה את $f'(x)$, $x\neq0$:

$$f'(x)=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}\underset{\text{נכפול בצמוד}}{=}\lim_{h\to0}\frac{\cancel{h}}{\cancel{h}(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}=$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

2. .2

תשבו לפי חוקי הגזירה את הנגזרת של הפונק' הבאות.

א. $f(x)=\dfrac{x^4-x^2+2}{x\sqrt{x}}$

$$f'(x)=\left(\frac{x^4-x^2+2}{x^{\frac{3}{2}}}\right)'=\frac{(4x^3-2x)x^{\frac{3}{2}}-(x^4-x^2+2)\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}}{x^3}=$$

$$=\frac{4x^4\sqrt{x}-2x^2\sqrt{x}-\frac{3}{2}x^4\sqrt{x}+\frac{3}{2}x^2\sqrt{x}-3\sqrt{x}}{x^3}=$$

$$=\frac{5}{2}x\sqrt{x}+\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{3}{x^2\sqrt{x}}$$

ב. $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{3x^2-1}}$

$$f'(x)=\left((3x^2-1)^{-\frac{1}{2}}\right)'=-\frac{1}{2}(3x^2-1)^{-\frac{3}{2}}(6x)=$$

$$=-\frac{3x}{\sqrt{(3x^2-1)^3}}$$

ג. $f(x)=\left(\sqrt{x}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)^{10}$

$$f'(x)=\left[\left(\frac{x+1}{\sqrt{x}}\right)^{10}\right]'=\left(\frac{(x+1)^{10}}{x^5}\right)'=\frac{10(x+1)^9\cdot x^5-(x+1)^{10}\cdot 5x^4}{x^{10}}$$

$$=\frac{(x+1)^9\left[10x^5-5x^4(x+1)\right]}{x^{10}}=\frac{(x+1)^9(5x^5-5x^4)}{x^{10}}=$$

$$=\frac{5(x+1)^9(x-1)}{x^6}$$

ד. $f(x)=\sqrt[4]{\dfrac{x-1}{x+2}}=\left(\dfrac{x-1}{x+2}\right)^{\frac{1}{4}}$

$$f'(x)=\frac{1}{4}\left(\frac{x-1}{x+2}\right)^{-\frac{3}{4}}\left(\frac{x-1}{x+2}\right)'=\frac{1}{4}\left(\frac{x-1}{x+2}\right)^{-\frac{3}{4}}\cdot\left(\frac{1\cdot(x+2)-1\cdot(x-1)}{(x+2)^2}\right)$$

$$=\frac{3}{4}\cdot\left(\frac{x-1}{x+2}\right)^{-\frac{3}{4}}\cdot\frac{1}{(x+2)^2}=\frac{3}{4}\sqrt[4]{\left(\frac{x+2}{x-1}\right)^3}\cdot\frac{1}{(x+2)^2}=$$

$$=\frac{3}{4}\cdot\left((x-1)^3(x+2)^5\right)^{-\frac{1}{4}}$$

ה. $f(x)=\sqrt[3]{x+\sqrt{x}}$

$$f'(x)=\left(\left(x+x^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}}\right)'=\frac{1}{3}\left(x+x^{\frac{1}{2}}\right)^{-\frac{2}{3}}\left(1+\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\right)=$$

$$=\frac{1+\frac{1}{2\sqrt{x}}}{3\sqrt[3]{(x+\sqrt{x})^2}}=\frac{2\sqrt{x}+1}{6\sqrt{x}\sqrt[3]{(x+\sqrt{x})^2}}$$

3

ו. $y = 3\sin x\cos^2 x + \sin^3 x$

$$y' = 3\cos^3 x + 3\sin x \cdot 2\cos x(-\sin x) + 3\sin^2 x\cdot\cos x$$
$$= 3\cos^3 x - 3\sin^2 x\cos x = 3\cos x(\cos^2 x - \sin^2 x) =$$
$$= 3\cos x\cdot\cos 2x$$

ז. $y = \arcsin\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{1+x^2}}}\cdot\frac{1\cdot\sqrt{1+x^2} - x\cdot\frac{1}{2}(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot 2x}{1+x^2}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{\frac{1+x^2-x^2}{1+x^2}}}\cdot\underbrace{\frac{\sqrt{1+x^2} - x^2\cdot\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}}{1+x^2}}_{*} =$$
$$= \sqrt{1+x^2}\cdot * = \frac{1+x^2-x^2}{1+x^2} = \frac{1}{1+x^2}$$

ח. $y = \ln(\arcsin x)$

$$y' = \frac{1}{\arcsin x}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

ט. $y = e^{\cos^2 x}$

$$y' = e^{\cos^2 x}\cdot(2\cos x(-\sin x)) = -e^{\cos^2 x}\sin 2x$$

י. $\ln\frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}-x}$

$$y' = \frac{\sqrt{x^2+1}-x}{\sqrt{x^2+1}+x}\cdot\frac{\left[2x\cdot\frac{1}{2\sqrt{x^2+1}}+1\right](\sqrt{x^2+1}-x) - (\sqrt{x^2+1}+x)\left[\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}-1\right]}{(\sqrt{x^2+1}-x)^2}$$
$$= \frac{\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}+1\right)(\sqrt{x^2+1}-x) - (\sqrt{x^2+1}+x)\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}-1\right)}{(x^2+1)-x^2} =$$
$$= \cancel{x} - \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}} + \sqrt{x^2+1} - \cancel{x} - \cancel{x} + \sqrt{x^2+1} - \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}} + \cancel{x} =$$
$$= 2\sqrt{x^2+1} - \frac{2x^2}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{2x^2+2-2x^2}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{2}{\sqrt{x^2+1}}$$

4

יא. $y = 2^{\arcsin 3x}$

$$y' = (\arcsin 3x)' \cdot 2^{\arcsin 3x} \cdot \ln 2 = \frac{3}{\sqrt{1-9x^2}} \cdot 2^{\arcsin 3x} \cdot \ln 2$$

3. גזירה לוגריתמית

א. $y = x^m$, m ממשי.

נחשב את y' לפי גזירה לוגריתמית. נסמן:

$$y = x^m = e^{\ln x^m} = e^{m \ln x}$$

$$y' = e^{m\ln x} \cdot m \cdot \frac{1}{x} = x^m \cdot m \cdot \frac{1}{x} = m x^{m-1}.$$

והוכחנו שלכל m ממשי: $(x^m)' = m x^{m-1}$.

ב. $y = a^x$, $a > 0$.

נסמן: $y = a^x = e^{\ln a^x} = e^{x \ln a}$

$$y' = e^{x\ln a} \cdot \ln a = a^x \cdot \ln a$$

ג. $y = x^{\ln x}$

נסמן: $y = x^{\ln x} = e^{\ln(x^{\ln x})} = e^{\ln^2 x}$

$$y' = e^{\ln^2 x} \cdot 2\ln x \cdot \frac{1}{x} = x^{\ln x} \cdot \frac{2\ln x}{x}$$

ד. $y = x^{x^x}$

נסמן: $y = x^{x^x} = e^{\ln x^{x^x}} = e^{x^x \cdot \ln x}$

$$y' = e^{x^x \cdot \ln x} \cdot (x^x \cdot \ln x)' = x^{x^x}\left((x^x)' \ln x + \frac{x^x}{x}\right)$$

נחשב את $(x^x)'$.

נסמן: $g(x) = x^x = e^{\ln x^x} = e^{x \ln x}$

לכן: $g'(x) = e^{x\ln x} \cdot \left(\ln x + \frac{x}{x}\right) = x^x(\ln x + 1)$

נציב ב-y':

$$y' = x^{x^x}\left(x^x(\ln x+1) \cdot \ln x + x^{x-1}\right) =$$
$$= x^{x^x+x}\left(\ln^2 x + \ln x + \frac{1}{x}\right)$$

5

4. חשבו את הנגזרות החד-צדדיות בנק' הנתונה.

א. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x-1}{1+e^{\frac{1}{x-1}}} & x\neq 1\\ 0 & x=1\end{cases}$; $x=1$.

$$f'_+(1)=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{\frac{1+h-1}{1+e^{\frac{1}{1+h-1}}}-0}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0^+}\frac{1}{1+e^{\frac{1}{h}}}\underset{\downarrow}{=}\underline{\underline{0}}$$

$$h\to 0^+ \Leftrightarrow \frac{1}{h}\to +\infty \Leftrightarrow 1+e^{\frac{1}{h}}\to\infty$$

$$f'_-(1)=\lim_{h\to 0^-}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{1}{1+e^{\frac{1}{h}}}\underset{\downarrow}{=}\underline{\underline{1}}$$

$$e^{\frac{1}{h}}\to 0 \Leftarrow \frac{1}{h}\to-\infty \Leftarrow h\to 0^-$$

ב. $f(x)=\begin{cases}\sin x & x\geq 0\\ x^2 & x<0\end{cases}$; $x=0$.

$$f'_+(0)=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{\sin h-\overset{=0}{\sin 0}}{h}\underset{\downarrow}{=}\underline{\underline{1}}$$

$$\frac{\sin h}{h}\underset{h\to 0}{\to}1$$

$$f'_-(0)=\lim_{h\to 0^-}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{h^2-0}{h}=\lim_{h\to 0^-}h=\underline{\underline{0}}$$

5. עבור אילו ערכים של a, ו-b הפונקציה

$f(x)=\begin{cases}x^2 & x\geq x_0\\ ax+b & x<x_0\end{cases}$ תהיה רציפה וגזירה ב-x_0?

נבדוק תחילה תנאי לרציפות בנק' x_0:
נחשב גבולות חד-צדדיים בנק' זו:

$$\lim_{x\to x_0^+}f(x)=\lim_{x\to x_0^+}x^2=x_0^2=f(x_0)$$

$$\lim_{x\to x_0^-}f(x)=\lim_{x\to x_0^+}ax+b=ax_0+b$$

ע"מ ש-$f(x)$ תהיה רציפה ב-x_0,
נדרוש ש: $ax_0+b=f(x_0)=x_0^2$.

6. גזירות: נחשב נגזרת מימין ומשמאל ב- $x=x_0$:

$$f'_+(x_0)=2x_0 \quad ; \quad f'_-(x_0)=a$$

כדי ש- $f(x)$ תהיה גזירה ב- x_0 נדרוש: $a=2x_0$.

וסה"כ:

$$\begin{cases} a=2x_0 \\ ax_0+b=x_0^2 \end{cases} \Rightarrow a=2x_0,\ b=-x_0^2$$

6. הוכח את הטענה: אם $f(x)$ גזירה ב- $x=0$, אזי:

$$\lim_{n\to\infty} n\left(f\left(\tfrac{1}{n}\right)-f(0)\right)=f'(0).$$

הוכחה:

נתון כי $f(x)$ גזירה ב-0, לכן קיים הגבול:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h}=f'(0)$$, לכן קיים גם הגבול

החלקי עבור $h=\frac{1}{n}$ ($h\to 0 \Leftarrow\Rightarrow n\to\infty$):

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f\left(\frac{1}{n}\right)-f(0)}{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty} n\left(f\left(\tfrac{1}{n}\right)-f(0)\right)=f'(0).$$

7. חשבו את $\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-2f(x)+f(x-h)}{h}$.

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-2f(x)+f(x-h)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)+f(x-h)-f(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{f(x-h)-f(x)}{h}=$$

$$\underset{\downarrow}{=} f'(x)+\lim_{k\to 0}\frac{f(x+k)-f(x)}{-k}=f'(x)-f'(x)=\underline{\underline{0}}$$

נציב $k=-h$

8. נתונה $f(x)=\begin{cases}\frac{\sin(x^3)}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$, חשבו את $f'(x)$ לכל x.

עבור $x\neq 0$, נקבל:

$$f'(x)=\frac{\cos x^3\cdot 3x^2\cdot x-1\cdot\sin x^3}{x^2}=\frac{3x^3\cos x^3-\sin x^3}{x^2}$$

עבור $x=0$ נחשב את $f'(0)$ לפי הגדרה:

$$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{\sin h^3}{h}-0}{h}=$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sin h^3}{h^2}=\lim_{h\to 0}\underbrace{\frac{\sin h^3}{h^3}}_{\downarrow\ 1}\cdot\underbrace{h}_{\downarrow\ 0}=1\cdot 0=\underline{\underline{0}}$$

9. א. נתון $g(x)=x^2+3x$, מצאו את משוואת הישר המשיק לגרף הפונק' בנק' $x=2$.

נחשב תחילה את $g(2)$: $g(2)=2^2+3\cdot 2=10$

אם כן, אנו מחפשים משוואת ישר העובר דרך הנק' $(2,10)$.

נמצא את שיפוע הישר: $g'(x)=2x+3$

לכן $g'(2)=2\cdot 2+3=7$.

קיבלנו סה"כ ששיפוע המשיק בנק' 2 הוא 7.

לכן לפי הנוסחה למציאת משוואת ישר:

$$y=g'(2)(x-2)+g(2)=7(x-2)+10$$

$$\underline{y=7x-4}$$

ב. מצאו נק' שבה הישר המשיק ל- $g(x)=x^2-7x+3$ מקביל לישר $5x+y-3=0$.

נמצא את שיפוע הישר: $5x+y-3=0 \iff y=-5x+3$.

אם כן, שיפוע הישר המבוקש הוא $m=-5$.

נחשב את $g'(x)$: $g'(x)=2x-7$

כעת נבדוק עבור אילו נק' מתקיים: $2x-7=-5$

$$2x=2 \to x=1$$

$$g(1)=1^2-7\cdot 1+3=-3$$

לכן, הנק' בה שיפוע המשיק ל-$g(x)$ הוא -5 היא הנק' $(1,-3)$.

8

10. א. בהסתמך על העובדה שהפונ' ההפוכה ל- $y=e^x$, היא $x=\ln y$, ועל כך ש- $(\ln y)'=\frac{1}{y}$, הוכיחו כי $(e^x)'=e^x$.

הוכחה:

לפי המשפט, (גזירה של פונק' הפוכה):

$\ln y$ המוגדרת עבור $0<y$, הפיכה בתחום הגדרתה ורציפה, וכן $(\ln y)'=\frac{1}{y}\neq 0$ $\forall y$ לכן:

$$(e^x)'=\frac{1}{(\ln y)'}=\frac{1}{(\frac{1}{y})}=y=e^x$$

נחזיר "ללשון" x.

הוכחנו כי $(e^x)'=e^x$.

ב. בהסתמך על העובדה שהפונ' ההפוכה ל- $y=\arctg x$ היא $x=\tg y$, ועל כך ש: $(\tg y)'=\frac{1}{\cos^2 y}$,

חשבו את $(\arctg x)'$.

הוכחה:

$\tg y$ מונוטונית עולה ורציפה בקטע הפתוח $I=(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$

לכן הפיכה שם. וכן $\frac{1}{\cos^2 y}\neq 0$ לכל $y\in I$.

לכן, לפי משפט:

$$(\arctg x)'=\frac{1}{(\tg y)'}=\cos^2 y=\frac{1}{1+\tg^2 y}=\frac{1}{1+x^2}$$

זהות טריג' נחזור ללשון x

וקיבלנו סה"כ ש: $(\arctg x)'=\frac{1}{1+x^2}$.

תרגיל מס' 9

ההגשה **בזוגות** עד : 14:00 13/01/05

1. חשבו את הנגזרות של הפונקציות הבאות הנתונות בצורה סתומה:

א. $y^3 = \frac{x-y}{x+y}$

ב. $x^5 y + x^3 y^3 - 3xy = 0$

ג. $x^2 + y^2 = R$

ד. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$

2. הוכיחו כי למשוואה $x^5 + 3x - 5 = 0$ יש בדיוק פתרון אחד.

3. הוכיחו כי אם למשוואה $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx = 0$ יש פתרון חיובי x_1 אחד, אזי למשוואה $4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d = 0$ יש פתרון חיובי x_0 בקטע $(0, x_1)$.

4. הוכיחו כי למשוואה $x^{10} + x^4 + 2x^2 - 18 = 0$ יש לכל היותר שני פתרונות שונים.

5. הוכיחו כי :

- $na^{n-1}(b-a) < b^n - a^n < nb^{n-1}(b-a)$ לכל $b > a > 0$.
- $e^x > 1 + x$ לכל $x \neq 0$.
- $\ln(1+x) > \frac{x}{1+x}$ לכל $x > 0$.

6. חשבו את הגבולות :

- $\lim_{x \to 1} \frac{\ln x}{x^2 - 1}$
- $\lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{2}{\sin 2x} \right)$
- $\lim_{x \to \infty} \frac{x^{10}}{e^x}$
- $\lim_{x \to \infty} \frac{\ln x}{x}$
- $\lim_{x \to 1} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right)$
- $\lim_{x \to 1} x^{\frac{1}{1-x}}$

- $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}\right)^{\sin x}$

7. חקרו את הפונקציות הבאות , לפי שלבי החקירה :
- תחום הגדרה
- נקודות חיתוך עם הצירים
- נקודות קיצון ותחומי עליה וירידה
- נקודות פיתול ותחומי קמירות
- אסימפטוטות אנכיות ומשופעות
- שרטוט גרף הפונקציה

א. $y=\frac{-x^2}{(2-x)^2}$

ב. $y=\frac{x^3}{(x+1)^2}$

ג. $y=\ln x+\frac{1}{x}$

ד. $y=\frac{1}{2}x-\arctan x$

ה. $y=e^{\frac{1}{x}}$

ו. $y=\left(x^2-3\right)e^x$

ז. $y=\frac{3}{5}x^{\frac{5}{3}}-3x^{\frac{2}{3}}$

בהצלחה!!!

עמ' 1

פתרון תרגיל מס' 9

1. א.

$$y^3 = \frac{x-y}{x+y} \Rightarrow y^3x + y^4 = x - y$$

נגזור את המשוואה:

$$3y^2y'\cdot x + y^3\cdot 1 + 4y^3\cdot y' = 1 - y'$$

$$y'(3y^2x + 4y^3 + 1) = 1 - y^3$$

$$y' = \frac{1-y^3}{3y^2x+4y^3+1}$$

ב.

$$x^5y + x^3y^3 - 3xy = 0$$

נגזור:

$$(5x^4y + x^5\cdot y') + (3x^2y^3 + x^3 3y^2y') + (-3y - 3xy') = 0$$

$$y'(x^5 - 3x + 3x^3y^2) = -5x^4y - 3x^2y^3 + 3y$$

$$y' = \frac{3y - 5x^4y - 3x^2y^3}{x^5 - 3x + 3x^3y^2}$$

ג.

$$x^2 + y^2 = R$$

נגזור:

$$2x + 2yy' = 0$$

$$y' = -\frac{x}{y}$$

ד.

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a} \Rightarrow x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}}$$

נגזור:

$$\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}y^{-\frac{1}{2}}\cdot y' = 0$$

$$y' = -\sqrt{\frac{y}{x}}$$

2. נסמן $f(x) = x^5 + 3x - 5$. $f(x)$ פונק' רציפה.

נחשב: $f(1) = -1 < 0$, $f(2) = 33 > 0$

לפי משפט ערך הביניים יש בקטע $[1,2]$ שורש ל-$f(x)$.

(קיים $1 < c < 2$ כך ש: $f(c) = 0$).

כעת נניח בשלילה כי ל-$f(x)$ יש יותר משורש אחד.

נסמן את שני הפתרונות ב- α, β .

עמ' 2

צ"ל : $f(\alpha)=f(\beta)=0$. נניח בה"כ $\alpha<\beta$

$f(x)$ רציפה וגזירה לכל x. לכן לפי משפט רול קיימת

נק' γ: $\alpha<\gamma<\beta$ כך ש: $f'(\gamma)=0$. אולם:

$f'(x)=5x^4+3>0$ לכל x, לכן $f'(\gamma)\neq 0$, בסתירה

למשפט רול. מסקנה: למשוואה יש פתרון אחד בדיוק!

3. נסמן $f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx$. $f(x)$ רציפה וגזירה לכל x.

נבחין כי ל- $f(x)$ פתרון נוסף ב- $x=0$, $f(0)=0$.

וכן נתון $f(x_1)=0$, ו- $0<x_1$. סה"כ $f(0)=f(x_1)=0$. לכן לפי

משפט רול, קיימת x_0, $0<x_0<x_1$ כך ש:

$f'(x_0)=0$: אבל $f'(x)=4ax^3+3bx^2+2cx+d$

לכן למשוואה $0=4ax^3+3bx^2+2cx+d$ יש פתרון ב- $(0,x_1)$.

4. נניח שלמשוואה זו יש 3 (או יותר) פתרונות שונים.

נסמנם: $x_1<x_2<x_3$. נסמן $f(x)=x^{10}+x^4+2x^2-18$.

זוהי פונקציה גזירה ורציפה לכל x.

$f(x_1)=f(x_2)=0$ לכן לפי משפט רול, קיימת נק' c בקטע (x_1,x_2),

כך ש: $f'(c)=0$.

באופן דומה, $f(x_2)=f(x_3)=0$, לכן קיימת נק' d בקטע (x_2,x_3),

כך ש: $f'(d)=0$.

נתבונן כעת בפונק' הנגזרת $f'(x)$ בקטע $[c,d]$.

זוהי שוב פונק' גזירה ורציפה ו- $f'(c)=f'(d)$, ולכן ממשפט

רול נובע שקיימת נק' α בקטע (c,d) כך ש:

$f''(\alpha)=0$. מצד שני: $f''(x)=90x^8+12x^2+4>0$

לכל x. צ"ל $f''(\alpha)\neq 0$.

מסקנה: ההנחה של- $f(x)$ יש שלושה (או יותר) פתרונות

הייתה בלתי נכונה, ולכן למשוואה הנ"ל יש לכל היותר

שני פתרונות שונים.

5. א.

צ"ל כי: $na^{n-1}(b-a) < b^n-a^n < nb^{n-1}(b-a)$ לכל $b>a>0$.

פתרון: נגדיר $f(x)=x^n$, פונק' זו רציפה וגזירה לכל x. נרשום עבורה את משפט לגרנז' בקטע סגור $[a,b]$:

קיימת נק' c: $a<c<b$ כך ש: $\frac{b^n-a^n}{b-a}=n\cdot c^{n-1}$.

ברור כי: $b^{n-1}>c^{n-1}>a^{n-1}$

נכפול ב-n: $nb^{n-1}>nc^{n-1}>na^{n-1}$

לכן: $nb^{n-1}(b-a)>b^n-a^n>na^{n-1}(b-a)$.

ב.

צ"ל: $e^x>1+x$ לכל $x\neq0$.

פתרון: נבחין בין שני מקרים: $x>0$, $x<0$. נגדיר $f(x)=e^x$

ונרשום את משפט לגרנז' בקטע $[0,x]$ עבור $x>0$:

קיימת $0<c<x$ כך ש: $\frac{e^x-e^0}{x}=e^c$.

$0<c \Leftarrow e^0<e^c \Leftarrow 1<\frac{e^x-1}{x}$.

$x>0$ לכן: $x+1<e^x$.

כעת נרשום את משפט לגרנז' בקטע $[x,0]$, עבור $x<0$:

קיימת $x<c<0$ כך ש: $\frac{e^0-e^x}{-x}=e^c$.

$c<0 \Leftarrow e^c<e^0 \Leftarrow \frac{e^0-e^x}{-x}<1 \Leftarrow e^0-e^x<-x$

$-x>0$

$\Leftarrow 1+x<e^x$

לכן הוכחנו שה"כ כי לכל $x\neq0$: $e^x>1+x$.

ג.

צ"ל: $\ln(1+x)>\frac{x}{1+x}$ לכל $x>0$

פתרון: נסמן: $f(x)=\ln(1+x)$, $f(x)$ רציפה וגזירה לכל $x>0$

נרשום את משפט לגרנז' עבור $f(x)$ בקטע $[0,x]$ קיימת נק' c

כך ש: $0<c<x$ עבורה $\frac{\ln(1+x)-\ln(1)}{x}=\frac{1}{1+c} \Leftarrow \frac{\ln(1+x)}{x}=\frac{1}{1+c}$

$c<x \Leftarrow \frac{1}{1+c}>\frac{1}{1+x} \Leftarrow \ln(1+x)>\frac{x}{x+1}$

עמ' 4

6. את הגבולות הבאים נחשב לפי כלל לופיטל:

1) $$\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{x^2-1}\overset{\frac{0}{0}}{\underset{\text{לופיטל}}{=}}\lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{x}}{2x}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{2x^2}=\frac{1}{2}$$

2) $$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{2}{\sin 2x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x-2x}{x\sin 2x}\overset{\frac{0}{0}}{\underset{\text{לופיטל}}{=}}\lim_{x\to 0}\frac{2\cos 2x-2}{\sin 2x+2x\cos 2x}$$

$$\overset{\frac{0}{0}}{\underset{\text{לופיטל}}{=}}\lim_{x\to 0}\frac{-4\sin 2x}{2\cos 2x+2\cos 2x-4x\sin 2x}=\frac{0}{4}=0$$

3) $$\lim_{x\to\infty}\frac{x^{10}}{e^x}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{\text{לופיטל}}{=}}\lim_{x\to\infty}\frac{10x^9}{e^x}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{\text{לופיטל}}{=}}\lim_{x\to\infty}\frac{9\cdot 10x^8}{e^x}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{\text{לופיטל}}{=}}\dots=\lim_{x\to\infty}\frac{10!}{e^x}=0$$

4) $$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{\text{לופיטל}}{=}}\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$$

5) $$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{\ln x-x+1}{\ln x(x-1)}\overset{\frac{0}{0}}{\underset{\text{לופיטל}}{=}}\lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{x}-1}{\frac{1}{x}(x-1)+\ln x}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{1-x}{x-1+x\ln x}\overset{\frac{0}{0}}{\underset{\text{לופיטל}}{=}}\lim_{x\to 1}\frac{-1}{1+\ln x+x\cdot\frac{1}{x}}=-\frac{1}{2}$$

6) $$\lim_{x\to 1}x^{\frac{1}{1-x}}=\lim_{x\to 1}e^{\frac{1}{1-x}\cdot\ln x}\underset{e^x\text{ רציפה}}{=}e^{\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{1-x}}\overset{\frac{0}{0}}{\underset{\text{לופיטל}}{=}}e^{\lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{x}}{-1}}=\frac{1}{e}$$

7) $$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}\right)^{\sin x}=\lim_{x\to 0^+}e^{-\sin x\ln x}\underset{e^x\text{ רציפה}}{=}e^{\lim_{x\to 0^+}(-\sin x\ln x)}=$$

$$=e^{-\left(\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{x}\right)\left(\lim_{x\to 0^+}x\ln x\right)}=e^{-1\cdot 0}=e^0=1$$

עמ' 5.

הפונקציה : $f(x)=\frac{-x^2}{(2-x)^2}$

תחום הגדרה :

לכל $x\neq 2$.

נק' חיתוך עם הצירים :

$x=0 \Leftarrow y=0$ נק' חיתוך יחידה $(0,0)$.

נק' קיצון ותחומי עלייה וירידה :

$$f'(x)=\frac{-2x(2-x)^2+x^2\cdot 2(2-x)\cdot(-1)}{(2-x)^4}=-\frac{4x}{(2-x)^3}$$

$f'(x)=0 \Rightarrow x=0$

$f(x)$ עולה ב- $(-\infty,0)\cup(2,\infty)$

$f(x)$ יורדת ב- $(0,2)$

$f'(x)$: + (0) − (2) +

$f(x)$: ↗ 0 ↘ 2 ↗

נק' מקסימום

נק' פיתול ותחומי קמירות :

$$f''(x)=\frac{-8(x+1)}{(2-x)^4}$$

+ (−1) − (2) −

∪ −1 ∩ 2 ∩

$f(x)$ קמורה כלפי מעלה: $(-\infty,-1)$, $f(x)$ קמורה כלפי מטה $(-1,\infty)$.

אסימפטוטות אנכיות :

נחשוד ב- $x=2$:

$$\lim_{x\to 2}\frac{-x^2}{(2-x)^2}=-\infty$$

אסימפ' אנכית ב- $x=2$.

אסימפטוטות משופעות :

$x\to\infty$:

$$a=\lim_{x\to\infty}\frac{-x}{(2-x)^2}=0$$

$$b=\lim_{x\to\infty}\frac{-x^2}{(2-x)^2}=-1$$

אסימפ' אופקית ב- $x\to\infty$, $y=-1$

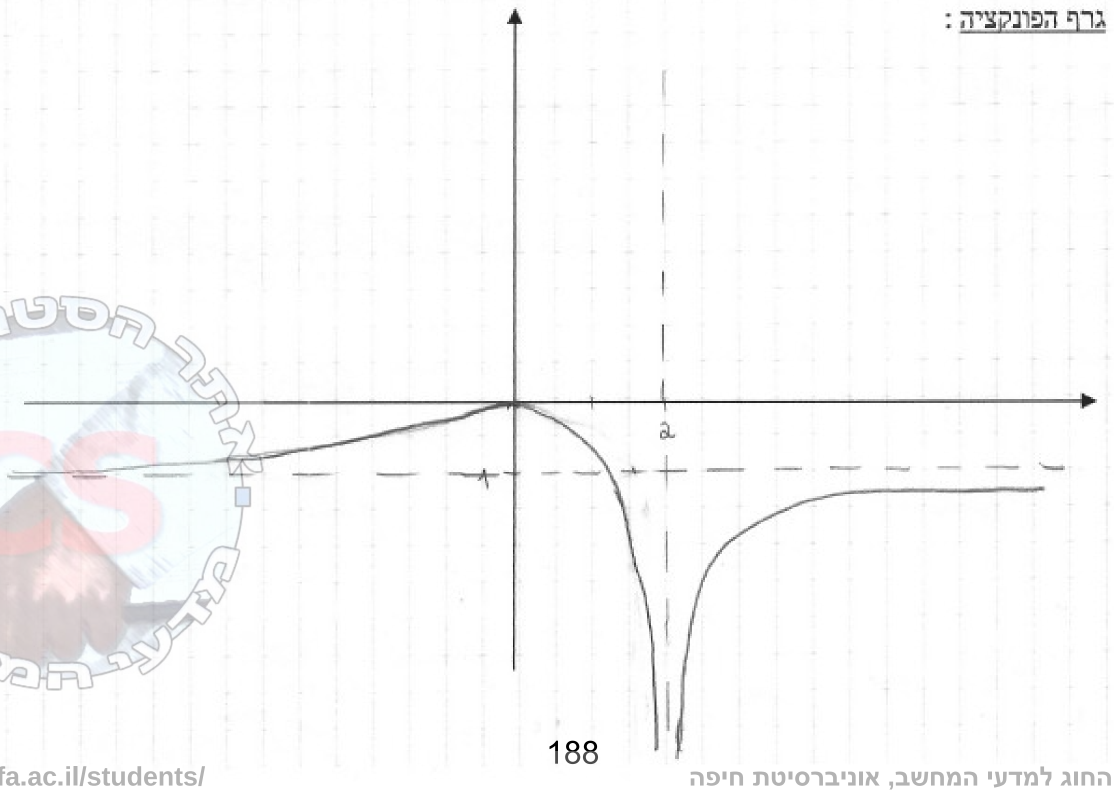
$x\to-\infty$:

$$a=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x}{(2-x)^2}=0$$

$b=-1$

אסימפ' אופקית ב- $y=-1$ כש- $x\to-\infty$

גרף הפונקציה :



סמ' 6

הפונקציה : $f(x)=\dfrac{x^3}{(x+1)^2}$

תחום הגדרה : $f(x)$ מוגדרת לכל $x \neq -1$.

נק' חיתוך עם הצירים : $x=0 \Rightarrow y=0$. נק' חיתוך היא $(0,0)$.

נק' קיצון ותחומי עלייה וירידה :

$$f'(x)=\frac{3x^2(x+1)^2-x^3\,2(x+1)}{(x+1)^4}=\frac{x^2(x+3)}{(x+1)^3}$$

$f'(x)=0 \Rightarrow x=0,-3$

	-3		-1		0		
$+$		$-$		$+$		$+$	$f'(x)$
$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$		$\nearrow$	$f(x)$

-3: מקסימום

$f(x)$ עולה ב $(-\infty,-3)\cup(0,\infty)\cup(-1,0)$

$f(x)$ יורדת ב- $(-3,-1)$

נק' פיתול ותחומי קמירות :

$$f''(x)=\frac{6x}{(x+1)^4}$$

	-1		0		
$-$		$-$		$+$	$f''(x)$
$\cap$		$\cap$		$\cup$	$f(x)$

$f(x)$ קעורה כלפי מעלה ב- $x>0$.

$f(x)$ " " מטה ב- $x<0$.

$x=0$ נק' פיתול.

אסימפטוטות אנכיות : לבדוק ב- $x=-1$:

$$\lim_{x\to-1}\frac{x^3}{(x+1)^2}=-\infty$$

אסימפטוטות משופעות :

$x\to\infty$:

$$a=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{(x+1)^2}=1$$

$$b=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{x^3}{(x+1)^2}-x\right]=-2$$

אסימפטוטה משופעת כש- $x\to\infty$ ב: $y=x-2$

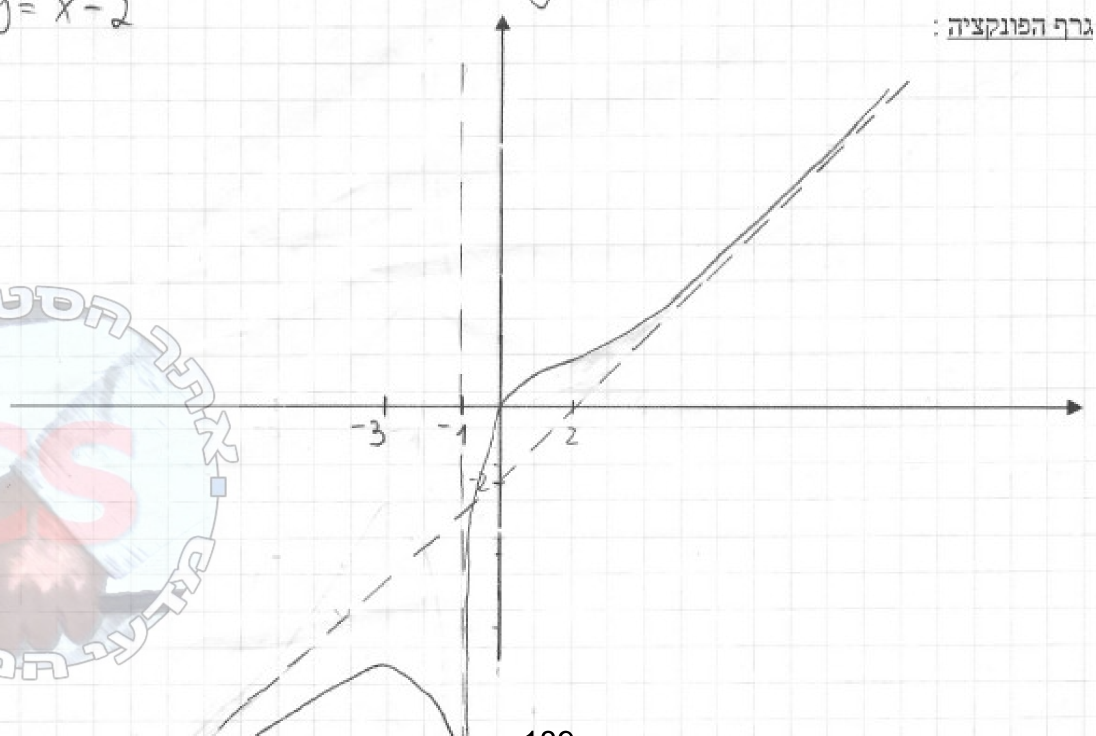
$x\to-\infty$:

$$a=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{(x+1)^2}=1$$

$b=-2$

גם ב- $x\to-\infty$ אסימפ' משופע ב- $y=x-2$

גרף הפונקציה :



תר' 7.

הפונקציה : $f(x)=\ln x+\frac{1}{x}$

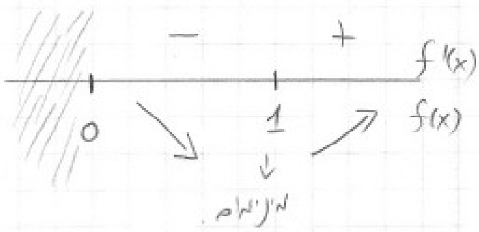
תחום הגדרה : $x>0$.

נק' חיתוך עם הצירים : אין נק' חיתוך עם הצירים.

נק' קיצון ותחומי עליה וירידה :

$$f'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}=\frac{x-1}{x^2}$$

$$f'(x)=0 \Rightarrow x=1$$

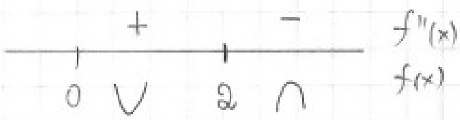


תחום עליה: $(1,\infty)$

תחום ירידה: $(0,1)$

נק' פיתול ותחומי קמירות :

$$f''(x)=\frac{2-x}{x^3}$$



$f(x)$ קמורה כלפי מעלה ב- $(0,2)$

$f(x)$ " " מטה ב- $(2,\infty)$.

$x=2$ נק' פיתול.

אסימפטוטות אנכיות :

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\ln x+\frac{1}{x}\right)=\infty$$

לכן יש אסימפטוטה אנכית ב- $x=0$.

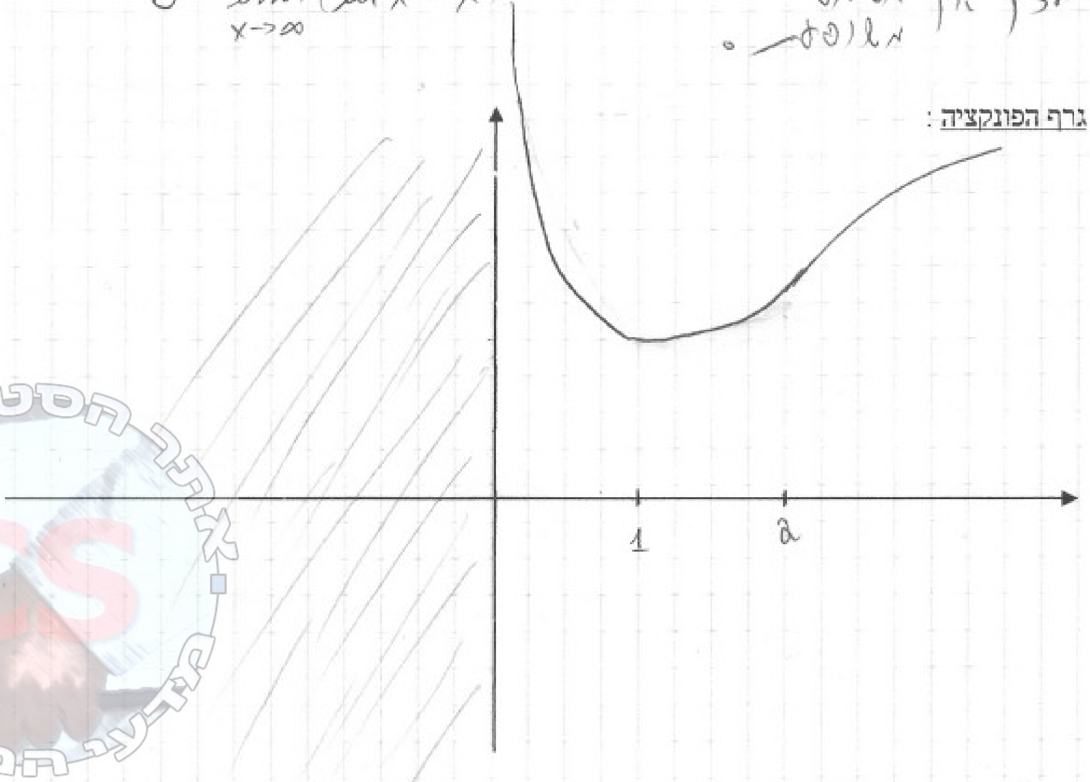
אסימפטוטות משופעות :

$$\underline{x\to\infty}: a=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\ln x}{x}+\frac{1}{x^2}\right)=0$$

$$b=\lim_{x\to\infty}\left(\ln x+\frac{1}{x}\right)=\infty \longrightarrow$$

b לא קיים לכן אין אסימפ' משופעת.

גרף הפונקציה :



עמ' 8

הפונקציה : $f(x)=\dfrac{x}{2}-\arctan x$

תחום הגדרה : $f(x)$ מוגדרת לכל x.

נק' חיתוך עם הצירים : $x=0 \Leftarrow y=0$, $(0,0)$ נק' חיתוך.

נק' קיצון ותחומי עלייה וירידה :

$$f'(x)=\frac{1}{2}-\frac{1}{x^2+1}=\frac{x^2-1}{2(x^2+1)}$$

$$f'(x)=0 \Rightarrow x=\pm 1$$

$f(x)$ עולה ב: $(-\infty,-1)\cup(1,\infty)$

$f(x)$ יורדת ב: $(-1,1)$

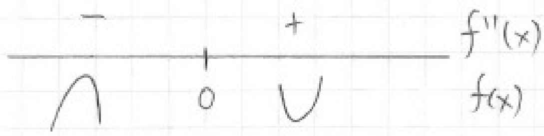
נק' פיתול ותחומי קמירות :

$$f''(x)=\frac{2x}{(x^2+1)^2}$$

$f(x)$ קמורה כלפי מעלה ב- $x>0$

$f(x)$ " " מטה ב- $x<0$

$x=0$ נק' פיתול.



אסימפטוטות אנכיות : אין אסימפ' אנכי.

אסימפטוטות משופעות :

$x\to-\infty$:

$$a=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{2}-\frac{\operatorname{arctg}x}{x}\right)=\frac{1}{2}$$

$$b=\lim_{x\to-\infty}(-\operatorname{arctg}x)=\frac{\pi}{2}$$

אסימפ' משופע כש- $x\to-\infty$

$$y=\frac{x}{2}+\frac{\pi}{2}$$

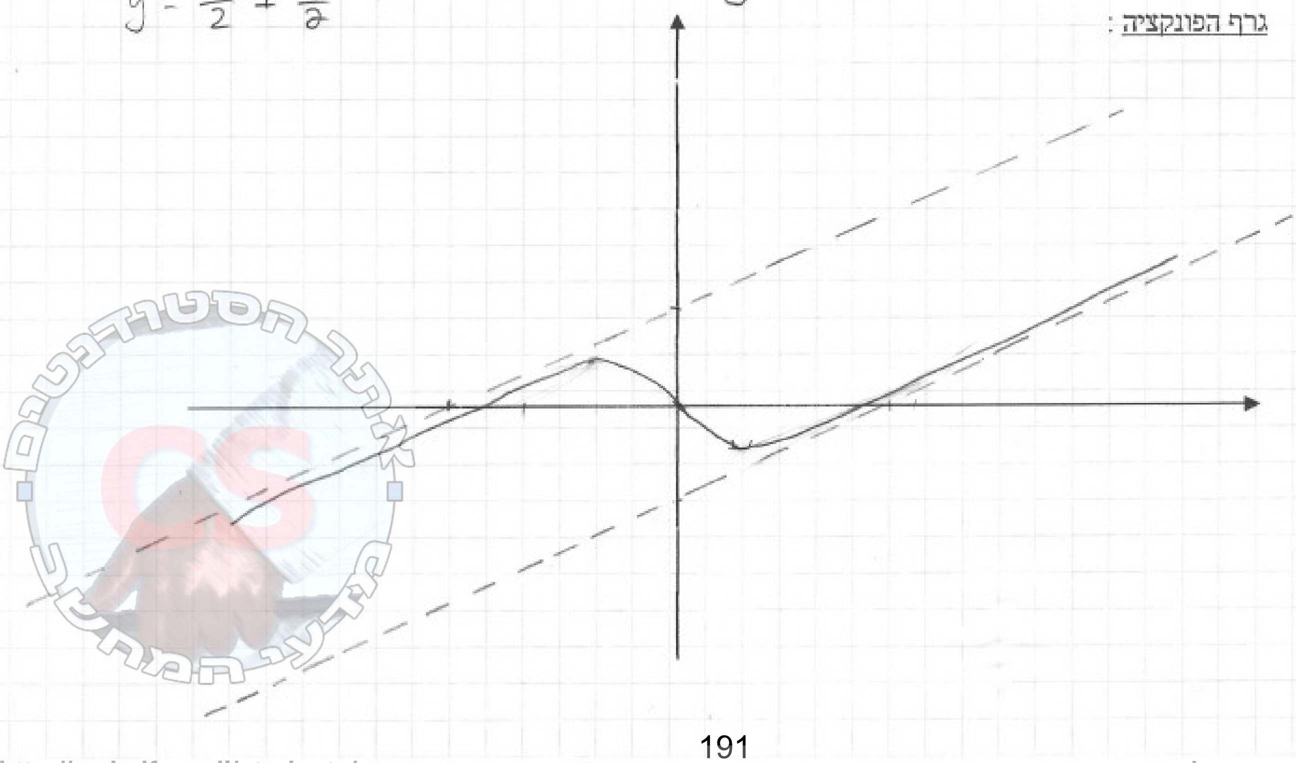
$x\to\infty$:

$$a=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{2}-\frac{\operatorname{arctg}x}{x}=\frac{1}{2}$$

$$b=\lim_{x\to\infty}-\operatorname{arctg}x=-\frac{\pi}{2}$$

אסימפ' משופע כש- $x\to\infty$: $y=\dfrac{x}{2}-\dfrac{\pi}{2}$

גרף הפונקציה :



עמ' 9

הפונקציה : $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$

תחום הגדרה : $x \neq 0$.

נק' חיתוך עם הצירים : אין נק' חיתוך עם הצירים.

נק' קיצון ותחומי עלייה וירידה : $f'(x) = -\frac{1}{x^2}\cdot e^{\frac{1}{x}} < 0$ לכל x

$f(x)$ יורדת לכל x.

$$f''(x) = \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^4}(2x+1)$$

נק' פיתול ותחומי קמירות :

$f(x)$ קמורה כלפי מעלה ב- $x > -\frac{1}{2}$

$f(x)$ " " מטה ב- $x < -\frac{1}{2}$

נק' פיתול $\left(-\frac{1}{2}, e^{-2}\right)$

$-$		$+$		$+$	$f''(x)$
$\cap$	$-\frac{1}{2}$	$\cup$	0	$\cup$	$f(x)$

אסימפטוטות אנכיות : נבדוק ב- $x=0$:

$$\lim_{x\to 0^+} e^{\frac{1}{x}} = \infty$$

$$\lim_{x\to 0^-} e^{\frac{1}{x}} = 0$$

אסימפטוטות משופעות :

$x \to \infty$:

$$a = \lim_{x\to\infty} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x} = 0$$

$$b = \lim_{x\to\infty} e^{\frac{1}{x}} = 1$$

אסימפ' משופע ב- $y=1$

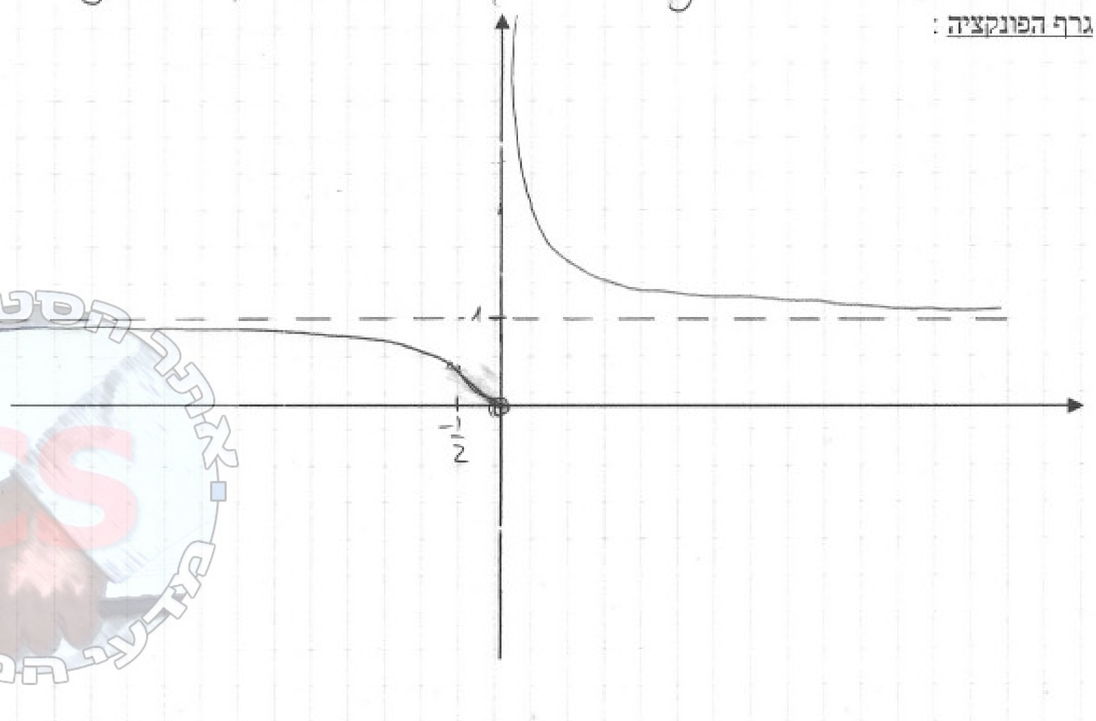
$x \to -\infty$:

$$a = \lim_{x\to-\infty} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x} = 0$$

$$b = \lim_{x\to-\infty} e^{\frac{1}{x}} = 1$$

אסימפ' משופע ב- $y=1$

גרף הפונקציה :



הפונקציה: $f(x)=\left(x^2-3\right)e^x$

תחום הגדרה: $f(x)$ מוגדרת לכל x.

נק' חיתוך עם הצירים: $(0,-3)$, $(0,\pm\sqrt{3})$.

נק' קיצון ותחומי עלייה וירידה:

$$f'(x)=e^x(x-1)(x+3)$$

$$f'(x)=0 \Rightarrow x=1,-3$$

$f(x)$ עולה ב- $x>1$ ו- $x<-3$.

$f(x)$ יורדת ב- $-3<x<1$.

	$x<-3$	-3	$-3<x<1$	1	$x>1$
$f'(x)$	+		−		+
$f(x)$	↗	מקסימום	↘	מינימום	↗

נק' פיתול ותחומי קמירות:

$$f''(x)=(x^2+4x-1)e^x$$

$f(x)$ קעורה כלפי מעלה ב: $x>-2+\sqrt{5}$, $x<-2-\sqrt{5}$

$f(x)$ " " מטה ב: $-2-\sqrt{5}<x<-2+\sqrt{5}$.

$-2+\sqrt{5}$, $-2-\sqrt{5}$ נק' פיתול.

		$-2-\sqrt{5}$		$-2+\sqrt{5}$	
$f''(x)$	+		−		+
$f(x)$	$\cup$		$\cap$		$\cup$

אסימפטוטות אנכיות: אין

אסימפטוטות משופעות:

$x\to\infty$:

$$a=\lim_{x\to\infty}\frac{e^x(x^2-3)}{x}=\infty$$

אין אסימפ'.

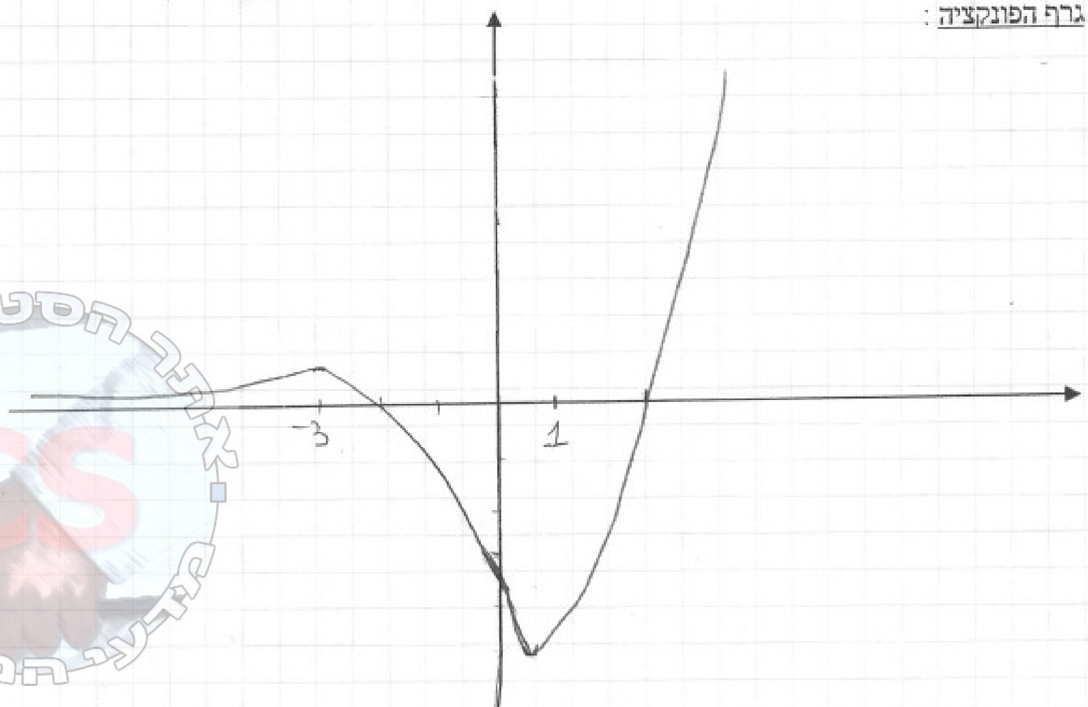
$x\to-\infty$:

$$a=\lim_{x\to-\infty}\frac{(x^2-3)}{xe^{-x}}\underset{\text{לופיטל}}{=}0$$

$$b=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-3}{e^{-x}}\underset{\text{לופיטל}}{=}0$$

$y=0$ אסימפ' משופעת ב- $-\infty$.

גרף הפונקציה:



11 עמ'

<u>הפונקציה</u> : $f(x)=\frac{3}{5}x^{\frac{5}{3}}-3x^{\frac{2}{3}}$

<u>תחום הגדרה</u> : f(x) מוגדרת לכל x.

<u>נק' חיתוך עם הצירים</u> : $(0,0),(5,0)$ נק' חיתוך.

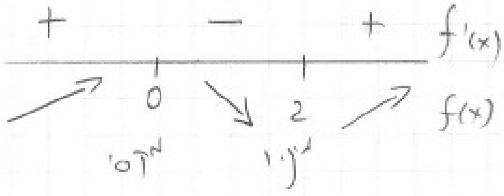
<u>נק' קיצון ותחומי עלייה וירידה</u> :

$$f'(x)=x^{\frac{2}{3}}-\frac{2}{x^{\frac{1}{3}}}=\frac{x-2}{\sqrt[3]{x}}$$

$$f'(x)=0 \to x=2$$

f(x) עולה ב- $(-\infty,0)\cup(2,\infty)$

f(x) יורדת ב- $(0,2)$



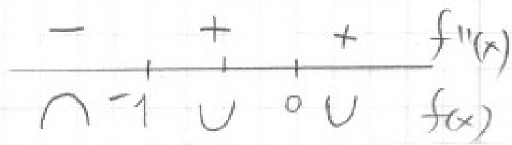
<u>נק' פיתול ותחומי קמירות</u> :

$$f''(x)=\frac{2}{3}x^{-\frac{4}{3}}(x+1)$$

f(x) קמורה כלפי מעלה $x>-1$

f(x) " " מטה $x<-1$

$x=-1$ נק' פיתול



<u>אסימפטוטות אנכיות</u> :

אין

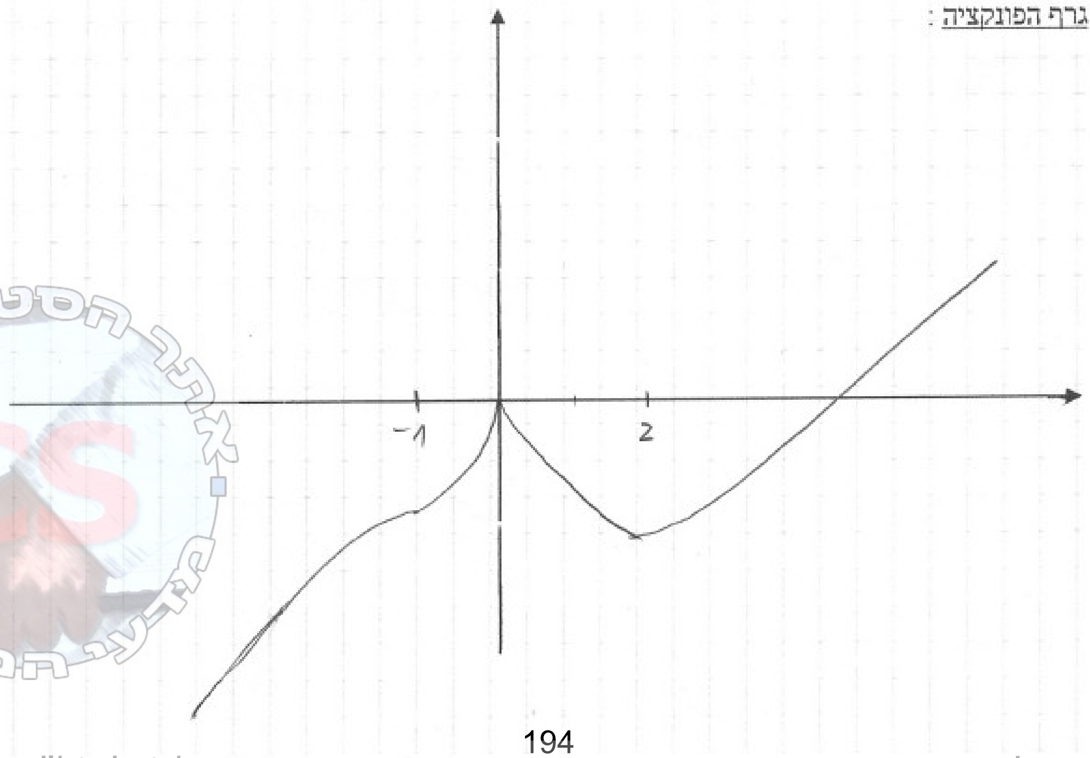
<u>אסימפטוטות משופעות</u> :

$x \to \pm\infty$:

$$a=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{3}{5}x^{\frac{2}{3}}-3x^{-\frac{1}{3}}\right)=\infty$$

אין אסימפ' משופעות.

<u>גרף הפונקציה</u> :



תרגיל מס' 10

לא להגשה

1. חשבו את האינטגרלים הבאים :

א. $\int \frac{2t-3}{\left(t^2-3t+1\right)^2}dt$

ב. $\int \frac{x^3}{1-x}dx$

ג. $\int x^3\left(2-5x^4\right)^7 dx$

ד. $\int x\ln(x+1)dx$

ה. $\int \frac{x+13}{x^2-4x-5}dx$

ו. $\int \frac{(\ln t)^2}{t^2}dt$

ז. $\int x\cos x^2 dx$

ח. $\int \sin^4 t\cos t dt$

ט. $\int \frac{\sin x}{e^x}dx$

י. $\int \frac{1}{x^2+4x+7}dx$

יא. $\int \frac{\arctan 2x}{1+4x^2}dx$

יב. $\int \frac{x^4}{x^2+1}dx$

יג. $\int \frac{1}{t^2-3t+3}dt$

יד. $\int \frac{5x^2-11x}{(x-1)^2\left(x^2+2\right)}dx$

טו. $\int \frac{12x+5}{x^2\left(x^2+2x+5\right)}dx$

2. חשבו את האינטגרלים המסוימים הבאים :

א. $\int_1^4 \left(\sqrt{x}+\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)dx$

ב. $\int_1^0 x(2x+5)dx$

ג. $\int_1^0 |2x-1|dx$

ד. $\int_{-1}^2 \frac{t^2}{\sqrt{t+2}}dt$

ה. $\int_1^b x^2\ln^2 x dx$

3. הוכיחו באמצעות פיתוח לטור מקלורן כי $x-\frac{x^2}{2}<\ln(1+x)<x$ לכל **x>0**.
(תרגילים נוספים בנושא פיתוח טיילור בקובץ המבחנים שבאתר)

בהצלחה!!!

עמ' 1

פתרון תרגיל מס' 10

1.

א. $\int \frac{2t-3}{(t^2-3t+1)^2}\,dt = \frac{(t^2-3t+1)^{-1}}{-1} + c$

אינטגרל מיידי.

ב. $\int \frac{x^3}{1-x}\,dx = -\int (x^2+x+1)\,dx + \int \frac{dx}{1-x} = -\left(\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+x\right) - \ln|1-x| + c$

חילוק פולינומים.

$$\begin{array}{r|l} -x^2-x-1 & \\ \hline x^3 & -x+1 \\ x^3-x^2 & \\ \hline x^2 & \\ x^2-x & \\ \hline x & \\ x-1 & \\ \hline 1 & \end{array}$$

ג. $\int x^3(2-5x^4)^7\,dx = -\frac{1}{20}\int -20x^3(2-5x^4)^7\,dx =$

$= -\frac{1}{20}\cdot\frac{(2-5x^4)^8}{8} + c$

ד. $\int x\ln(x+1)\,dx = \frac{x^2}{2}\ln(1+x) - \frac{1}{2}\int \frac{x^2}{x+1}\,dx =$

$u'(x)=x \rightarrow u(x)=\frac{x^2}{2}$

$v(x)=\ln(x+1) \quad v'(x)=\frac{1}{x+1}$

$$\begin{array}{r|l} x-1 & \\ \hline x^2 & x+1 \\ x^2+x & \\ \hline -x & \\ -x-1 & \\ \hline 1 & \end{array}$$

$= \frac{x^2}{2}\ln(1+x) - \frac{1}{2}\left[\int (x-1)\,dx + \int \frac{dx}{x+1}\right] =$

$= \frac{x^2}{2}\ln(1+x) - \frac{x^2}{4} + \frac{x}{2} - \frac{1}{2}\ln|x+1| + c$

ה. $\int \frac{x+13}{x^2-4x-5}\,dx = \int \frac{x+13}{(x-5)(x+1)}\,dx = 3\int \frac{dx}{x-5} - 2\int \frac{dx}{x+1} =$

$\frac{x+13}{(x-5)(x+1)} = \frac{A}{x-5} + \frac{B}{x+1}$

$x+13 = A(x+1) + B(x-5)$

נציב: $x=5$: $18 = 6A \Leftarrow A=3$

$x=-1$: $12 = -6B \Leftarrow B=-2$

$= 3\ln|x-5| - 2\ln|x+1| + c$

שא' 2.

ו. $\int \frac{(\ln t)^2}{t^2}\,dt = \int \frac{s^2}{e^s}\,ds = \int s^2 e^{-s}\,ds =$

$s = \ln t \Rightarrow t = e^s$, $ds = \frac{dt}{t}$

$u(s) = s^2 \rightarrow u'(s) = 2s$
$v'(s) = e^{-s} \rightarrow v(s) = -e^{-s}$

$= -s^2 e^{-s} + 2\int s e^{-s}\,ds = -s^2 e^{-s} + 2\left[-se^{-s} + \int e^{-s}\,ds\right]$

$u(s) = s \rightarrow u'(s) = 1$
$v'(s) = e^{-s} \rightarrow v(s) = -e^{-s}$

$= -s^2 e^{-s} - 2se^{-s} - 2e^{-s} + C = -\frac{\ln^2 t}{t} - \frac{2\ln t}{t} - \frac{2}{t} + C$

ז. $\int x\cos x^2\,dx = \frac{1}{2}\int 2x\cdot\cos x^2 = \frac{1}{2}\sin x^2 + C$

ח. $\int \sin^4 t\,\cos t\,dt = \frac{\sin^5 t}{5} + C$

ט. $\int \frac{\sin x}{e^x}\,dx = \int \sin x\cdot e^{-x}\,dx = -e^{-x}\sin x + \int e^{-x}\cos x\,dx =$

$u'(x) = e^{-x} \rightarrow u(x) = -e^{-x}$
$v(x) = \sin x \rightarrow v'(x) = \cos x$

$= -e^{-x}\sin x - e^{-x}\cos x - \int e^{-x}\sin x\,dx$

$u'(x) = e^{-x} \rightarrow u(x) = -e^{-x}$
$v(x) = \cos x \rightarrow v'(x) = -\sin x$

אם נסמן: $I = \int \sin x\, e^{-x}\,dx$

נקבל: $I = -e^{-x}(\sin x + \cos x) - I$

$I = -\frac{e^{-x}}{2}(\sin x + \cos x) + C$

י. $\int \frac{dx}{x^2+4x+7} = \int \frac{dx}{(x+2)^2+3} = \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{x+2}{\sqrt{3}} + C$

$4^2 - 28 < 0$

יא. $\int \frac{\arctan 2x}{1+4x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2}{1+4x^2}\cdot\arctan 2x\,dx = \frac{1}{2}\cdot\frac{(\arctan 2x)^2}{2} + C$

יב. $\int \frac{x^4}{x^2+1}\,dx = \int \frac{x^4-1+1}{x^2+1}\,dx = \int \frac{(x^2+1)(x^2-1)+1}{x^2+1}\,dx$

$= \int (x^2-1)\,dx + \int \frac{dx}{x^2+1} = \frac{x^3}{3} - x + \arctan x + C$

יג. $\int \frac{dt}{t^2-3t+3} = \int \frac{dt}{(t-\frac{3}{2})^2+\frac{3}{4}} = \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{\sqrt{3}(t-\frac{3}{2})}{2}\right) + C$

$9 - 4\cdot 3 < 0$

גמ' 3

ד. $\int \frac{5x^2-11x}{(x-1)^2(x^2+2)}dx = \int \frac{dx}{x-1} - 2\int (x-1)^{-2}dx + \int \frac{-x+6}{x^2+2}dx$

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{5x^2-11x}{(x-1)^2(x^2+2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+2} \\ 5x^2-11x = A(x-1)(x^2+2) + B(x^2+2) + (Cx+D)(x-1)^2 \\ A=1,\ B=-2,\ C=-1,\ D=6 \end{array}\right\}$$

$$= \ln|x-1| + 2(x-1)^{-1} - \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+2}dx + 6\int \frac{dx}{x^2+2} =$$

$$= \ln|x-1| + \frac{2}{x-1} - \frac{1}{2}\ln(x^2+2) + \frac{6}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}} + C$$

10. $\int \frac{12x+5}{x^2(x^2+2x+5)}dx = 2\int \frac{dx}{x} + \int \frac{dx}{x^2} - \int \frac{2x+5}{x^2+2x+5}dx$

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{12x+5}{x^2(x^2+2x+5)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{Cx+D}{x^2+2x+5} \\ A=2,\ B=1,\ C=-2,\ D=-5 \end{array}\right\}$$

$$= 2\ln|x| - \frac{1}{x} - \int \frac{(2x+2)+3}{x^2+2x+5}dx =$$

$$= 2\ln|x| - \frac{1}{x} - \int \frac{(2x+2)dx}{x^2+2x+5} - 3\int \frac{dx}{(x+1)^2+2^2} =$$

$$= 2\ln|x| - \frac{1}{x} - \ln|x^2+2x+5| - \frac{3}{2}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{2} + C$$

.2

א. $\int_1^4 \left(\sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right)dx = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + x^{\frac{1}{2}}\Big|_1^4 =$

$$\frac{16}{3} + 2 - \left(\frac{2}{3}+1\right) = \frac{17}{3}$$

ב. $\int_1^0 x(2x+5)dx = \int_1^0 (2x^2+5x)dx = \frac{2x^3}{3} + \frac{5x^2}{2}\Big|_1^0 =$

$$= -\left(\frac{2}{3} + \frac{5}{2}\right) = -\frac{19}{6}$$

שא' 4

ג. $\int_1^0 |2x-1|dx = \int_1^{\frac12}(2x-1)dx + \int_{\frac12}^0 (1-2x)dx =$

$|2x-1| = 2x-1 \Leftarrow x > \frac12$ כי, $2x-1>0$ עבור

$|2x-1| = -(2x-1) \Leftarrow x < \frac12$ עבור

$$= (x^2-x)\Big|_1^{\frac12} + (x-x^2)\Big|_{\frac12}^0 = \left(\frac14 - \frac12 - 1 + 1\right) + \left(0 - \frac12 + \frac14\right)$$

$$= \frac12 - 1 = -\frac12$$

ד. $\int_{-1}^2 \frac{t^2}{\sqrt{t+2}}dt = \int \frac{(u-2)^2}{\sqrt{u}}du = \int \frac{u^2-4u+4}{u^{\frac12}}du =$

$u = t+2 \to t^2 = (u-2)^2$

$du = dt$

$$= \int\left(u^{\frac32} - 4u^{\frac12} + 4u^{-\frac12}\right)du = \frac{2u^{\frac52}}{5} - \frac{2\cdot4\cdot u^{\frac32}}{3} + 4\frac{u^{\frac12}}{\frac12} =$$

$$= \frac25(t+2)^{\frac52} - \frac83(t+2)^{\frac32} + 8(t+2)^{\frac12}\Big|_{-1}^2 =$$

$$= \left(\frac25\cdot32 - \frac{64}{3} + 16 - \frac25 + \frac83 - 8\right) = \frac{26}{15}$$

ה. $\int_1^b x^2\ln^2 x\,dx = \frac{x^3\ln^2 x}{3} - \frac23\int_1^b x^2\ln x\,dx =$

$u(x) = \ln^2 x \to u'(x) = 2\ln x\cdot\frac1x$ $\qquad u(x) = \ln x \quad u'(x) = \frac1x$

$v'(x) = x^2 \to v(x) = \frac{x^3}{3}$ $\qquad v'(x) = x^2 \quad v(x) = \frac{x^3}{3}$

$$= \frac{x^3\ln^2 x}{3}\Big|_1^b - \frac23\left[\frac{x^3\ln x}{3}\Big|_1^b - \frac13\int_1^b x^2dx\right] =$$

$$= \frac{b^3\ln^2 b}{3} - \frac29 b^3\ln b + \frac29\cdot\frac{x^3}{3}\Big|_1^b =$$

$$= \frac{b^3\ln^2 b}{3} - \frac29 b^3\ln b + \frac{2}{27}(b^3-1)$$

5 נקודות

3. הוכח כי: $x-\frac{x^2}{2} < \ln(1+x) < x$

לכל $x>0$.

נסמן: $f(x)=\ln(1+x)$. (שארית לגרנז') בפיתוח מקלורן

של $\ln(1+x)$: $\ln(1+x)=x+R_1(x)$

כאשר: $R_1(x)=\frac{f''(c)}{2!}\cdot x^2=-\frac{x^2}{2!(1+c)^2}<0$

ולכן $0<c<x$, לכן: $\ln(1+x)<x$.

מצד שני: $\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+R_2(x)$

כאשר: $R_2(x)=\frac{f'''(c)}{3!}\cdot x^3=\frac{2x^3}{3!(1+c)^3}>0$,

מכאן ש: $x-\frac{x^2}{2}<\ln(1+x)$.

לסיכום, $x-\frac{x^2}{2}<\ln(1+x)<x$ לכל $x>0$.

תאריך הגשה: 9/11/03

חדו"א א'
תרגיל בית מס' 1

1. הוכיחו שאם n טבעי כך ש: 200 <n אזי $\left|\frac{3n+1}{2n+3}-\frac{3}{2}\right|<\frac{1}{100}$

2. הוכיחו את האי שויון הבא: $\left||x|-|y|\right|\le|x+y|$

3. יהי a>1 לכן $\sqrt[n]{a}>1$, $n\in N$. **נסמן:** $\sqrt[n]{a}=1+x_n$ **וזאת עבור** $x_n>0$.
הוכיחו כי:

א. $x_n<\frac{a-1}{n}$ **ב.** $\sqrt[n]{a}<\frac{a+n-1}{n}$

4. הוכיחו באמצעות אינדוקציה מתמטית כי לכל n טבעי מתקיים:

א. $1\cdot2\cdot3+2\cdot3\cdot4+\ldots+n(n+1)(n+2)=\frac{n}{4}(n+1)(n+2)(n+3)$

ב. $1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3=\frac{n^2}{4}(n+1)^2$

ג. $\frac{1}{1\cdot5}+\frac{1}{5\cdot9}+\frac{1}{9\cdot13}+\ldots+\frac{1}{(4n-3)(4n+1)}=\frac{n}{4n+1}$

5. פתרו את אי השיויונים הבאים:

א. $2x+3<3\left|2x-x^2\right|$

ב. $\left|\frac{x-1}{x+2}\right|\le2$

ג. $\frac{2}{x^2-1}\le\frac{1}{x+1}$

6. נתון: $|x-3|<\frac{1}{10}$. **הוכיחו כי מתקיים:** $\left|\frac{x^2-5x+6}{2x+3}\right|<\frac{1}{80}$.

7. א. מצאו לאילו ערכי m אין למשוואה הבאה שורשים ממשיים:

$$(m^2-1)x^2+2(m+1)x+5=0$$

ב. מצאו לאילו ערכי m יש למשוואה הבאה שני שורשים ממשיים מתלכדים:

$$(m-4)x^2+6x+m+4=0$$

בהצלחה!

תפנ'א א

פתרון תרגיל בית מס' 1

1)

$$\left|\frac{3n+1}{2n+3}-\frac{3}{2}\right| = \left|\frac{2(3n+1)-3(2n+3)}{2(2n+3)}\right| = \left|\frac{6n+2-6n-9}{2(2n+3)}\right| =$$

$$\left|\frac{-7}{2(2n+3)}\right| = \frac{7}{|2(2n+3)|} \underset{\substack{\uparrow \\ n>200 \\ \text{לכן המכנה חיובי}}}{=} \frac{7}{4n+6} < \frac{7}{4n} < \frac{8}{4n} = \frac{2}{n} \underset{\substack{\uparrow \\ n>200}}{<} \frac{1}{100}$$

2)

$$|x| = |x+y-y| = |(x+y)+(-y)| \underset{\substack{\uparrow \\ \text{א.ש.מ}}}{\le} |x+y|+|y|$$

$$\Rightarrow |x| \le |x+y|+|y| \Rightarrow |x|-|y| \le |x+y|$$

באופן דומה, $|y| = |y+x-x| \le |y+x|+|x|$

$$\Rightarrow |y|-|x| \le |x+y| \Rightarrow -|x+y| \le |x|-|y|$$

קיבלנו, $-|x+y| \le |x|-|y| \le |x+y|$

לכן נסיק כי $\big||x|-|y|\big| \le |x+y|$

3) א) $\sqrt[n]{a}>1$ ולכן $x_n>0$, לכן עבור $\sqrt[n]{a}=1+x_n \Leftarrow a=(1+x_n)^n$

לפי אי שוויון ברנולי נקבל $(1+x_n)^n \ge 1+n\cdot x_n \Leftarrow a \ge 1+x_n$

לכן $\frac{a-1}{n} > x_n$

ב)

$$\sqrt[n]{a} = 1+x_n \underset{\substack{\uparrow \\ \text{לפי סעיף א'}}}{<} 1+\frac{a-1}{n} = \frac{n+a-1}{n}$$

4) א) בדיקה עבור n=1: $1\cdot2\cdot3 \overset{?}{=} \frac{1}{4}(2)(3)(4) \Rightarrow 6=6\ \checkmark$

נניח נכונות עבור n=k טבעי כלומר נניח מתקיים:

$$1\cdot2\cdot3+2\cdot3\cdot4+\dots+k(k+1)(k+2)=\frac{k}{4}(k+1)(k+2)(k+3)$$

נוכיח נכונות עבור n=k+1 כלומר צ"ל:

$$1\cdot2\cdot3+\dots+k(k+1)(k+2)+(k+1)(k+2)(k+3)=\frac{k+1}{4}(k+2)(k+3)(k+4)$$

אגף שמאל $= \underbrace{1\cdot2\cdot3+\dots+k(k+1)(k+2)}+(k+1)(k+2)(k+3) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{לפי ה"א}}}{=}$

$$= \frac{k}{4}(k+1)(k+2)(k+3)+(k+1)(k+2)(k+3) =$$

$$= (k+1)(k+2)(k+3)\left[\frac{k}{4}+1\right] = (k+1)(k+2)(k+3)\frac{(k+4)}{4} =$$ אגף ימין

ב) בדיקה עבור $n=1$: $1^3 \overset{?}{=} \frac{1^2}{4}\cdot(1+1)^2 \Rightarrow 1=1$ ✓

נניח נכונות עבור $n=k$ טבעי כלומר נניח מתקיים:

$$1^3+2^3+\dots+k^3=\frac{k^2}{4}(k+1)^2$$

נוכיח נכונות עבור $n=k+1$ כלומר צ"ל:

$$1^3+2^3+\dots+k^3+(k+1)^3=\frac{(k+1)^2}{4}(k+2)^2$$

$$\text{אגף שמאל}=\underbrace{1^3+2^3+\dots+k^3}+(k+1)^3 \underset{\text{לפי הנ"ח}}{=} \frac{k^2}{4}(k+1)^2+(k+1)^3=$$

$$=(k+1)^2\left[\frac{k^2}{4}+(k+1)\right]=(k+1)^2\left[\frac{k^2+4k+4}{4}\right]=$$

$$=(k+1)^2\left[\frac{(k+2)^2}{4}\right]=\frac{(k+1)^2}{4}(k+2)^2=\text{אגף ימין}$$

ג) בדיקה עבור $n=1$: $\frac{1}{1\cdot5}\overset{?}{=}\frac{1}{5} \Rightarrow \frac{1}{5}=\frac{1}{5}$ ✓

נניח נכונות עבור $n=k$ טבעי כלומר נניח מתקיים:

$$\frac{1}{1\cdot5}+\frac{1}{5\cdot9}+\dots+\frac{1}{(4k-3)(4k+1)}=\frac{k}{4k+1}$$

נוכיח נכונות עבור $n=k+1$ טבעי כלומר צ"ל:

$$\text{אגף שמאל}=\underbrace{\frac{1}{1\cdot5}+\dots+\frac{1}{(4k-3)(4k+1)}}+\frac{1}{(4k+1)(4k+5)}=\frac{k+1}{4k+5}$$

$$=\frac{k}{4k+1}+\frac{1}{(4k+1)(4k+5)}=\frac{k(4k+5)+1}{(4k+1)(4k+5)}=$$

$$=\frac{4k^2+5k+1}{(4k+1)(4k+5)}=\frac{(4k+1)(k+1)}{(4k+1)(4k+5)}=\frac{k+1}{4k+5}=\text{אגף ימין}$$

5) א)

$$\begin{cases}2x-x^2\geq0\\2x+3<3(2x-x^2)\end{cases} \quad \text{או} \quad \begin{cases}2x-x^2<0\\2x+3<-3(2x-x^2)\end{cases}$$

$$\begin{cases}x(2-x)\geq0\\2x+3<6x-3x^2\end{cases} \quad \text{או} \quad \begin{cases}x(2-x)\ \ 0\\2x+3<-6x+3x^2\end{cases}$$

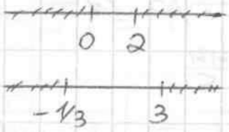
$$\begin{cases}x(2-x)\geq0\\3x^2-4x+3<0\end{cases} \quad \text{או} \quad \begin{cases}x(2-x)<0\\3x^2-8x-3>0\end{cases}$$

$$x_{1,2}=\frac{4\mp\sqrt{16-36}}{6} \quad\quad x_{1,2}=\frac{8\mp\sqrt{64-36}}{6} \quad \begin{matrix}x_1=3\\x_2=-\frac{1}{3}\end{matrix}$$

$\Downarrow$

$\Delta<0$ – אין פתרון

$$\begin{cases} x(2-x)<0 \\ 3(x-3)(x+\frac{1}{3})>0 \end{cases}$$



$x<-\frac{1}{3}$ או $x>3$ או $\Downarrow$ $\emptyset$ (קב' ריקה)

תשובה סופית: $x<-\frac{1}{3}$ או $x>3$

ב) $-2 \le \frac{x-1}{x+2} \le 2$ כאשר ת.ה $= \{x \ne -2\}$

נפרק בין 2 מקרים:

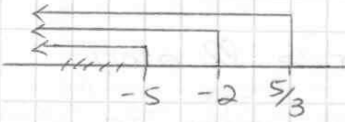
$x<-2$: או $x>-2$:

$-2(x+2) \ge x-1 \ge 2(x+2)$ | $-2(x+2) \le x-1 \le 2(x+2)$

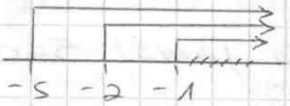
$-2x+4 \ge x-1 \ge 2x+4$ | $-2x-4 \le x-1 \le 2x+4$

$5 \ge 3x$ גם $-5 \ge x$ | $-3 \le 3x$ גם $-5 \le x$

$\frac{5}{3} \ge x$ | $-1 \le x$



$x \le -5$



$x \ge -1$

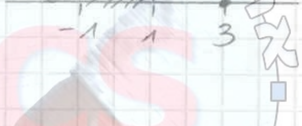
תשובה סופית: $x \ge -1$ או $x \le -5$

ג) $\frac{2}{x^2-1} \le \frac{1}{x+1} \Rightarrow \frac{2}{(x-1)(x+1)} - \frac{1}{x+1} \le 0 \Rightarrow$

$\frac{2-(x-1)}{(x-1)(x+1)} \le 0 \Rightarrow \frac{3-x}{(x-1)(x+1)} \le 0$

ת.ה $= \{x \ne \mp 1\}$

$$\begin{cases} 3-x \ge 0 \\ (x-1)(x+1)<0 \end{cases} \quad \text{או} \quad \begin{cases} 3-x \le 0 \\ (x-1)(x+1)>0 \end{cases}$$



$-1<x<1$

$x \ge 3$

תשובה סופית: $-1<x<1$ או $x \ge 3$

6) נתון $|x-3|<\frac{1}{10}$ $\Rightarrow$ $-\frac{1}{10}<x-3<\frac{1}{10}$ $\Rightarrow$ $2\frac{9}{10}<x<3\frac{1}{10}$

לכן, $\frac{9}{10}<x-2<1\frac{1}{10}$ ז"א $|x-2|<\frac{11}{10}$

כמו כן, $5\frac{4}{5}<2x<6\frac{1}{5}$ $\Rightarrow$ $8\frac{4}{5}<2x+3<9\frac{1}{5}$ $\Rightarrow$

$|2x+3|>\frac{44}{5}$ $\Rightarrow$ $\frac{1}{|2x+3|}<\frac{5}{44}$

סה"כ: $\left|\frac{x^2-5x+6}{2x+3}\right|=\left|\frac{(x-2)(x-3)}{(2x+3)}\right|<\frac{1}{10}\cdot\frac{11}{10}\cdot\frac{5}{44}=\frac{1}{80}$

7) א) כדי שלא יהיו שורשים ממשיים (פרוש $\Delta<0$) כלומר:

$\Delta=(2(m+1))^2-4(m^2-1)\cdot 5<0$

$4(m^2+2m+1)-20(m^2-1)<0$

$4m^2+8m+4-20m^2+20<0$

$0<16m^2-8m-24 \Rightarrow 0<2m^2-m-3$

$m_{1,2}=\frac{1\mp\sqrt{1+24}}{4}=\frac{1\mp 5}{4}$ $\begin{cases} m_1=\frac{3}{2} \\ m_2=-1 \end{cases}$

$m<-1$ או $m>\frac{3}{2}$

נציב m כי עבור $m=-1$ נקבל $5=0$ ולכן שאין למשוואה כלל שורשים ממשיים, לכן תשובה סופית: $m>\frac{3}{2}$ או $m\le -1$

ב) כדי שיהיו 2 שורשים מתלכדים (פרוש $\Delta=0$) כלומר:

$\Delta=36-4(m-4)(m+4)=0$

$36-4(m^2-16)=0$

$36-4m^2+64=0$

$4m^2=100$

$m^2=25 \Rightarrow m=\mp 5$

תשובה סופית: $m=\mp 5$

תאריך הגשה: 16/11/03

חדו"א א'
<u>תרגיל בית מס' 2</u>

1. תהיינה $A,B\subset R$ קב' חסומות מלרע, כאשר a=infA, b=infB.
נגדיר: $C=\{z|\ \ z=x+y,\quad x\in A, y\in B\}$
א. הוכיחו כי C חסומה מלרע
ב. מצאו infC

2. תהי $A\subset R$ קב' חסומה, כאשר n=infA, m=supA.
נגדיר: $B=\{y|\ \ y=xc,\quad x\in A,\quad c>0\}$
א. האם B קב' חסומה
ב. אם כן, מצאו supB

3. יהיו S,T קב' חסומות מלעיל, כאשר t= sup(T), s=sup(S).
הוכיחו כי: $\sup(S\cup T)=\max\{s,\quad t\}$

4. נגדיר:
א. $A=\left\{x\in R\middle|\ \ x=\frac{(-1)^n}{n},\quad n\in N\right\}$. מצאו והוכיחו minA, maxA.
ב. $A=\left\{x\in R\middle|\ \ x=(-1)^n+\frac{n}{n+1},\quad n\in N\right\}$. מצאו minA, supA.

5. עבור הקב' הבאות מצאו minA, maxA ,infA, supA אם הם קיימים:
א. $A=\{x\in R|\ \ x^2-13x+30\le 0\}$.
ב. $A=\{x\in R|\ \ x^2-13x+30<0\}$.
ג. $A=\{x\in R|\ \ x^2-13x+30\ge 0\}$.

6. הוכיחו כי קבי המס' השלמים (Z) אינה חסומה.

7. הוכיחו כי $\inf\left\{(-1)^{n^2}+\frac{1}{n},\quad n\in N\right\}=-1$.

8. הוכיחו או הפריכו ע"י דוגמא נגדית:

א. אם A,B קב' לא חסומות. אזי $A \cap B$ קב' לא חסומה.

ב. תהי A קב'. נגדיר $|A| = \{|a|, \quad a \in A\}$:

- אם A חסומה מלעיל אז |A| חסומה מלעיל.
- אם |A| חסומה מלעיל אז A חסומה מלעיל.

ג. סכום של 2 מס' אי-רציונלים הוא מס' רציונלי.

ד. מכפלה של 2 מס' אי-רציונלים הוא מס' רציונלי.

9. פתרו את האי-שוויונים הבאים:

א. $\frac{(x^4 - 1)(x^3 - 7x^2 + 12x)}{x^3 - 1} \geq 0$

ב. $\frac{(x^4 - 13x^2 + 36)(x - 4)^2}{x^2 - 12x + 27} < 0$

בהצלחה!

תרגיל א'

פתרון תרגיל בית מס' 2

1) א) לפי הנתונים מתקיים: לכל $x\in A$, $x\geq a$, ולכל $y\in B$, $y\geq b$.

לכן, לכל $z\in C$, $z=x+y\geq a+b$ כלומר $a+b$ חסם מלרע של C

ב) נוכיח כי $\inf(C)=a+b$

כלומר צ"ל: $\forall\varepsilon>0,\ \exists z_\varepsilon\in C:\ z_\varepsilon<a+b+\varepsilon$

נתון $a=\inf(A)$ $\Leftarrow$ קיים $x_\varepsilon\in A$ כך ש- $x_\varepsilon<a+\frac{\varepsilon}{2}$

$b=\inf(B)$ $\Leftarrow$ קיים $y_\varepsilon\in B$ כך ש- $y_\varepsilon<b+\frac{\varepsilon}{2}$.

יהי $\varepsilon>0$. נבחר $z_\varepsilon=x_\varepsilon+y_\varepsilon$ כאשר $z_\varepsilon\in C$ ולכן נקבל:

$z_\varepsilon<a+b+\varepsilon \Leftarrow z_\varepsilon=x_\varepsilon+y_\varepsilon<a+\frac{\varepsilon}{2}+b+\frac{\varepsilon}{2}=a+b+\varepsilon$

2) א) לפי הנתונים נסיק כי לכל $x\in A$ מתקיים $n\leq x\leq m$.

$c>0$ ולכן $n\cdot c\leq x\cdot c\leq m\cdot c$ לכל $x\cdot c\in B$, כלומר $m\cdot c$ חסם מלעיל של B.

ב) נוכיח כי $\sup(B)=m\cdot c$

נתון $m=\sup(A)$ $\Leftarrow$ קיים $x_\varepsilon\in A$ כך ש- $x_\varepsilon>m-\frac{\varepsilon}{c}$ $(c>0)$

יהי $\varepsilon>0$: נבחר $y_\varepsilon=x_\varepsilon\cdot c$ כאשר $y_\varepsilon\in B$ ולכן נקבל:

$y_\varepsilon>mc-\varepsilon \Leftarrow y_\varepsilon=x_\varepsilon\cdot c>(m-\frac{\varepsilon}{c})\cdot c=mc-\varepsilon$

3) א) נניח מבלי הגבלת הכלליות כי $s>t$ כלומר $z=\max\{s,t\}$

נתון $s=\sup(S)$ $\Leftarrow$ s חסם מלעיל של S $\Leftarrow$ לכל $x\in S$, $x\leq s$

$t=\sup(T)$ $\Leftarrow$ t חסם מלעיל של T $\Leftarrow$ לכל $y\in T$, $y\leq t$

בנוסף, $\left\{\begin{array}{l} s>t \\ t\geq y\end{array}\right. \Leftarrow s>t\geq y \Leftarrow$ לכל $y\in T$, $y\leq s$

קיבלנו: $\left\{\begin{array}{l} s\geq x \text{ לכל } x\in S \\ s\geq y \text{ לכל } y\in T\end{array}\right. \Leftarrow$ $s\geq z$ לכל $z\in S\cup T$

לכן, z חסם מלעיל של $S\cup T$.

ב) נוכיח כי $\sup(S\cup T)=z$

כלומר צ"ל: $\forall\varepsilon>0,\ \exists z_\varepsilon\in S\cup T:\ z_\varepsilon>s-\varepsilon$

נתון: $s=\sup(S)$ $\Leftarrow$ קיים $x_\varepsilon\in S$ כך ש- $x_\varepsilon>s-\varepsilon$

סוף של שאלה 2

$x_\varepsilon \in S$ או $x_\varepsilon \in S\cup T$ לכן נוכל לבחור $z_\varepsilon = x_\varepsilon$ (כלומר,

מהקבוצה $S\cup T$ נבחר מתוכה z_ε את אותו איבר שנפל בקטע $(s-\varepsilon, s)$).

קיבלנו שלכל $\varepsilon>0$ קיים $z_\varepsilon \in S\cup T$ כך ש: $z_\varepsilon > s-\varepsilon$

4) א) נתבונן באיברי הקב' $A=\{-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \ldots\}$

ונחשוב כי $\max(A)=\frac{1}{2}$ ①, $\min(A)=-1$ ②

① $\frac{1}{2}\in A$ ולכל $x\in A$ מתקיים: $x=\frac{(-1)^n}{n} \le \overbrace{\frac{1}{n}}^{n \text{ זוגי}} \le \frac{1}{2}$

② $-1\in A$ ולכל $x\in A$ מתקיים: $x=\frac{(-1)^n}{n} \ge \underbrace{-\frac{1}{n}}_{n \text{ אי-זוגי}} \ge -1$

ב) $\min(A)=-\frac{1}{2}$, $\sup(A)=2$

5) א) נמצא את איברי הקב': $x^2-13x+30\le 0 \Leftarrow (x-3)(x-10)\le 0$

לכן $3\le x\le 10$ כלומר $A=[3,10]$

$\inf(A)=3$, $\sup(A)=10$

$3,10\in A$ לכן $\min(A)=3$, $\max(A)=10$

ב) $A=(3,10)$. לכן $\min(A)=3$, $\sup(A)=10$

$3,10\notin A$ לכן לקב' A הנתונה אין max ואין min.

ג) $x^2-13x+30\ge 0 \Leftarrow (x-3)(x-10)\ge 0 \Leftarrow x\ge 10$ או $x\le 3$

כלומר $A=(-\infty,3)\cup(10,\infty)$

לכן לקב' זו אין sup, inf, max, min.

7) $A=\{(-1)^{n^2}+\frac{1}{n}, n\in\mathbb{N}\}$. נוכיח כי $\inf(A)=-1$:

א) לכל $n\in\mathbb{N}$ מתקיים: $(-1)^{n^2}+\frac{1}{n} \ge -1+\frac{1}{n} \ge -1$

לכן -1 חסם מלרע של A

ב) צ"ל: $\forall\varepsilon>0, \ \exists x_\varepsilon\in A: \ x_\varepsilon < -1+\varepsilon$

$x_\varepsilon = (-1)^{n^2}+\underbrace{\frac{1}{n}}_{\text{\frac{1}{n} ברוטש}} \le 1+\frac{1}{n} < -1+\varepsilon \implies \frac{1}{n} < \varepsilon-2$

כלומר, צריך למצוא $n\in\mathbb{N}$ כך ש: $n > \frac{1}{\varepsilon-2}$

אם ניקח $n_\varepsilon = \left[\frac{1}{\varepsilon-2}\right]+1$ נקבל $x_\varepsilon < -1+\varepsilon$ כנדרש

6) קב׳ חסומה אם״ם היא חסומה מלעיל ומלרע.

נראה כי $\mathbb{Z}$ לא חסומה מלעיל ונסיק מכך ש-$\mathbb{Z}$ אינה חסומה.

נניח בשלילה כי $\mathbb{Z}$ חסומה מלעיל כלומר קיים $M\in\mathbb{R}$ כך ש:

$z\le M$ לכל $z\in\mathbb{Z}$.

אם נבחר $x=[M]+1$ אזי ברור ש-$x\in\mathbb{Z}$ אבל מתקיים

$x>M$ $\Leftarrow$ קיבלנו סתירה לכך ש-M חסם של $\mathbb{Z}$

לפי הג׳ ערך שלם

לכן, ההנחה לא נכונה $\Leftarrow$ $\mathbb{Z}$ אינה חסומה מלעיל

$\Leftarrow$ $\mathbb{Z}$ אינה חסומה.

8) א) לא נכון – דוגמא נגדית: $A=(-\infty,2]$, $B=[0,\infty)$

A,B קב׳ לא חסומות אבל $A\cap B=[0,2]$ קב׳ חסומה.

ב) ① לא נכון – דוגמא נגדית: $A=\{-1,-2,-3\ldots\}$

A חסומה מלעיל ע״י 0 אבל $|A|=\{1,2,3,\ldots\}$ אינה חסומה מלעיל

② נכון – הוכחה:

אם $|A|$ חסומה מלעיל אז קיים $M\in\mathbb{R}$ כך שלכל $a\in A$

מתקיים $|a|<M$, לכן A חסומה ובפרט חסומה מלעיל.

ג) לא נכון – דוגמא נגדית: $a=\sqrt{2}$, $b=-\sqrt{2}$

$a,b\notin\mathbb{Q}$ אבל $a+b=0\in\mathbb{Q}$

ד) לא נכון – דוגמא נגדית: $a=\sqrt{2}$, $b=-\sqrt{2}$

$a,b\notin\mathbb{Q}$ אבל $a\cdot b=-2\in\mathbb{Q}$

9) א) $\dfrac{(x^4-1)(x^3-7x^2+12x)}{x^3-1}\ge 0$ $\quad D:\{x\neq 1\}$

$$\Rightarrow \frac{(x^2+1)(x+1)(x-1)\cdot x\,(x^2-7x+12)}{x^3-1}\ge 0 \quad /:(x^2+1)>0$$

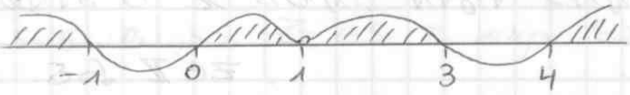
$$\Rightarrow \frac{(x+1)(x-1)\cdot x\,(x-4)(x-3)}{x^3-1}\ge 0 \quad /\cdot(x^3-1)^2$$

$$\Rightarrow (x+1)(x-1)\cdot x\,(x-4)(x-3)(x^3-1)\ge 0$$

$x_{1,2}=\mp 1$ $\quad x_3=0$ $\quad x_4=4$ $\quad x_5=3$ $\quad x_6=1$

נשתמש ב"שיטת הנחש":

(זכור כי $x\neq 1$ ונשים לב כי $x=1$ שורש כפול.



מדובר על אי שוויון מהצורה '$\geq$' לכן נקח שורשים וכולל!

תשובה סופית: $x\in(-\infty,-1]\cup[0,1)\cup(1,3]\cup[4,\infty)$

$x\leq -1$ או $0\leq x<1$ או $1<x\leq 3$ או $x\geq 4$ או

ג) $\dfrac{(x^4-13x^2+36)(x-4)^2}{x^2-12x+27}<0$ $\qquad D:\{x\neq 3,9\}$

$\Longrightarrow \dfrac{(t^2-13t+36)(x-4)^2}{(x-9)(x-3)}<0 \quad / \cdot (x-3)^2(x-9)^2$

נציב $t=x^2$

$\Longrightarrow (t-4)(t-9)(x-4)^2(x-9)(x-3)<0$

$\Longrightarrow (x-2)(x+2)(x-3)(x+3)(x-4)^2(x-9)(x-3)<0$

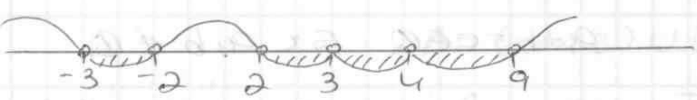
נציב חזרה

$x_{1,2}=\mp 2 \quad x_{3,4}=\mp 3 \quad x_{5,6}=4 \quad x_7=9 \quad x_8=3$

נשתמש ב"שיטת הנחש":

(זכור כי $x\neq 3,9$ ונשים לב כי $x_{4,8}=3$ ו- $x_{5,6}=4$ הם

שורשים כפולים



מדובר על אי שוויון מהצורה '$<$' לכן נחפש קטעים פתוחים

תשובה סופית: $x\in(-3,-2)\cup(2,3)\cup(3,4)\cup(4,9)$

או בצורה שקולה:

$-3<x<-2$ או $2<x<3$ או $3<x<4$ או $4<x<9$

תאריך הגשה: 23/11/03

חדו"א א'

תרגיל בית מס' 3

1. מצאו תחום הגדרה של הפונקציה:

א. $f(x)=\ln(\sin\frac{\pi}{x})$ ג. $f(x)=tgx$

ב. $f(x)=\sqrt[4]{\ln\frac{2x}{x-1}}$ ד. $f(x)=\sqrt[3]{2x^2-5x+3}$

2. הוכיחו כי הפונקציות הבאות חסומות בתחום הנתון:

א. $x\in R\,,\ f(x)=\frac{x}{x^2+1}$ ב. $x\geq 2\ ,\ f(x)=\frac{x+2}{2x-3}$

3. הוכיחו כי הפונקציה $f(x)=\frac{1}{x}$ לא חסומה בתחום $0<x<1$.

4. הוכיחו כי סכום של שתי פונ' אי-זוגיות היא פונ' אי-זוגית.

5. הוכיחו לפי הגדרת הגבול כי מתקיים:

א. $\lim\limits_{n->\infty}\frac{3+(-1)^n}{n}=0$ ד. $\lim\limits_{n->\infty}\frac{\sqrt{n^2-1}}{n^2-3}=0$

ב. $\lim\limits_{n->\infty}\frac{n^2-n+1}{3n^2+2n+1}=\frac{1}{3}$ ה. $\lim\limits_{n->\infty}\sqrt[3]{n^3-n}-n=0$

ג. $\lim\limits_{n->\infty}\left(\sqrt{n^2+1986}-\sqrt{n^2+1}\right)=0$ ו. $\lim\limits_{n->\infty}\frac{2n+1}{3n+2}\neq 1$

6. תהי $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה ומתקיים $\lim\limits_{n->\infty}|a_n|=0$, הוכיחו כי $\lim\limits_{n->\infty}a_n=0$.

7. הוכיחו או הפריכו ע"י דוגמא נגדית:

א. אם $\lim\limits_{n->\infty}a_n{}^2=L$ אזי $\lim\limits_{n->\infty}a_n=\sqrt{L}$.

ב. אם $\lim\limits_{n->\infty}(a_n+b_n)$ קיים, אזי קיימים הגבולות $\lim\limits_{n->\infty}a_n$, $\lim\limits_{n->\infty}b_n$ ומתקיים $\lim\limits_{n->\infty}a_n+\lim\limits_{n->\infty}b_n=\lim\limits_{n->\infty}(a_n+b_n)$.

ג. אם לכל n, $a_n<b_n$ ומתקיים $\lim\limits_{n->\infty}a_n=A$, $\lim\limits_{n->\infty}b_n=B$ אזי $A<B$.

ד. סכום של שתי פונ' מונוטוניות עולות היא פונ' מונוטונית עולה.

ה. כפל של שתי פונ' מונוטוניות עולות היא פונ' מונוטונית עולה.

ו. אם $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרות חסומות אז הסדרה $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ המוגדרת $c_n=a_n+b_n$ גם חסומה.

בהצלחה!

חדו"א א'

פתרון תרגיל בית מס' 3

1) א) הערך בתוך ה-log צריך להיות גדול מ-0, לכן נדרוש $\sin\frac{\pi}{x} > 0$ ו- $x \neq 0$

כלומר: $0 + 2\pi k < \frac{\pi}{x} < \pi + 2\pi k$. $(k \in \mathbb{N})$

$\Leftarrow$ $2k < \frac{1}{x} < 1 + 2k$ $(k \in \mathbb{N})$

$\Leftarrow$ $\frac{1}{2k+1} < x < \frac{1}{2k}$ $(k \in \mathbb{N})$

ב) נדרוש שהביטוי בתוך השורש יהיה חיובי (שורש זוגי), שהערך בתוך ln יהיה חיובי והמכנה לא יתאפס

כלומר:

① $\frac{2x}{x-1} > 0 \Rightarrow \begin{cases} 2x > 0 \\ x-1 > 0 \end{cases}$ או $\begin{cases} 2x < 0 \\ x-1 < 0 \end{cases} \Rightarrow x > 1$ או $x < 0$

② $\ln\frac{2x}{x-1} > 0 \Rightarrow \frac{2x}{x-1} > 1 \Rightarrow \begin{cases} x > 1 \\ 2x > x-1 \end{cases}$ או $\begin{cases} x < 1 \\ 2x < x-1 \end{cases}$

$\Rightarrow x > 1$ או $x < -1$

③ $x \neq 1$

לכן ת.ה = $\{ x < -1$ או $x > 1 \}$

ג) $tg\,x = \frac{\sin x}{\cos x}$ לכן $tg\,x$ לא מוגדרת בנקו' בהן $\cos x = 0$

לכן נדרוש: $\begin{cases} x \neq -\frac{\pi}{2} + 2\pi k \\ x \neq -\frac{3\pi}{2} + 2\pi k \end{cases}$ $(k \in \mathbb{Z})$

$\begin{cases} x \neq \frac{\pi}{2}(2k-1) \\ x \neq \frac{\pi}{2}(2k-3) \end{cases} \Longrightarrow x \neq \frac{2n-1}{2}\pi, \ n \in \mathbb{Z}$

ד) עבור שורש אי-זוגי:

2) א) נראה כי $\left|\frac{x}{x^2+1}\right| < 1$

$x^2+1 > 0$ לכן נבדוק מתי מתקיים $-x^2-1 \overset{②}{<} x \overset{①}{<} x^2+1$

① $x < x^2+1 \Leftrightarrow 0 < x^2 - x + 1 \Leftarrow \Delta < 0$ (אין שורשים) ומקדם של x^2 חיובי

לכן האי שוויון מתקיים לכל $x \in \mathbb{R}$

3 [illegible]

② $-x^2-1<x \Rightarrow 0<x^2+x+1 \Rightarrow \Delta<0$

ומקדם של x^2 חיובי

לכן אי השוויון מתקיים לכל $x\in\mathbb{R}$

סה"כ קיבלנו שלכל $x\in\mathbb{R}$ $\quad -x^2-1<x<x^2+1$

$\Leftarrow$ לכל $x\in\mathbb{R}$ $\quad \left|\frac{x}{x^2+1}\right|<1$

$\Leftarrow |f(x)|<1 \Rightarrow$ הפונ' חסומה ע"י 1

ג) נראה כי $\left|\frac{x+2}{2x-3}\right|\le 4$

עבור $x\ge 2$ המכנה $2x-3>0$ לכן נבדוק מתי מתקיים

$$-4(2x-3)\le x+2\le 4(2x-3)$$

$$-8x+12\overset{②}{\le} x+2\overset{①}{\le} 8x-12$$

① $x+2\le 8x-12 \Rightarrow 14\le 7x \Rightarrow 2\le x$

② $-8x+12\le x+2 \Rightarrow 10\le 9x \Rightarrow \frac{10}{9}\le x$

לכן התחום המשותף הוא $x\ge 2$

סה"כ קיבלנו שלכל $x\ge 2$ מתקיים $\left|\frac{x+2}{2x-3}\right|\le 4$

③ נניח בשלילה כי $f(x)=\frac{1}{x}$ חסומה בתחום $0<x<1$

כלומר קיים מס' ממשי M כך שלכל $x\in(0,1)$: $\left|\frac{1}{x}\right|<M$

מתקיים: $\left|\frac{1}{x}\right|<M \underset{x>0}{\Rightarrow} \frac{1}{x}<M \Rightarrow x>\frac{1}{M}$ ⊛

נשים ♡ שעבור $0<x<1$ נקבל $\frac{1}{x}>1$ כלומר $M>\left|\frac{1}{x}\right|>1$

נבחר $x_0=\frac{1}{M+1}$, כאשר x_0 ערך בתחום $(0,1)$

כי $M>1$. ולכן $0<\frac{1}{M+1}<1$.

אבל ברור ש- $\frac{1}{M+1}\not>\frac{1}{M}$ ז"א $x_0>\frac{1}{M}$ בסתירה ל- ⊛

לכן ההנחה לא נכונה $\Rightarrow f(x)$ לא חסומה בתחום $(0,1)$.

4) יהיו $f(x),g(x)$ פונ' אי זוגיות המוגדרות מעל D_f, D_g בהתאמה.

נגדיר: $h(x)=f(x)+g(x)$ (נניח כי $D_f=D_g=D_h$

הפונ' f,g,h מוגדרות מעל אותו תחום).

$$h(-x)\underset{\text{עפ"י הג' של } h}{=}f(-x)+g(-x)\underset{\text{פונ' } f,g \text{ זוגיות}}{=}-f(x)-g(x)=-\left(f(x)+g(x)\right)\underset{\text{עפ"י הג' של } h}{=}-h(x)$$

לכל $x\in D_h$ מתקיים $h(-x)=-h(x)$

$\Leftarrow$ $h(x)$ פונ' אי-זוגית.

5) לפי הגדרת הגבול $L=\lim_{n\to\infty} a_n \iff$

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists n_\varepsilon\in\mathbb{N},\ \forall n>n_\varepsilon:\ |a_n-L|<\varepsilon$$

א) $$|a_n-L| = \left|\frac{3+(-1)^n}{n}-0\right| \le \left|\frac{3+1}{n}\right| \underset{n\text{ טבעי}}{=} \frac{4}{n} \underset{\text{דרושה}}{\le} \varepsilon$$

לכן צריך למצוא n כך ש: $\frac{4}{n}<\varepsilon \Leftarrow n>\frac{4}{\varepsilon}$

אם ניקח $n_\varepsilon=\left[\frac{4}{\varepsilon}\right]+1$ אז לכל $n>n_\varepsilon$ נקבל $|a_n-L|<\varepsilon$

ב) $$|a_n-L| = \left|\frac{n^2-n+1}{3n^2+2n+1}-\frac{1}{3}\right| = \left|\frac{3(n^2-n+1)-(3n^2+2n+1)}{3(3n^2+2n+1)}\right| =$$

$$\left|\frac{-5n+2}{9n^2+6n+3}\right| = \frac{|-(5n-2)|}{|9n^2+6n+3|} \underset{n\text{ טבעי}}{=} \frac{5n-2}{9n^2+6n+3} < \frac{5n}{9n^2} = \frac{5}{9n} < \frac{1}{n} \underset{\text{דרושה}}{<} \varepsilon$$

לכן צריך למצוא n כך ש: $\frac{1}{n}<\varepsilon \Leftarrow n>\frac{1}{\varepsilon}$

אם ניקח $n_\varepsilon=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]+1$ אז לכל $n>n_\varepsilon$ נקבל $|a_n-L|<\varepsilon$

ג) $$|a_n-L| = \left(\sqrt{n^2+1986}-\sqrt{n^2+1}-0\right) \underset{\text{(כפל וחילוק בצמוד)}}{=}$$

$$\left|\left(\sqrt{n^2+1986}-\sqrt{n^2+1}\right)\left(\frac{\sqrt{n^2+1986}+\sqrt{n^2+1}}{\sqrt{n^2+1986}+\sqrt{n^2+1}}\right)\right| = \left|\frac{n^2+1986-(n^2+1)}{n^2+1986+n^2+1}\right| \underset{n\text{ טבעי}}{=}$$

$$\frac{1985}{\sqrt{n^2+1986}+\sqrt{n^2+1}} < \frac{1985}{2\sqrt{n^2+1}} < \frac{2000}{2\sqrt{n^2}} = \frac{1000}{n} \underset{\text{דרושה}}{<} \varepsilon$$

לכן צריך למצוא n כך ש: $\frac{1000}{n}<\varepsilon \Leftarrow n>\frac{1000}{\varepsilon}$

אם ניקח $n_\varepsilon=\left[\frac{1000}{\varepsilon}\right]+1$ אז לכל $n>n_\varepsilon$ נקבל $|a_n-L|<\varepsilon$

ד) לכל $n\ge3$ מתקיים $n^2-3>0$ וגם $n^2-3>\frac{n^2}{2}$ (בדקו זאת!)

$$|a_n-L| = \left|\frac{\sqrt{n^2-1}}{n^2-3}\right| = \frac{\sqrt{n^2-1}}{n^2-3} \underset{\text{לפי טענה}}{\le} \frac{\sqrt{n^2}}{n^2/2} = \frac{2}{n} \underset{\text{דרושה}}{<} \varepsilon$$

לכן צריך למצוא n כך ש: $\frac{2}{n}<\varepsilon \Leftarrow n>\frac{2}{\varepsilon}$

אם ניקח $n_\varepsilon=\left[\frac{2}{\varepsilon}\right]+1$ נקבל את האי שוויון הנדרש, אבל

(נזכור כי במהלך הפתרון הנחנו כי $n\ge3$ ולכן ...

$n_\varepsilon=\max\{[\frac{2}{\varepsilon}]+1,3\}$ ואז לכל $n>n_\varepsilon$ נקבל $|a_n-L|<\varepsilon$

ה) לכל $x,y\in\mathbb{R}$ מתקיים: $x-y=\frac{x^3-y^3}{x^2+xy+y^2}$

כאן: $x=\sqrt[3]{n^3-n}$ ו- $y=n$ ולכן

$$|a_n-L|=|(\sqrt[3]{n^3-n}-n)-0|=|\sqrt[3]{n^3-n}-n| \underset{\text{לפי נוסחה}}{=}$$

$$\left|\frac{n^3-n-n^3}{(\sqrt[3]{n^3-n})^2+n\sqrt[3]{n^3-n}+n^2}\right| \underset{\text{n טבעי}}{=} \frac{n}{(\sqrt[3]{n^3-n})^2+n\sqrt[3]{n^3-n}+n^2} \underset{\text{הקטנת המכנה}}{\le}$$

$$\frac{n}{n^2}=\frac{1}{n}\underset{\text{דרישה}}{<}\varepsilon$$

צריך למצוא n כך ש: $\frac{1}{n}<\varepsilon \Leftarrow n>\frac{1}{\varepsilon}$

אם ניקח $n_\varepsilon=[\frac{1}{\varepsilon}]+1$ אזי לכל $n>n_\varepsilon$ נקבל $|a_n-L|<\varepsilon$

ו) לפי הגדרה $\lim_{n\to\infty}a_n\neq L \iff$

$\forall\varepsilon_0>0,\ \exists n_0\in\mathbb{N},\ \exists n>n_0 : |a_n-L|\ge\varepsilon_0$

$$|a_n-L|=\left|\frac{2n+1}{3n+2}-1\right|=\left|\frac{2n+1-3n-2}{3n+2}\right|=\left|\frac{-n-1}{3n+2}\right| \underset{\text{n טבעי}}{=} \frac{n+1}{3n+2}>$$

$$>\frac{n+1}{3n+3}=\frac{n+1}{3(n+1)}=\frac{1}{3} \Longrightarrow |a_n-L|>\frac{1}{3}$$

לכן אם נבחר $\varepsilon_0=\frac{1}{3}$ אזי $|a_n-L|>\varepsilon_0$ כלומר $L=1$ לא הגבול.

7) נתון $\lim_{n\to\infty}|a_n|=0$ לכן לפי הגדרה לכל $\varepsilon>0$ קיים $n_\varepsilon\in\mathbb{N}$

כך שלכל $n>n_\varepsilon$ מתקיים $||a_n|-0|<\varepsilon \Longrightarrow ||a_n||<\varepsilon \Longrightarrow$

$|a_n|<\varepsilon \Longrightarrow |a_n-0|<\varepsilon$

קיבלנו שלכל $\varepsilon>0$ קיים $n_\varepsilon\in\mathbb{N}$ כך שלכל $n\ge n_\varepsilon$ מתקיים:

$|a_n-0|<\varepsilon$ לכן $\lim_{n\to\infty}a_n=0$

8) א) לא נכון - דוגמא נגדית: $a_n=(-1)^n$ מתבדרת

$a_n^2=1$ סדרה קבועה המתכנסת ל- 1

ב) לא נכון - דוגמא נגדית: $a_n=(-1)^n$, $b_n=(-1)^{n+1}$

מתקיים: $\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)=\lim_{n\to\infty}0=0$

אבל לא קיימים הגבולות $\lim_{n\to\infty}a_n$ ו- $\lim_{n\to\infty}b_n$

ג) לא נכון – דוגמא נגדית: $a_n = \frac{1}{n^2}$, $b_n = \begin{cases} 2 & n=1 \\ \frac{1}{n} & n>1 \end{cases}$

אזי לכל $n\in\mathbb{N}$ מתקיים $a_n < b_n$ אבל $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$

ד) נכון – הוכחה:

יהיו $f(x), g(x)$ פונ' מונוטוניות עולות בתחום D, כלומר:

$\forall x_1, x_2 \in D : x_1 \le x_2 \Rightarrow f(x_1) \le f(x_2)$ וגם $g(x_1) \le g(x_2)$

נגדיר $h(x) = f(x) + g(x)$ כאשר $D_h = D$ ואז:

$$\forall x_1, x_2 \in D : \underset{\text{הג' של } h}{h(x_1) =} f(x_1) + g(x_1) \underset{f,g \text{ מונוטוניות עולות}}{\le} f(x_2) + g(x_2) \underset{\text{הג' של } h}{= h(x_2)}$$

לכן קיבלנו כי $\forall x_1, x_2 \in D : x_1 \le x_2 \Rightarrow h(x_1) \le h(x_2)$

כלומר $h(x)$ פונ' מונוטונית עולה.

ה) לא נכון – דוגמא נגדית: $f(x) = g(x) = x$

לכל $x \in \mathbb{R}$, $f(x), g(x)$ מונוטוניות עולות

אבל $h(x) = f(x) \cdot g(x) = x^2$ עולה כאשר $x > 0$

ויורדת כאשר $x < 0$.

ו) הטענה נכונה – הוכחה:

נתון $\{a_n\}$ ו-$\{b_n\}$ סדרות חסומות, לכן לפי הגדרה:

קיים מס' A כך שלכל $n \in \mathbb{N}$, $|a_n| \le A$ $\Leftarrow$ $-A \le a_n \le A$

וקיים מס' B כך שלכל $n \in \mathbb{N}$, $|b_n| \le B$ $\Leftarrow$ $-B \le b_n \le B$

$\Leftarrow$ $\forall n \in \mathbb{N} : -A-B \le a_n + b_n \le A+B$

$\Leftarrow$ $\underbrace{-(A+B)}_{-M} \le c_n \le \underbrace{A+B}_{M}$

קיבלנו שלכל $n \in \mathbb{N}$, $-M \le c_n \le M$ כלומר לכל $n \in \mathbb{N}$, $|c_n| \le M$

$\Leftarrow$ c_n חסומה

תאריך הגשה: 30/11/03

חדו"א א'

תרגיל בית מס' 4

1. הוכיחו לפי הגדרת הגבול כי מתקיים: $\lim\limits_{n->\infty}\frac{\sqrt{n^3-3n}}{\sqrt[3]{n^3+4}}=\infty$

2. חשבו את הגבול לפי אריתמטיקה של גבולות:

א. $\lim\limits_{n->\infty}\frac{n^2+\sqrt[4]{2n^8+1}}{\sqrt[4]{n^8+1}+\sqrt[4]{n^8-1}}$

ב. $\lim\limits_{n->\infty}\left[\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{n^2}\right)\right]$

ג. $\lim\limits_{n->\infty}\frac{(n+1)!-n!}{(n+1)!+n!}$

3. חשבו בעזרת משפט הסנדויץ' את $\lim\limits_{n->\infty}a_n$ כאשר:

א. $a_n=\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)$

ב. $\lim\limits_{n->\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{\sqrt{n+1}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{2n}}\right)$

ג. $a_n=\sqrt[n]{3^n+(-1)^n+7^n}$

ד. $a_n=\frac{n!}{n^n}$

ה. $a_n=\frac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}}$

ו. $\lim\limits_{n->\infty}\sqrt[n]{1+n\sqrt{n}}$

4. חשבו את הגבולות הבאים (בסע' א' ו-ב' היעזרו במבחן המנה או במבחן השורש):

א. $\lim\limits_{n->\infty}\frac{2^n n!}{n^n}$

ב. $\lim\limits_{n->\infty}\frac{n}{A^n}$ כאשר A>1 ו- 0<A<1.

ג. $a_n=\frac{1}{n}\sqrt[n]{n!}$

ד. $\lim\limits_{n->\infty}\sqrt[n]{\frac{(2n)!}{n!\cdot n!}}$

5. תהי $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה חיובית ונניח קיימים $m,M>0$, כל שלכל n , $m\le a_n\le M$
הוכיחו כי $\lim\limits_{n->\infty}\sqrt[n]{a_n}=1$.

6. המציאו סדרה חסומה חיובית ממש שאינה מתכנסת.

7. הוכיחו או הפריכו ע"י דוגמא נגדית:

א. אם $\lim_{n->\infty} a_n = \infty$ ולכל n מתקיים $a_n \le b_n$ אזי $\lim_{n->\infty} b_n = \infty$.

ב. אם $\lim_{n->\infty} b_n = 0$, $\lim_{n->\infty} a_n = \infty$ אזי $\lim_{n->\infty} a_n \cdot b_n = \infty$.

ג. אם לכל n $a_n > 0$ ו-$\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ אז $\lim_{n->\infty} a_n = 0$.

בהצלחה!

רמזים לתרגיל בית מס' 4:

סעיף 1:

ניתן להוכיח ולהסתמך על האי שוויון : לכל $n \geq 3$, $\frac{n^3}{2} > 3n$

סעיף 3ב':

השתמשו במשפט: אם קיים n_0 כך שלכל $n > n_0$, $a_n \geq b_n$ וגם $\lim_{n->\infty} b_n = \infty$

אז $\lim_{n->\infty} a_n = \infty$

סעיף 3ו':

ניתן להשתמש באי-שוויון הממוצעים : $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$

מבחן א'

פתרון תרגיל בית מס' 4

1) לפי הגדרה: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\infty \iff \forall M\in\mathbb{R},\ \exists n_0\in\mathbb{N},\ \forall n>n_0: a_n>M$

לכל $n\geq 3$ מתקיים $n^3-3n\geq 0$ לכן הביטוי מוגדר היטב.

<u>עבור $M\leq 0$</u>:

$$\forall n\geq 3:\quad a_n=\frac{\sqrt{n^3-3n}}{\sqrt[3]{n^3+4}}>0\geq M$$

<u>עבור $M>0$</u>:

נשים לב כי לכל $n\geq 3$ מתקיים $\frac{n^3}{2}>3n$ (מספיק גדול) ולכן:

$$a_n=\frac{\sqrt{n^3-3n}}{\sqrt[3]{n^3+4}}\geq\frac{\sqrt{n^3-\frac{n^3}{2}}}{\sqrt[3]{n^3+n^3}}=\frac{\sqrt{n^3}}{\sqrt[3]{n^3}}\cdot\frac{\sqrt{1/2}}{\sqrt[3]{2}}>\frac{\sqrt{n^3}}{2n}=\frac{1}{2}\left(n^{\frac{3}{2}-1}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}n^{1/2}\underset{\text{דרישה}}{>}M\implies n>(2M)^2$$

אם נבחר $n_0=[4M^2]+1$ נקבל את האי-שוויון,

אבל דרשנו כי $n\geq 3$ לכן ניקח $n_0=\max\{[4M^2]+1,3\}$ ואז לכל $n>n_0$ נקבל $a_n>M$.

2) א)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+\sqrt[4]{2n^8+1}}{\sqrt[4]{n^8+1}+\sqrt[4]{n^8-1}}\underset{\substack{\text{נחלק מונה ומכנה}\\ n^2\text{-ב}}}{=}\lim_{n\to\infty}\frac{1+\sqrt[4]{\frac{2n^8}{n^8}+\frac{1}{n^8}}}{\sqrt[4]{\frac{n^8}{n^8}+\frac{1}{n^8}}+\sqrt[4]{\frac{n^8}{n^8}-\frac{1}{n^8}}}=$$

$$\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt[4]{2+\frac{1}{n^8}}+1\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt[4]{1+\frac{1}{n^8}}+\sqrt[4]{1-\frac{1}{n^8}}\right)}=\frac{\sqrt[4]{2}+1}{1+1}=\frac{\sqrt[4]{2}+1}{2}$$

ב) מתקיים: $1-\frac{1}{n^2}=\frac{n^2-1}{n^2}=\frac{(n-1)(n+1)}{n^2}$ לכן:

$$a_n=\frac{1\cdot 3}{2^2}\cdot\frac{2\cdot 4}{3^2}\cdot\frac{3\cdot 5}{4^2}\cdot\frac{4\cdot 6}{5^2}\cdot\ldots\cdot\frac{(n-2)n}{(n-1)^2}\cdot\frac{(n-1)(n+1)}{n^2}=\frac{(n+1)}{2n}$$

$$\implies\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{2n}\underset{\substack{\text{נחלק מונה}\\ n\text{-ומכנה ב}}}{=}\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{n}}{2}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}2}=\frac{1}{2}$$

ג)

$$a_n=\frac{(n+1)!-n!}{(n+1)!+n!}\underset{\substack{\text{נחלק מונה}\\ n!(n+1)\text{-ומכנה ב}}}{=}\frac{1-\frac{n!}{n!(n+1)}}{1+\frac{n!}{n!(n+1)}}=\frac{1-\frac{1}{n+1}}{1+\frac{1}{n+1}}$$

$$\implies\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\frac{1}{n+1}}{1+\frac{1}{n+1}}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)}=\frac{1}{1}=1$$

3) א) מתקיים $\frac{1}{\sqrt{1+1/n}} = n\frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \le a_n \le n\cdot\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{1+1/n^2}}$

נחלק מונה ומכנה ב-n

נחלק מונה ומכנה ב-n

מכיוון ש: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+1/n}} = 1 = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+1/n^2}}$

לכן לפי מ. הסנדוויץ' $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$

ב) מתקיים: $\sqrt[n]{7^n} \le a_n \le \sqrt[n]{7^n+7^n+7^n} = \sqrt[n]{3\cdot 7^n}$

$$\Downarrow$$

$$7 \le a_n \le \sqrt[n]{3}\cdot 7$$

מכיוון ש: $\lim\limits_{n\to\infty} 7 = 7$ ו- $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{3}\cdot 7 = 1\cdot 7 = 7$

לפי טענה $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{c} = 1$ עבור $c>0$

לכן לפי מ. הסנדוויץ' $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 7$

ג) מתקיים: $a_n = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2n}}}_{n\ \text{מחוברים}} > \frac{n}{\sqrt{2n}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{n} \xrightarrow{n\to\infty} \infty$

לכן לפי משפט $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$

ד) $0 < \overbrace{\frac{n!}{n^n}}^{a_n} = \frac{1\cdot 2\cdots n}{n\cdot n\cdots n} = \frac{1}{n}\cdot\underbrace{\frac{2}{n}\cdots\frac{n}{n}}_{\le 1} \le \frac{1}{n}\cdot 1 = \frac{1}{n}$

$0 \xrightarrow{n\to\infty} 0$, $\frac{1}{n} \xrightarrow{n\to\infty} 0$

לכן לפי מ. הסנדוויץ' $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$

ה) לכל $n\in\mathbb{N}$, $\sqrt{n+2} \ge \sqrt{n+1}$ לכן $a_n = \frac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}} \ge 0$

$0 \le a_n = \frac{n+2-(n+1)}{\sqrt{n}\left(\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}\right)} = \frac{1}{\sqrt{n}\left(\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}\right)} < \frac{1}{\sqrt{n}\cdot\sqrt{n}} = \frac{1}{n}$

נכפיל ונחלק בצמוד

קיבלנו: $0 \le a_n \le \frac{1}{n}$

מכיוון ש: $\lim\limits_{n\to\infty} 0 = 0 = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}$

לכן לפי מ. הסנדוויץ' $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$

ו) לפי אי שוויון הממוצעים $\sqrt{ab} \le \frac{a+b}{2}$ לכן:

$\sqrt[n]{1} < a_n = \sqrt[n]{1+n\sqrt{n}} \le \sqrt[n]{1+n\left(\frac{n+1}{2}\right)} \le \sqrt[n]{1+n\left(\frac{2n}{2}\right)} \le \sqrt[n]{n^2+n^2}$

עבור $a=n$, $b=1$

קיבלנו: $\sqrt[n]{1} \le a_n \le \sqrt[n]{2n^2} = \sqrt[n]{2}\,(\sqrt[n]{n})^2$

נזכור כי $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{2} = 1$ ו- $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$

ומכאן ש: $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{2}\,(\sqrt[n]{n})^2 = 1$ ו- $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{1} = 1$

לכן לפי מ. הסנדוויץ' $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$

4) ב) נסמן $a_n = \frac{n}{A^n}$

עבור $A>1$: $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n}{A^n}} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{A^n}} = \frac{1}{A} < 1$

לכן לפי מבחן השורש $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ עבור $A>1$

עבור $0<A<1$: $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n}{A^n}} = \frac{1}{A} > 1$

לכן לפי מבחן השורש $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$ עבור $0<A<1$

ג) נסמן $a_n = \frac{(2n)!}{n!\,n!}$ ונשתמש במשפט שאומר אם עבור סדרה חיובית $\{a_n\}$ מתקיים $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$ אז $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = L$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+1)!}{(n+1)!\,(n+1)!} \cdot \frac{n!\,n!}{(2n)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+1)(2n+2)}{(n+1)^2} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(2+1/n)(2+2/n)}{(1+1/n)^2} = 4$$

נחלק מונה ומכנה ב- n

לכן $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(2n)!}{n!\cdot n!} = 4$

5) נתון כי $m \le a_n \le M$ לכן $\sqrt[n]{m} \le \sqrt[n]{a_n} \le \sqrt[n]{M}$

$$\sqrt[n]{m} \xrightarrow{n\to\infty} 1, \qquad \sqrt[n]{M} \xrightarrow{n\to\infty} 1$$

לכן, לפי מ. הסנדוויץ' $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$

6) דוגמא לסדרה חסומה, חיובית ממש שאינה מתכנסת:

$$a_n = (-1)^n + 7$$

7) א) הטענה נכונה - הוכחה:

צ"ל: לכל M קיים n_0 כך שלכל $n>n_0$ מתקיים $b_n > M$

נתון $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$ לכן לכל M קיים n_0 כך שלכל $n>n_0$, $a_n > M$, אבל $b_n \ge a_n$ לכל n לכן $b_n > M$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} b_n = \infty$

ב) הטענה לא נכונה – דוגמאות נגדית: נבחר $a_n=n$, $b_n=\frac{1}{n}$

נקבל $\lim\limits_{n\to\infty} b_n=0$ ו- $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\infty$ אבל

$$\lim_{n\to\infty} a_n\cdot b_n = 1$$

!

ג) הטענה לא נכונה – דוגמאות נגדית:

ניקח: $a_n = \frac{1}{n}+1 = \frac{1+n}{n}$

לכל n, $a_n>0$ וגם

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{1+(n+1)}{n+1}}{\frac{1+n}{n}} = \frac{1+(n+1)}{n+1}\cdot\frac{n}{1+n} = \frac{n(n+2)}{(n+1)^2} =$$

$$= \frac{n^2+2n}{n^2+2n+1} < 1$$

אבל $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$

תאריך הגשה: 7/12/03

חדו"א א'

תרגיל בית מס' 5

1. חשבו את הגבולות הבאים:

א. $\lim\limits_{n->\infty}\left(1+\frac{3n}{n^{10}+1}\right)^{n^9+\frac{1}{n}}$

ג. $\lim\limits_{n->\infty}\left(1+\frac{4}{n}\right)^{n+1}$

ב. $\lim\limits_{n->\infty}\left(\frac{n+1}{n-1}\right)^{n}$

ד. $\lim\limits_{n->\infty}\left(1-\frac{1}{n^2-4}\right)^{3n^2+5}$

2. נגדיר סדרה $a_{n+1}=\sqrt{3a_n}$, $a_1=\sqrt{3}$.
הוכיחו שהסדרה מתכנסת וחשבו את גבולה.

3. נתון 0<c<1, נגדיר סדרה: $a_{n+1}=\frac{c}{2}+\frac{{a_n}^2}{2}$, $a_1=c$.
הוכיחו כי $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת ומצאו את גבולה.

4. מצאו גבול עליון וגבול תחתון $\overline{\lim\limits_{n->\infty}}\{a_n\}_{n=1}^{\infty}, \underline{\lim\limits_{n->\infty}}\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, עבור הסדרות הבאות:

א. $a_n=\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right)^n+\cos\frac{n\pi}{2}$.

ב. $a_n=(-1)^n\left(5+\frac{1}{n}\right)$ (עבור סע' זה מצאו בנוסף $\sup(a_n),\inf(a_n)$).

ג. $a_n=n^3-2n^2\left[\frac{n}{2}\right]$ (עבור סע' זה קבעו בנוסף אם הסדרה חסומה).

5. הוכיחו או הפריכו ע"י דוגמא נגדית:
   א. $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת אם"ם $\{a_{2n}\}_{n=1}^{\infty},\{a_{2n+1}\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסות.
   ב. אם $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרות מתבדרות (ללא גבול) אז הסדרה $\{a_n\cdot b_n\}_{n=1}^{\infty}$ גם מתבדרת.
   ג. אם $a_n>7$ לכל n ו- $\lim\limits_{n->\infty}a_n=L$ אזי L>7.
   ד. אם ל- $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ יש תת סדרה מתכנסת אז $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ חסומה.

6. חשבו את הגבולות הבאים (סעיפים מתרגיל בית 4):

א. $\lim\limits_{n->\infty}\frac{2^n n!}{n^n}$

ג. $a_n=\frac{1}{n}\sqrt[n]{n!}$

בהצלחה!

חדו"א א'

פתרון תרגיל בית מס' 5

1) א)

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{3n}{n^{10}+1}\right)^{n^9+\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{3n}{n^{10}+1}\right)^{\frac{n^{10}+1}{n}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{n^{10}+1}{3n}}\right)^{\frac{n^{10}+1}{3n}}\right]^3 = e^3$$

ב)

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n-1}\right)^{n-1} = \lim\left(\frac{n-1+2}{n-1}\right)^{n-1} = \lim\left(1+\frac{2}{n-1}\right)^{n-1} = e^2$$

ג)

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{4}{n}\right)^{n+1} = \lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{4}{n}\right)^n\cdot\left(1+\frac{4}{n}\right)\right] =$$

$$\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n/4}\right)^{n/4}\right]^4 \cdot \lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{4}{n}\right)\right] = e^4\cdot 1 = e^4$$

ד)

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n^2-4}\right)^{3n^2+5} = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n^2-4}\right)^{3(n^2-4)+17} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[\left(1-\frac{1}{n^2-4}\right)^{n^2-4}\right]^3\cdot\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n^2-4}\right)^{17} = \frac{1}{e^3}\cdot 1 = \frac{1}{e^3}$$

2) א) נוכיח באינדוקציה שהסדרה מונוטונית עולה ממש,

כלומר לכל n, $a_{n+1} > a_n$:

עבור $n=1$: $a_2=\sqrt{3\sqrt{3}} > \sqrt{3} = a_1$

נניח נכונות עבור $n=k$ כלומר נניח שמתקיים $a_{k+1}>a_k$

ונוכיח נכונות עבור $n=k+1$ כלומר צ"ל $a_{k+2}>a_{k+1}$

$$a_{k+2} = \sqrt{3a_{k+1}} \underset{\text{לפי ה"א}}{>} \sqrt{3a_k} = a_{k+1}$$

ב) נוכיח באינדוקציה שהסדרה חסומה מלעיל,

כלומר לכל n, $a_n<3$:

עבור $n=1$: $a_1=\sqrt{3}<3$

נניח נכונות עבור $n=k$ כלומר נניח שמתקיים $a_k<3$

נוכיח נכונות עבור $n=k+1$ כלומר צ"ל $a_{k+1}<3$

$$a_{k+1} = \sqrt{3a_k} \underset{\text{לפי ה"א}}{<} \sqrt{3\cdot 3} = 3$$

(הסדרה מונוטונית עולה לכן הסדרה חסומה מלרע ע"י $\sqrt{3}$)

ד) הסדרה מונוטונית עולה וחסומה מלעיל לכן מתכנסת.

נחשב את גבול הסדרה:

נסמן: $\lim_{n\to\infty} a_n = L$

לפי הגדרה $a_{n+1}=\sqrt{3a_n}$ $\Leftarrow$ $\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty}\sqrt{3a_n}$

$\Leftarrow$ $L=\sqrt{3L}$ $\Leftarrow$ $L^2=3L$

נפתור את המשוואה: $L^2-3L=0$ ונקבל $L=3$ או $\cancel{L_1=0}$

כי $L\geq\sqrt{3}>0$

לכן $\lim_{n\to\infty} a_n=3$

3) א) נוכיח באינדוקציה שהסדרה מונוטונית יורדת:

עבור $n=1$: $a_2 = \frac{c}{2}+\frac{a_1^2}{2} = \frac{c}{2}+\frac{c^2}{2} < \frac{c}{2}+\frac{c}{2} = c = a_1$

(תון $0<c<1$ לכן $c^2<c$)

נניח נכונות עבור $n=k$ כלומר נניח שמתקיים $a_{k+1}<a_k$

נוכיח נכונות עבור $n=k+1$ כלומר צ"ל $a_{k+2}<a_{k+1}$

$$a_{k+2} = \frac{c}{2} + \frac{a_{k+1}^2}{2} \underset{\text{לפי הנ"א}}{<} \frac{c}{2}+\frac{a_k^2}{2} = a_{k+1}$$

ב) אברי הסדרה חיוביים ולכן הסדרה חסומה מלרע ע"י 0

$\forall n,\ a_{n+1} = \frac{c}{2}+\frac{a_n^2}{2}>0$

ג) הסדרה מונוטונית יורדת וחסומה מלרע לכן מתכנסת

נחשב את גבול הסדרה:

נסמן: $\lim_{n\to\infty} a_n = L$

לפי הגדרה $a_{n+1}=\frac{c}{2}+\frac{a_n^2}{2}$ $\Leftarrow$ $\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{c}{2} + \lim_{n\to\infty}\frac{a_n^2}{2}$

נקבל $L=\frac{c}{2}+\frac{L^2}{2}$ $\Leftarrow$ $L^2-2L+c=0$

כלומר $\cancel{L_2=1+\sqrt{1-c}}$ או $L_1=1-\sqrt{1-c}$

כי סדרה יורדת שכן $a_1=c<1$ ולכן הגבול לא יהיה גדול מ-1

לכן $\lim_{n\to\infty} a_n = 1-\sqrt{1-c}$

4) א) נפרק על פי מחזור מופרה:

עבור $n=4k$: $\cos\frac{4k\pi}{2}=\cos 2k\pi=1$

עבור $n=4k-1$: $\cos\left(\frac{(4k-1)\pi}{2}\right)=\cos\left(2\pi k-\frac{\pi}{2}\right)=0$

עבור $n=4k-2$: $\cos\left(\frac{(4k-2)\pi}{2}\right)=\cos(2\pi k-\pi)=-1$

עבור $n=4k-3$: $\cos\left(\frac{(4k-3)\pi}{2}\right)=\cos\left(2\pi k-\frac{3\pi}{2}\right)=0$

כמו כן עבור n זוגי: $\lim\limits_{k\to\infty}\left(1+\frac{(-1)}{2k}\right)^{2k}=\lim\limits_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{2k}\right)^{2k}=e$

$$\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{(-1)^{2k-1}}{2k-1}\right)^{2k-1}=\lim_{k\to\infty}\left(1-\frac{1}{2k-1}\right)^{2k-1}=\frac{1}{e}$$

סה"כ נקבל את הגבולות החלקיים:

$\lim\limits_{k\to\infty}a_{4k}=e+1$, $\lim\limits_{k\to\infty}a_{4k-1}=1/e$, $\lim\limits_{k\to\infty}a_{4k-2}=e-1$

$\lim\limits_{k\to\infty}a_{4k-3}=1/e$

לכן נסיק כי:
$$\overline{\lim_{\to\infty}}a_n=\lim_{k\to\infty}a_{4k}=e+1$$
$$\underline{\lim_{n\to\infty}}a_n=\lim_{k\to\infty}a_{4k-1}=\lim_{k\to\infty}a_{4k-3}=1/e$$

ב) נפרק לשתי תתי סדרות של a_n:

עבור $n=2k$: $a_{2k}=(-1)^{2k}\left(5+\frac{1}{2k}\right)=5+\frac{1}{2k}$

עבור $n=2k-1$: $a_{2k-1}=(-1)^{2k-1}\left(5+\frac{1}{2k-1}\right)=-5-\frac{1}{2k-1}$

לכן,
$$\underline{\lim_{n\to\infty}}a_n=\lim_{k\to\infty}a_{2k-1}=-5.$$
$$\overline{\lim_{n\to\infty}}a_n=\lim a_{2k}=5$$

נשים ♡ כי $a_{2k}>a_{2k-1}$ לכן
$$\sup a_n=5\tfrac{1}{2}\ ,\quad \inf a_n=-6$$

ג) נפרק לשתי תתי הסדרות של a_n:

עבור n זוגי: $a_n=n^3-2n^2\left[\frac{n}{2}\right]=n^3-n^3=0$

$2\left[\frac{n}{2}\right]=n$

עבור n אי-זוגי: $a_n=n^3-2n^2\left[\frac{n}{2}\right]=n^3-n^2(n-1)=n^2$

$2\left[\frac{n}{2}\right]=n-1$

לכן נסיק כי $\underline{\lim}_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} 0 = 0$

$\overline{\lim}_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} n^2 = \infty$

5) א) לא נכון - דוגמא נגדית: $a_n=(-1)^n$

a_n לא מתכנסת כיוון ש- $\lim_{n\to\infty} a_{2n}=1$, $\lim_{n\to\infty} a_{2n+1}=-1$

ב) לא נכון - דוגמא נגדית: $\{a_n\}=\{0,1,0,1,...\}$

$\{b_n\}=\{1,0,1,0,...\}$

a_n, b_n מתבדרות (לא קיים להן גבול) אבל

$\{a_n\cdot b_n\}$ מתכנסת ושווה ל- $\lim_{n\to\infty} a_n\cdot b_n = 0$

ג) לא נכון - דוגמא נגדית: $a_n = 7+\frac{1}{n}$

$\lim_{n\to\infty} a_n = 7$ אבל לכל $n\in\mathbb{N}$, $a_n>7$

ד) לא נכון - דוגמא נגדית:

נגדיר: $a_n=\begin{cases}1 & n \text{ זוגי}\\ n & n \text{ אי זוגי}\end{cases}$ אזי $\{a_{2n}\}$ תת סדרה

מתכנסת, אבל ברור כי a_n לא חסומה.

6) (סעיפים א׳ ו-ג׳ מתרגול מס׳ 4):

א) נסמן: $a_n=\frac{2^n\cdot n!}{n^n}$ זו סדרה חיובית

מתקיים:
$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{\frac{2^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{2^n\cdot n!}{n^n}}=\frac{2^{n+1}(n+1)!\cdot n^n}{2^n\cdot n!\,(n+1)^{n+1}}=$$
$$=\frac{2\cdot n^n}{(n+1)^n}=2\left(\frac{n}{n+1}\right)^n=2\,\frac{1}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n}=2\,\frac{1}{(1+\frac{1}{n})^n}$$
$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{2}{(1+\frac{1}{n})^n}\right]=\frac{2}{e}<1$$

לכן לפי מבחן המנה $\lim_{n\to\infty} a_n=0$

ב) נסמן: $a_n=\frac{1}{n}\sqrt[n]{n!}=\sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}}$ זו סדרה חיובית

נגדיר $b_n=\frac{n!}{n^n}$ לכל n ונשתמש במשפט האומר שאם

$\{b_n\}$ סדרה חיובית ומתקיים $\lim_{n\to\infty}\frac{b_{n+1}}{b_n}=L$ אזי

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{b_n} = L$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_{n+1}}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{n!}{n^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n!} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \lim \frac{1}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} = \lim \frac{1}{(1+1/n)^n} = \frac{1}{e}$$

$$\Leftarrow \quad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{b_n} = \lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{e}$$

תאריך הגשה: 14/12/03

חדו"א א'

<u>תרגיל בית מס' 6</u>

1. הוכיחו לפי קריטריון קושי את התכנסות או התבדרות הסדרות:

א. $a_n = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}}$

ב. $a_n = \frac{\cos\alpha}{3} + \frac{\cos 2\alpha}{3^2} + \dots + \frac{\cos n\alpha}{3^n}$ (α כלשהי).

ג. $a_n = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{n^2}$

ד. $a_n = \frac{11}{3} + \frac{12}{5} + \dots + \frac{n+10}{2n+1}$

ה. $a_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!}$

2. הוכיחו לפי הגדרת קושי:

א. $\lim_{x->a} \sqrt{x} = \sqrt{a}$ כאשר $a > 1$

ב. $\lim_{x->0} \frac{2+x}{2+\sin x} = 1$

ג. $\lim_{x->0} x \sin\frac{1}{x} = 0$

ד. $\lim_{x->1} \frac{x^2+2x}{2} = \frac{3}{2}$

3. הוכיחו לפי הגדרת היינה:

א. $\lim_{x->0} \frac{2x+5}{x+2} = \frac{5}{2}$

ב. $\lim_{x->0} \frac{x^2+x-1}{x-1} = 1$

4. הוכיחו לפי הגדרת הגבול של היינה שהגבולות הבאים אינם קיימים:

א. $\lim_{x->\infty} \sin^2 x$

ב. $\lim_{x->\infty} D(x)$ כאשר:

$$D(x) = \begin{cases} 1 & \text{רציונלי } x \\ 0 & \text{אי – רציונלי } x \end{cases}$$

(הראו כי לפונ' זו אין גבול באף נקודה)

ג. $\lim_{x->0} \sin\frac{1}{x}$

5. תהי f פונ' המוגדרת על כל R. הוכיחו או הפריכו ע"י דוגמא נגדית:

א. אם $\lim_{x->\infty} \frac{f(x)}{x} = \infty$ $(x \neq 0)$, אז $\lim_{x->\infty} f(x) - x = \infty$.

ב. אם $\lim_{x->\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$ אז $\lim_{x->\infty} f(x) - x = 0$.

בהצלחה!

פתרון תרגול בית מס' 6

1) א) נראה כי הסדרה מתבדרת:

$$|a_{n+p}-a_n| = \frac{1}{\sqrt{n+1}} + \frac{1}{\sqrt{n+2}} + \dots + \underbrace{\frac{1}{\sqrt{n+p}}}_{\text{האיבר הקטן ביותר}} > \frac{p}{\sqrt{n+p}}$$

:

בפרט עבור $p=n$ נקבל $|a_{n+p}-a_n| > \frac{n}{\sqrt{2n}} = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2}} \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$

לכן אם ניקח $\varepsilon \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$ נקבל $|a_{n+p}-a_n| \geq \varepsilon$ כלומר תנאי קושי לא מתקיים.

ב) נניח בה"כ כי $m>n$:

$$|a_m-a_n| = \left| \frac{\cos\alpha(n+1)}{3^{n+1}} + \frac{\cos\alpha(n+2)}{3^{n+2}} + \dots + \frac{\cos\alpha m}{3^m} \right| \leq$$

$$\left|\frac{\cos\alpha(n+1)}{3^{n+1}}\right| + \dots + \left|\frac{\cos m\alpha}{3^m}\right| \leq \frac{1}{3^{n+1}} + \frac{1}{3^{n+2}} + \dots + \frac{1}{3^m} <$$

$$\underbrace{\frac{1}{3^{n+1}} + \frac{1}{3^{n+2}} + \dots}_{\text{סדרה הנדסית אינסופית}} = \frac{\frac{1}{3^{n+1}}}{1-1/3} = \frac{1}{3^{n+1}}\cdot\frac{3}{2} = \frac{1}{2\cdot 3^n} < \frac{1}{3^n} \underset{\text{דרישה}}{<} \varepsilon$$

נזכור כי $3^n>0, \varepsilon$ לכן נדרוש $3^n > \frac{1}{\varepsilon}$

כלומר נדרוש $\log_3 3^n > \log_3\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) \iff n > \log_3\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$

אם ניקח $n_\varepsilon = [\log_3 \frac{1}{\varepsilon}]+1$ נקבל התכנסות לפי קריטריון קושי

ג) נניח בה"כ כי $m>n$:

$$|a_m-a_n| = \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \dots + \frac{1}{m^2} < \frac{1}{n(n+1)} + \dots + \frac{1}{(m-1)m}$$

נשתמש בטכניקה של פירוק לשברים חלקיים:

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n+1} = \frac{A(n+1)+Bn}{n(n+1)} \implies 1 = n(A+B)+A$$

נשווה מקדמים ונקבל $\begin{cases} A+B=0 \\ A=1 \end{cases}$ כלומר $A=1, B=-1$

לכן: נקבל הצגה: $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$

$$|a_m-a_n| < \left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right) + \left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right) + \dots + \left(\frac{1}{m-1}-\frac{1}{m}\right) = \frac{1}{n}-\frac{1}{m}$$

$$< \frac{1}{n} \underset{\text{דרישה}}{<} \varepsilon$$

כלומר נדרוש $n > \frac{1}{\varepsilon}$ ואז $m > \frac{1}{\varepsilon}$ כי $m>n$

אם ניקח $n_\varepsilon=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]+1$ אז עבור $n,m>n_\varepsilon$ נקבל $|a_m-a_n|<\varepsilon$

ב) נראה כי הסדרה מתבדרת:

$$|a_{n+p}-a_n|=\frac{(n+1)+10}{2(n+1)+1}+\dots+\frac{(n+p)+10}{2(n+p)+1}>p\cdot\frac{(n+p)+10}{2(n+p)+1}$$

אם נבחר $p=1$ נקבל:

$$|a_{n+p}-a_n|>\frac{n+1+10}{2(n+1)+1}=\frac{n+11}{2n+3}>\frac{n}{2n+3}\geq\frac{n}{5n}=\frac{1}{5}$$

לכן אם נבחר $\varepsilon\leq\frac{1}{5}$ נקבל $|a_{n+p}-a_n|\geq\varepsilon$ כלומר תנאי קושי לא מתקיים.

ה) נניח בה"כ כי $m<n$:

$$|a_n-a_m|=\frac{1}{(m+1)!}+\frac{1}{(m+2)!}+\dots+\frac{1}{n!}<$$

לכל $n\geq 4$ מתקיים $2^n<n!$ (מוכיחים באינדוקציה)

$$\frac{1}{2^{m+1}}+\frac{1}{2^{m+2}}+\dots+\frac{1}{2^n}<\sum_{k=m+1}^{\infty}\frac{1}{2^k}=\frac{\frac{1}{2^{m+1}}}{1-\frac{1}{2}}=\frac{2}{2^{m+1}}=\frac{1}{2^m}<\underset{\text{דרוש}}{\frac{1}{m}<\varepsilon}$$

כלומר נדרוש $m>\frac{1}{\varepsilon}$

אם נבחר $n_\varepsilon=\max\left\{4,\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]+1\right\}$ נקבל $|a_n-a_m|<\varepsilon$ לכל $n,m>n_\varepsilon$

2) א) יהי $\varepsilon>0$. צריך למצוא $\delta>0$ כך שעבור $|x-a|<\delta$ מתקיים $|\sqrt{x}-\sqrt{a}|<\varepsilon$.

$$|\sqrt{x}-\sqrt{a}|\underset{\text{נכפול ונחלק בצמוד}}{=}\left|\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{a})(\sqrt{x}+\sqrt{a})}{(\sqrt{x}+\sqrt{a})}\right|=\frac{|x-a|}{\sqrt{x}+\sqrt{a}}<\frac{\delta}{\sqrt{x}+\sqrt{a}}\underset{a>1}{<}\frac{\delta}{\sqrt{a}}$$

לכן נדרוש $\frac{\delta}{\sqrt{a}}\leq\varepsilon$ כלומר $\delta\leq\sqrt{a}\,\varepsilon$

אם ניקח $\delta=\sqrt{a}\cdot\varepsilon$ אז עבור $|x-a|<\delta$ מתקיים $|\sqrt{x}-\sqrt{a}|<\varepsilon$

ב) יהי $\varepsilon>0$. צריך להראות שקיים $\delta>0$ כך שעבור $|x-0|<\delta$ מתקיים $\left|\frac{2+x}{2+\sin x}-1\right|<\varepsilon$

$$\left|\frac{2+x}{2+\sin x}-1\right|=\left|\frac{2+x-2-\sin x}{2+\sin x}\right|=\left|\frac{x-\sin x}{2+\sin x}\right|\underset{\text{לפי אי שוויון המשולש}}{\leq}\frac{|x|+|\sin x|}{|2+\sin x|}\leq$$

$|\sin x|\leq|x|$

$1\leq 2+\sin x\leq 3$

$$\le \frac{|x|+|x|}{1} = 2|x| < 2\delta$$

לכן נדרוש $2\delta \le \varepsilon$ כלומר $\delta \le \varepsilon/2$

אם ניקח $\delta = \varepsilon/2$ נקבל שעבור $|x|<\delta$ מתקיים $\left|\frac{2+x}{2+\sin x} - 1\right| < \varepsilon$

ג) יהי $\varepsilon>0$. צריך להראות שקיים $\delta>0$ כך שעבור $|x-0|<\delta$ מתקיים $\left|x\cdot \sin\frac{1}{x} - 0\right| < \varepsilon$

$$\left|x\cdot\sin\frac{1}{x}\right| = |x|\left|\sin\frac{1}{x}\right| \le |x|\cdot 1 = |x| < \delta$$

לכל α, $|\sin\alpha|\le 1$

לכן נדרוש $\delta\le\varepsilon$

אם ניקח $\delta=\varepsilon$ נקבל שעבור $|x|<\delta$ מתקיים $\left|x\cdot\sin\frac{1}{x}\right|<\varepsilon$

ד) צריך להראות שלכל $\varepsilon>0$ קיים $\delta>0$ כך שעבור $|x-1|<\delta$ מתקיים $\left|\frac{x^2-2x}{2}-\frac{3}{2}\right|<\varepsilon$

$$\left|\frac{x^2-2x}{2}-\frac{3}{2}\right| = \left|\frac{x^2-2x-3}{2}\right| = \left|\frac{(x-1)(x+3)}{2}\right| = \frac{|x-1||x+3|}{2} <$$

$$|x-1|\cdot|x+3| = |x-1|\cdot|x-1+4| \le |x-1|(|x-1|+4) < \delta(\delta+4)$$

לפי א.ש.מ

לכן נדרוש $\delta(\delta+4)\le\varepsilon$

נמצא את הקשר בין ε ל-δ: $\delta^2+4\delta-\varepsilon\le 0$

$$\Downarrow$$

$$\delta_{1,2} = \frac{-4\mp\sqrt{16+4\varepsilon}}{2}$$

$\frac{-4-\sqrt{\ }}{2}$ $\frac{-4+\sqrt{\ }}{2}$

נזכור כי $\delta>0$ לכן אם נבחר $0<\delta\le\frac{-4+\sqrt{16+4\varepsilon}}{2}$

הגדרת קושי מתקיימת

3) א) תהי $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה המקיימת $x_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$ ולכל n, $x_n\ne 0$ אזי:

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty}\frac{2x_n+5}{x_n+2} = \frac{2\lim_{n\to\infty} x_n+5}{\lim_{n\to\infty} x_n+2} = \frac{2\cdot 0+5}{0+2} = \frac{5}{2}$$

לכן לפי היינה $\lim_{x\to 0}\frac{2x+5}{x+2} = \frac{5}{2}$

ב) תהי $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה המקיימת $x_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$ ולכל n, $x_n\ne 0$ אזי:

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty}\frac{x_n^2+x_n-1}{x_n-1} = \frac{\lim_{n\to\infty} x_n^2+\lim_{n\to\infty} x_n-1}{\lim_{n\to\infty} x_n-1} = \frac{-1}{-1} = 1$$

לכן לפי ה"ל $\lim_{x\to\infty} \frac{x^2+x-1}{x-1} = 1$

4) א) נמצא שתי סדרות המתכנסות ל-∞ $x_n \xrightarrow{n\to\infty} \infty$ ו- $y_n \xrightarrow{n\to\infty} \infty$

אך $\lim_{n\to\infty} f(x_n) \neq \lim_{n\to\infty} f(y_n)$

(לצורך: $\forall n,\quad x_n = \frac{\pi}{2} + n\pi \quad , \quad y_n = n\pi$

ולכן:
$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} \sin^2 x_n =$$
$$= \lim_{n\to\infty} \left[\sin\left(\frac{\pi}{2}+n\pi\right)\right]^2 = \lim_{n\to\infty} (-1)^2 = \lim_{n\to\infty} 1 = 1$$

$$\lim_{n\to\infty} f(y_n) = \lim_{n\to\infty} [\sin(\pi n)]^2 = \lim_{n\to\infty} 0^2 = 0$$

לכן נסיק לפי היינה שהגבול של $f(x)$ לא קיים

ב) נבחר שתי סדרות $x_n = \frac{1}{n\pi}$ ו- $y_n = \frac{1}{2n\pi + \pi/2}$

כך ש: $x_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$ ו- $y_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$ ולכל n, $x_n \neq 0$ ו- $y_n \neq 0$

אבל,
$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} \sin \frac{1}{\frac{1}{n\pi}} = \lim_{n\to\infty} \sin(n\pi) = 0$$
$$\lim_{n\to\infty} f(y_n) = \lim_{n\to\infty} \sin \frac{1}{\frac{1}{2\pi n + \pi/2}} = \lim_{n\to\infty} \sin(2\pi n + \pi/2) = 1$$

מכיוון ש- $1 \neq 0$ נסיק לפי היינה שאין התכנסות.

ג) ניתן היה להבין את השאלה בשני אופנים, לכן מובאים שני הפתרונות בפתרון.

① נוכיח כי לא קיים הגבול $\lim_{x\to\infty} D(x)$.

ניקח $r_n = n$ סדרה של מס' רציונלים כך ש $r_n \xrightarrow{n\to\infty} \infty$

ונרכיב $t_n = n\cdot\sqrt{2}$ סדרה של מס' אי רציונלים המתכנסת $t_n \xrightarrow{n\to\infty} \infty$

$\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה של מס' רציונלים לכן לפי הגדרת $D(x)$ נקבל

$$\lim_{n\to\infty} D(r_n) = 1$$

לעומת זאת $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה של מס' אי רציונלים לכן נקבל

$$\lim_{n\to\infty} D(t_n) = 0$$

$\Leftarrow$ לפי היינה לא קיים הגבול של $D(x)$

② יהי x_0 מס' ממשי. נוכיח כי לא קיים הגבול $\lim_{x\to x_0} D(x)$.

ניקח $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה של מס' רציונליים שמתכנסת ל- x_0 $(\forall n, r_n\neq x_0)$

ונרכיב את הסדרה $t_n = r_n + \frac{1}{n\sqrt{2}}$ שזו סדרה של מס'

אי רציונליים כך ש- $\lim_{n\to\infty} t_n = \lim_{n\to\infty}(r_n + \frac{1}{n\sqrt{2}}) = x_0$

$\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה של מס' רציונליים לכן לפי הגדרת $D(x)$ נקבל

$$\lim_{n\to\infty} D(r_n)=1$$

לעומת זאת, $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה של מס' אי רציונליים לכן נקבל

$$\lim_{n\to\infty} D(t_n)=0$$

לכן לפי היינה אין גבול באף נקו'.

5) א) טענה נכונה – הוכחה:

$$\lim_{x\to\infty} f(x)-x = \lim x\left(\frac{f(x)}{x}-1\right) = \infty(\infty-1)=\infty$$

ב) טענה לא נכונה – דוג' נגדית: ניקח $f(x)=x+1$ ואז

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{x+1}{x}=1$$

אבל, $\lim_{x\to\infty} f(x)-x = \lim_{x\to\infty}(x+1-x)=1$

תאריך הגשה: 22/12/03

חדו"א א'

תרגיל בית מס' 7

1. חשבו את הגבולות הבאים:

א. $\lim_{x->1}\frac{\sqrt{x}+\sqrt{x-1}-1}{\sqrt{x^2-1}}$

ב. $\lim_{x->\pi/2}\left(\frac{\cos x}{\pi/2-x}\right)$

ג. $\lim_{x->0}\frac{tg(4x)}{\sin(8x)}$

ד. $\lim_{x->0}\frac{(1+x)^n-1}{x}$ עבור $n\in N$

ה. $\lim_{x->\alpha}\frac{tgx+tg\alpha}{x-\alpha}$

ו. $\lim_{x->\infty}\left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)^{x^2}$

ז. $\lim_{x->0}x\left[\frac{1}{x}\right]$

ח. $\lim_{x->a}\frac{\cos x-\cos a}{x-a}$

2. הוכיחו ע"ס סעיף 1ד' כי $\lim_{x->0}\frac{\sqrt[n]{1+x}-1}{x}=\frac{1}{n}$ עבור $n\in N$.

3. חישבו את הגבולות הצדדיים של הפונ' הבאות בנקו' המצויינות והסיקו על קיום הגבולות בנקו' אלו:

א. $f(x)=\frac{1}{1+2^{1/x}}$ בנקו' $x=0$

ב. $f(x)=\frac{x}{|x|}$ בנקו' $x=0$

4. עבור אילו ערכי a יהיה קיים הגבול $\lim_{x->2}f(x)$ כאשר $f(x)=\begin{cases}x^3-x & x\ge 2\\ -x^2+a & x<2\end{cases}$?

5. עבור אילו ערכי a הפונ' $f(x)=\begin{cases}\ln(x)-2 & x>e\\ x^2+a & x\le e\end{cases}$ רציפה על כל הישר?

6. בדקו רציפות של הפונ' $f(x)=\begin{cases}\frac{|x-3|}{x-3} & x\ne 3\\ 0 & x=3\end{cases}$ בנקו' x=3

האם הפונ' רציפה מימין ומשמאל?

7. הוכיחו או הפריכו ע"י דוגמא נגדית:

א. אם f(x) רציפה בנקו' x_0 ואילו g(x) אינה רציפה בנקו' זו אזי $z(x)=f(x)+g(x)$ לא רציפה שם.

ב. תהיינה f(x) ו-g(x) פונ' חיוביות ששתיהן אינן רציפה בנקו' x_0, אזי גם הפונ' f(x)+g(x) אינה רציפה שם.

בהצלחה!

פתרון תרגיל בית מס' 7

1) א)
$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}+\sqrt{x-1}-1}{\sqrt{x^2-1}}=\lim_{x\to 1}\left(\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x^2-1}}+\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x^2-1}}\right)=$$
$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)\cdot\sqrt{x^2-1}}{(\sqrt{x}+1)\sqrt{x^2-1}\cdot\sqrt{x^2-1}}+\frac{1}{\sqrt{x+1}}\right)=\lim_{x\to 1}\left(\frac{(x-1)\sqrt{x^2-1}}{(\sqrt{x}+1)(x-1)(x+1)}+\frac{1}{\sqrt{x+1}}\right)=$$
$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{\sqrt{x^2-1}}{(\sqrt{x}+1)(x+1)}+\frac{1}{\sqrt{x+1}}\right)=0+\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

ב)
$$\lim_{x\to \pi/2}\left(\frac{\cos x}{\pi/2-x}\right)=\lim_{x\to\pi/2}\frac{\sin(\pi/2-x)}{\pi/2-x}=\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}=1$$

נסמן $t=\pi/2-x$

לכן אם $x\to\pi/2$ אז $t\to 0$

ג)
$$\lim_{x\to 0}\frac{tg\,4x}{\sin 8x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{\sin 8x\cdot\cos 4x}=$$
$$\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{4x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{8x}{\sin 8x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos 4x}=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1\cdot 1=\frac{1}{2}$$

ד) לפי הבינום של ניוטון: $(1+x)^n=1+nx+\frac{n(n-1)}{2}x^2+\dots+x^n$

לכן,
$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^n-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(1+nx+\frac{n(n-1)}{2}x^2+\dots+x^n\right)-1}{x}=$$
$$\lim_{x\to 0}\frac{nx+\frac{n(n-1)}{2}x^2+\dots+x^n}{x}=\lim\left(n+\frac{n(n-1)}{2}x+\dots+x^{n-1}\right)$$

(שים ♡ שהחל מהאיבר השני ולמעלה יש תלות בחזקות x לכן

כאשר $x\to 0$ נקבל $\lim\frac{(1+x)^n-1}{x}=(n+0+\dots+0)=n$

ה)
$$\lim_{x\to\alpha}\frac{tg\,x-tg\,\alpha}{x-\alpha}=\lim_{x\to\alpha}\frac{\frac{\sin x}{\cos x}-\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}{x-\alpha}=$$
$$\lim_{x\to\alpha}\frac{\sin x\cos\alpha-\cos x\sin\alpha}{(x-\alpha)\cos x\cdot\cos\alpha}=\lim_{x\to\alpha}\left(\frac{\sin(x-\alpha)}{x-\alpha}\cdot\frac{1}{\cos x\cos\alpha}\right)=$$
$$\lim_{x\to\alpha}\frac{\sin(x-\alpha)}{x-\alpha}\cdot\lim_{x\to\alpha}\frac{1}{\cos x\cos\alpha}=1\cdot\frac{1}{\cos^2\alpha}=\frac{1}{\cos^2\alpha}$$

ו)
$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)^{x^2}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-1+2}{x^2-1}\right)^{x^2-1+1}=$$
$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x^2-1}\right)^{x^2-1}\cdot\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x^2-1}\right)=e^2\cdot 1=e^2$$

ז) מתקיים: $x\left(\frac{1}{x}-1\right) < x\left[\frac{1}{x}\right] \le x\cdot\frac{1}{x}$

לפי הגדרה של ערך שלם

נקבל: $1-x < x\left[\frac{1}{x}\right] \le 1$

$\downarrow_{x\to 0} \quad 1 \qquad\qquad \downarrow_{x\to 0} \quad 1$

לכן לפי מ. הסנדוויץ' (סוף כי) $\lim_{x\to 0} x\left[\frac{1}{x}\right] = 1$

ח) $$\lim_{x\to a}\frac{\cos x-\cos a}{x-a} = \lim_{x\to a}\frac{-2\sin\left(\frac{x+a}{2}\right)\sin\left(\frac{x-a}{2}\right)}{x-a} =$$

$$-\lim_{x\to a}\sin\left(\frac{x+a}{2}\right)\lim_{x\to a}\frac{\sin\left(\frac{x-a}{2}\right)}{\frac{x-a}{2}} = -\sin a$$

ט) לפי סעיף לד' מתקיים $\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^n-1}{x} = n$

נסמן $y=\sqrt[n]{1+x}-1 \Leftarrow x=(1+y)^n-1$

כלומר כאשר $x\to 0$ אז $y\to 0$, לכן:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[n]{1+x}-1}{x} \underset{\text{הצבה}}{=} \lim_{y\to 0}\frac{y}{(1+y)^n-1} = \lim_{y\to 0}\frac{1}{\frac{(1+y)^n-1}{y}} = \frac{1}{n}$$

3) א) גבול מימין: $\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{1+2^{1/x}} = 0$

גבול משמאל: $\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{1+2^{1/x}} = \frac{1}{1+0} = 1$

$\Leftarrow$ הגבולות החד צדדיים קיימים ושונים ולכן לא קיים גבול בנקו' 0.

ב) גבול מימין: $\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{|x|} = \lim_{x\to 0^+}\frac{|x|}{|x|} = \lim_{x\to 0^+} 1 = 1$

גבול משמאל: $\lim_{x\to 0^-}\frac{x}{|x|} = \lim_{x\to 0^-}\frac{-|x|}{|x|} = \lim_{x\to 0^-}(-1) = -1$

$\Leftarrow$ הגבולות החד צדדיים קיימים ושונים ולכן לא קיים גבול בנקו' 0

4) הגבול $\lim_{x\to a} f(x)$ יהיה קיים אם $\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x)$

נבדוק את הגבולות החד צדדיים:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} (x^3-x) = 6 \\ \lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} (-x^2+a) = -4+a \end{cases}$$

לכן נדרוש $-4+a=6 \Leftarrow a=10$.

5) א) $f(x)$ פונ' רציפה בכל התחום בהן $x\neq e$ כהרכבה של פונ' אלמנטריות

נבדוק רציפות בנקו' $x=e$:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to e^+} (\ln x-2) = \ln e-2=-1 \\ \lim\limits_{x\to e^-} (x^2+a) = e^2+a \end{cases}$$

לכן כדי שהפונ' תהיה רציפה בנקו' $x=e$

נדרוש $e^2+a=-1 \Leftarrow a=-1-e^2$

6) נבדוק את הגבולות החד צדדיים בנקו' $x=3$:

$$\lim_{x\to 3^+} \frac{|x-3|}{x-3} = 1 \neq -1 = \lim \frac{|x-3|}{x-3}$$

לכן, $f(x)$ לא רציפה בנקו' $x=3$.

לפי ההגדרה $f(3)=0$ ולכן $f(x)$ לא רציפה מימין ולא משמאל

בנקו' $x=3$ כי ערך זה שונה מערכי הגבולות החד צדדיים.

7) א) הטענה נכונה – הוכחה:

נניח בשלילה כי הפונ' $Z(x)=f(x)+g(x)$ רציפה בנקו' x_0.

לכן $g(x) = \underbrace{Z(x)}_{\text{רציפה}} - \underbrace{f(x)}_{\text{רציפה}}$ פונ' רציפה בנקו' x_0 כהפרש

של פונ' רציפות, וזאת סתירה לנתון כי $g(x)$ לא רציפה

בנקו' x_0 $\Leftarrow$ $Z(x)$ לא רציפה ב-x_0.

ב) הטענה לא נכונה – דוגמ' נגדית:

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=1+\frac{1}{x} \\ g(x)=3-\frac{1}{x} \end{array}\right\}$$ שתי הפונ' אינן רציפות בנקו' $x=0$

אבל הפונ' $f(x)+g(x)=4$ רציפה בכל x_0

כפונ' קבועה.

תאריך הגשה: 28/12/03

חדו"א א'

<u>תרגיל בית מס' 8</u>

1. חקרו את רציפות הפונקציות הבאות ומיינו נקו' אי רציפות (עבור נקו' אי-רציפות סליקות, תקנו את הפונ'):

א. $f(x)=\dfrac{x-3}{(x+2)(x-1)}$

ב. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3-27}{x-3} & x\neq 3\\ 0 & x=3\end{cases}$

ג. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin 3x}{2x} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$

ד. $f(x)=\begin{cases}\cos\dfrac{\pi x}{2} & |x|\le 1\\ |x+1| & |x|>1\end{cases}$

ה. $f(x)=[x]+[-x]$

ו. $f(x)=\begin{cases}a^{x+2} & x\le -2\\ 3x+7 & x>-2\end{cases}$

ז. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{|x|}+\dfrac{1}{x-1} & x\neq 0,1\\ 0 & x=0\\ 15 & x=1\end{cases}$

2. גיזרו <u>לפי הגדרה</u> את הפונקציות הבאות:

א. $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ בנקו' $x=4$.

ב. $f(x)=\begin{cases}3x^2+4x & x<0\\ x^2+4x & x\ge 0\end{cases}$ בנקו' $x=0$.

ג. $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x} & x\le \dfrac{1}{16}\\ 2x+\dfrac{1}{8} & x>\dfrac{1}{16}\end{cases}$ בנקו' $x=\dfrac{1}{16}$.

ג. $f(x)=\begin{cases}-x^2+4x & x<0\\ x^2-1 & x\ge 0\end{cases}$ בנקו' $x=0$.

3. מצאו משוואות המשיק לפונקציות הבאות:

א. $f(x)=\frac{2x-1}{5x+2}$ בנקו' $x=0$.

ב. $f(x)=\begin{cases} x & x<0 \\ x^2 & x\geq 0 \end{cases}$ בנקו' $x=0$.

ג. $f(x)=\begin{cases} \sqrt{-x} & x<0 \\ \sqrt{x} & x\geq 0 \end{cases}$ בנקו' $x=0$.

4. הוכיחו או הפריכו ע"י דוגמא נגדית:

א. אם f(x) גזירה ועולה ממש אזי $f'(x)>0$.

ב. תהי f(x) פונ' המוגדרת בסביבת הנקו' x_0, ונניח כי קיימות ושוות הנגזרות החד צדדיות ב- x_0, כלומר $f_+^{'}(x_0)=f_-^{'}(x_0)$, אזי f(x) רציפה ב- x_0 .

ג. תהיינה f(x) ו-g(x) פונ' כך שבנקו' a נתונה מתקיים f(a)=g(a) וכן נתון שקיימות הנגזרות בנקו' זו, אזי נובע כי f'(a)=g'(a).

ד. תהיינה f(x) ו-g(x) פונ' גזירות בנקו' a ונתון שמתקיים f'(a)=g'(a), אזי נובע כי f(a)=g(a).

ה. תהי f(x) פונ' המקיימת $f_+^{'}(3)=f_-^{'}(3)=4$, אזי f(x) רציפה ב- $x_0=3$.

בהצלחה!

פתרון תרגול בית מס' 8

1) א) תחום: $(x+2)(x-1)\neq 0 \Longleftarrow x\neq 1,\ x\neq -2$

$f(x)$ רציפה בכל הנקודות בהן $x\neq 1$ ו- $x\neq -2$ (פולינומים).

נבדוק את הנקודות ה"בעייתיות":

$x_0=-2$:

$$\lim_{x\to -2^+} f(x) = \lim_{x\to -2^+} \frac{x-3}{(x+2)(x-1)} = +\infty$$

קיבלנו שהגבול הימני בנקודה $x_0=-2$ אינו קיים במובן הצר

לכן $x_0=-2$ נקודת אי רציפות מסוג II.

$x_0=1$:

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{x-3}{(x+2)(x-1)} = -\infty$$

קיבלנו שהגבול הימני אינו קיים במובן הצר (מתבדר)

לכן $x_0=1$ נקודת אי רציפות מסוג II.

ב) הפונקציה רציפה בכל הנקודות בהן $x\neq 3$ כהרכבה של פונקציות אלמנטריות

נבדוק את הנקודה $x_0=3$:

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^3-27}{x-3} = \lim_{x\to 3} \frac{(x-3)(x^2+3x+9)}{x-3} = \lim_{x\to 3} x^2+3x+9 = 27$$

הגבול קיים אבל $\lim_{x\to 3} f(x)=27\neq 0=f(3)$ לכן $x_0=3$

נקודת אי רציפות סליקה.

נתקן את הפונקציה ונגדיר:

$$f(x)=\begin{cases} \frac{x^3-27}{x-3} & x\neq 3 \\ 27 & x=3 \end{cases}$$

ג) הפונקציה רציפה בכל הנקודות בהן $x\neq 0$ כמנה של פונקציות אלמנטריות.

נבדוק את הפונקציה בנקודה $x_0=0$:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{3}{2}\cdot\frac{\sin 3x}{3x} = \frac{3}{2}\cdot 1 = \frac{3}{2}$$

הגבול קיים אבל $\lim_{x\to 0} f(x)=\frac{3}{2}\neq 0=f(0)$ לכן $x_0=0$

נקודת אי רציפות סליקה.

נתקן את הפונקציה ונגדיר מחדש:

$$f(x)=\begin{cases} \frac{\sin 3x}{2x} & x\neq 0 \\ 3/2 & x=0 \end{cases}$$

ד) בכל הנקודות בהן $x \neq \mp 1$ הפונקציה רציפה כפונקציה אלמנטרית

נבדוק את הנקודות הבעייתיות:

$x_0=-1$:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to -1^+} \cos\frac{\pi x}{2} = 0 \\ \lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to -1^-} |x+1| = 0 \end{cases}$$

כמו כן, $f(-1)=\cos\frac{-\pi}{2}=0$

לכן, $f(x)$ רציפה בנקודה $x_0=-1$

$x_0=1$:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} |x+1| = 2 \\ \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} \cos\frac{\pi x}{2} = 0 \end{cases}$$

הגבולות החד צדדיים סופיים ושונים

לכן, $x_0=1$ נקודת אי רציפות מסוג I

ה) $f(x)$ רציפה פרט אולי לנקודות $x=n$, $n\in\mathbb{Z}$

לכל $x\in\mathbb{R}$, $x\notin\mathbb{Z}$ מתקיים $f(x)=-1$

נבדוק את הנקודות $x=n$, $n\in\mathbb{Z}$:

$$\lim_{x\to n^+} f(x) = n+(-n-1) = -1$$

$$\lim_{x\to n^-} f(x) = n-1+(-n) = -1$$

הגבולות החד צדדיים קיימים ושווים

אבל $f(n)=n-n=0$ לכן $x=n$ נקודות אי רציפות סליקות.

נתקן את הפונקציה ונגדיר:

$$f(x)=\begin{cases} [x]+[-x] & x\neq n,\ n\in\mathbb{Z} \\ -1 & x=n,\ n\in\mathbb{Z} \end{cases}$$

ו) הפונקציה רציפה בכל הנקודות בהן $x\neq -2$ כפונקציה אלמנטרית

נבדוק את הנקודה $x_0=-2$:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to -2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to -2^-} a^{x+2} = 1 \\ \lim\limits_{x\to -2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to -2^+} 3x+7 = 1 \end{cases}$$

הגבולות החד צדדיים קיימים ושווים גם $f(-2)=a^0=1$

לכן הפונ' רציפה.

ב) הפונ' רציפה בכל הנקו' בהן $x \neq 0$ ו-$x \neq 1$ כסכום של פונ' רציפות

נבדוק את הנקו' הבעייתיות:

$x_0 = 0$:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to 0^+} \left(\frac{x}{|x|} + \frac{1}{x-1} \right) = \lim\limits_{x \to 0^+} \left(1 + \frac{1}{x-1} \right) = 1 - 1 = 0 \\ \lim\limits_{x \to 0^-} \left(\frac{x}{|x|} + \frac{1}{x-1} \right) = \lim\limits_{x \to 0^-} \left(-1 + \frac{1}{x-1} \right) = -1 - 1 = -2 \end{cases}$$

קיבלנו שהגבולות החד צדדיים קיימים אך שונים לכן

$x_0 = 0$ נקו' אי רציפות מסוג I.

$x_0 = 1$:

$$\lim_{x \to 1^+} \left(\frac{x}{|x|} + \frac{1}{x-1} \right) = \infty$$

הגבול הימני שואף ל-∞ לכן $x_0 = 1$ נקו' אי רציפות מסוג II.

2) א)

$$\lim_{x \to 4} \frac{f(x) - f(4)}{x-4} = \lim_{x \to 4} \frac{\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{2}}{x-4} = \lim_{x \to 4} \frac{2 - \sqrt{x}}{2\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} =$$

$$\lim_{x \to 4} \frac{-1}{2\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)} = -\frac{1}{16} \Longrightarrow f'(4) = -\frac{1}{16}$$

ב)

$$f'_+(0) = \lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x^2 + 4x}{x} = \lim_{x \to 0^+} x + 4 = 4$$

$$f'_-(0) = \lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^-} \frac{3x^2 + 4x}{x} = \lim_{x \to 0^-} 3x + 4 = 4$$

לכן $f'(0) = 4$

ג)

$$f'_+(1/16) = \lim_{x \to \frac{1}{16}^+} \frac{f(x) - f(1/16)}{x - 1/16} = \lim_{x \to \frac{1}{16}^+} \frac{2x + 1/8 - 1/4}{x - 1/16} =$$

$$= \lim_{x \to \frac{1}{16}^+} \frac{2(x - 1/16)}{x - 1/16} = \lim_{x \to \frac{1}{16}^+} 2 = 2$$

$$f'_-(1/16) = \lim_{x \to \frac{1}{16}^-} \frac{f(x) - f(1/16)}{x - 1/16} = \lim_{x \to \frac{1}{16}^-} \frac{\sqrt{x} - 1/4}{x - 1/16} =$$

$$= \lim_{x \to \frac{1}{16}^-} \frac{\sqrt{x} - 1/4}{(\sqrt{x} - 1/4)(\sqrt{x} + 1/4)} = \lim_{x \to \frac{1}{16}^-} \frac{1}{\sqrt{x} + 1/4} = 2$$

לכן $f'(1/16) = 2$

ב)
$$\lim_{x\to0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0^-}\frac{-x^2+4x-(-1)}{x-0}=$$
$$\lim_{x\to0^-}\left(-x+4+\frac{1}{x}\right)=-\infty$$

לכן לפונ' אין נגזרת בנקו' $x_0=0$

נשים ♡ ש-$f(x)$ לא רציפה ב-0 לכן יכולנו להסיק מכך שהפונ' לא גזירה בנקו'.

3) א)
$$f'(x)=\frac{2(5x+2)-5(2x-1)}{(5x+2)^2}=\frac{9}{(5x+2)^2}\Rightarrow f'(0)=9/4$$

($f(x)$ רציפה בנקו' 0 לכן ניתן לגזור לפי הכלל)

כמובן שגם בגזירה לפי הגדרה מתקבלת תוצאה זו!

לכן משוואת המשיק: $y=f'(0)\cdot(x-0)+f(0)=9/4x-1/2$

ב)
$$\begin{cases} f'_-(0)=\lim\limits_{x\to0^-}\frac{x-0}{x-0}=\lim\limits_{x\to0^-}1=1 \\ f'_+(0)=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{x^2-0}{x-0}=\lim\limits_{x\to0^+}x=0 \end{cases}$$

קיבלנו $f'_-(0)\neq f'_+(0)$ כלומר לא קיימת נגזרת בנקו' $x_0=0$

לכן אין ישר משיק ב-$x_0=0$.

ג)
$$\lim_{x\to0^+}\frac{\sqrt{x}-0}{x-0}=\lim_{x\to0^+}\frac{1}{\sqrt{x}}=\infty$$
$$\lim_{x\to0^-}\frac{\sqrt{-x}-0}{x-0}=\lim_{x\to0^-}\frac{1}{-\sqrt{-x}}=-\infty$$

קיבלנו נגזרות חד צדדיות אינסופיות ושונות כלומר אין נגזרת בנקו' $x_0=0$, לכן אין ישר משיק בנקו'.

4) א) הטענה לא נכונה - דוג' נגדית: $f(x)=x^3$

הפונ' עולה ממש ונגזרת $f'(x)=3x^2$ אבל $f'(0)=0$

ב) הטענה נכונה - הוכחה:

אם קיימות הנגזרות החד צדדיות ומתקיים השוויון $f'_+(x_0)=f'_-(x_0)$ אזי לפי משפט הפונ' $f(x)$ גזירה בנקו' x_0

וגזירות בנקו' x_0 גוררת רציפות ב-x_0.

ג) הטענה לא נכונה - פונ' נגדית: נגדיר $f(x)=x^2$, $g(x)=x^3$

ונבחר את הנק' $a=1$. מתקיים: $f(1)=1=g(1)$

כמו כן, הפונ' גזירות בנק' $a=1$ $f'(x)=2x$, $g'(x)=3x^2$

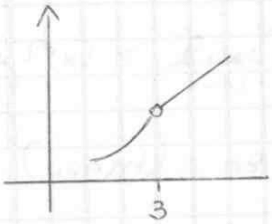
אבל, $f'(1)=2$ ו- $g'(3)=3$

ד) הטענה לא נכונה - פונ' נגדית: נגדיר $f(x)=2x$ ו- $g(x)=2x+5$

ונבחר את הנק' $a=1$.

הפונ' גזירות בנק' $a=1$ ומתקיים $f'(1)=2=g'(1)$

אבל $f(1)=2$ ו- $g(1)=7$



ה) הטענה לא נכונה - פונ' נגדית:

נגדיר $$f(x)=\begin{cases} 4x & x>3 \\ \frac{2}{3}x^2 & x<3 \end{cases}$$

מתקיים: $$\begin{cases} f'_+(3)=4 \\ f'_-(3)=\frac{2}{3}\cdot 2(3)=4 \end{cases}$$

אבל הפונ' לא מוגדרת בנק' 3 ולכן לא רציפה בנק'.

תאריך הגשה: 4/1/04

חדו"א א'

<u>תרגיל בית מס' 9</u>

1. קבעו עבור אילו ערכים של a,b הפונקציה:

$f(x)=\begin{cases} x^2+x & x\le 1 \\ ax+b & x>1 \end{cases}$ גזירה בנקו' $x_0=1$.

2. קבעו עבור אילו ערכים של a,b,c,d הפונקציה:

$f(x)=\begin{cases} ax^3+bx^2+cx+d & 0\le x\le 1 \\ \sin \pi x & else \end{cases}$ גזירה בכל נקודה.

3. חשבו את הנגזרות הבאות:

א. $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x}$

ב. $f(x)=\cos\left(\ln\cos^2 x\right)$

ג. $f(x)=\left(\sin\sqrt[3]{\dfrac{1}{x}}\right)^2$

ד. $f(x)=\cos\left(1+tg2x\right)$

ה. $f(x)=\left(\ln x\right)^{\ln x}$

ו. $f(x)=x^{\sin x}+\left(\sin x\right)^x$ $\left(0<x<\frac{\pi}{2}\right)$

ז. $f(x)=\left(\sqrt{\left(1-x\right)^{\frac{2}{3}}}\right)^5$

ח. $f(x)=e^{-x}\left(x+1\right)$

ט. $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2-1}}{2-x}$

י. $f(x)=\dfrac{1}{x\cdot|x|}$

יא. $f(x)=\left(\cos x\right)^{tgx}$

יב. $f(x)=\sqrt{x^2+4}\cdot\sin^2 x\cdot\left(2\right)^x$

4. הוכיחו או הפריכו ע"י דוגמא נגדית:

א. אם למשוואה f '(x)=0 יש שורש ממשי אחד, אזי למשוואה f(x)=0 יש לפחות 2 שורשים ממשיים שונים.

ב. אם $f(x)\cdot g(x)$ גזירה בנקו' x_0, אזי f(x) גזירה ב- x_0.

בהצלחה!

פתרון תרגיל בית מס' 9

1) תנאי הכרחי לגזירות הוא רציפות.

נבדוק רציפות הפונ' בנק' $x_0=1$:

$$\begin{cases} f(1)=1 \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} ax+b = a+b \\ \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} x^2+x = 2 \end{cases}$$

$\Longrightarrow$ כדי שהפונ' תהיה רציפה נדרוש: $a+b=2$

נבדוק גזירות בנק' $x_0=1$: $f'_-(1)=2\cdot 1+1=3$, $f'_+(1)=a$

$\Longrightarrow$ כדי שהפונ' תהיה גזירה נדרוש: $a=3$

סה"כ קיבלנו: $\begin{cases} a+b=2 \\ a=3 \end{cases} \Longleftarrow$ עבור $a=3$, $b=-1$ הפונ' גזירה בנק' $x_0=1$.

הערה: ניתן לגזור לפי הגדרה:

$$\begin{cases} f'_+(1)=\lim\limits_{x\to 1^+} \frac{ax+b-2}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^+} \frac{a(x-1)+\overbrace{(a+b)}^{2}-2}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^+} a = a \\ f'_-(1)=\lim\limits_{x\to 1^-} \frac{x^2+x-2}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^-} \frac{(x-1)(x+2)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^-} x+2 = 3 \end{cases}$$

2) הפונ' רציפה בכל הנק' בהן $x\neq 0$ ו- $x\neq 1$ כהרכבה של פונ' אלמנטריות.

נבדוק את הנק' $x=0$:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} \sin\pi x = 0 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} ax^3+bx^2+cx+d = d = f(0) \end{cases}$$

נדרוש: $d=0$

נבדוק את הנק' $x=1$:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 1^+} \sin\pi x = \sin\pi = 0 \\ \lim\limits_{x\to 1^-} ax^3+bx^2+cx+d = a+b+c+0 = f(1) \end{cases}$$

נדרוש: $a+b+c=0$

עבור רציפות קיבלנו: ① $d=0$, ② $a+b+c=0$

$\left\{\begin{array}{l} f'_+(0)=3a\cdot 0^2+2b\cdot 0+c=c \\ f'_-(0)=(\cos\pi)\cdot(\pi)=1\cdot\pi=\pi \end{array}\right.$ נבדוק גזירות בנקודה 0:

לכן: $c=\pi$

$\left\{\begin{array}{l} f'_+(1)=(\cos\pi\cdot 1)(\pi)=-1\cdot\pi=-\pi \\ f'_-(1)=3a\cdot 1^2+2\cdot b\cdot 1+c=3a+2b+c \end{array}\right.$ נבדוק גזירות בנקודה 1:

לכן: $3a+2b+c=-\pi$

עבור גזירות קיבלנו $^{③}c=\pi$, $^{④}3a+2b+c=-\pi$

מארבעת המשוואות קיבלנו: $a=0,\ b=-\pi,\ c=\pi,\ d=0$

(ניתן לבדוק לפי הגדרה).

3) א)
$$f'(x)=\frac{\frac{1}{2}(x^2-1)^{-\frac{1}{2}}\cdot 2x\cdot x-\sqrt{x^2-1}\cdot 1}{x^2}$$
$$=\frac{x^2-(x^2-1)}{x^2\sqrt{x^2-1}}=\frac{1}{x^2\sqrt{x^2-1}}$$

ב)
$$f'(x)=-\sin(\ln\cos^2x)\left[\frac{-2\cos x\sin x}{\cos^2x}\right]$$
$$=\sin(\ln\cos^2x)\left[2\frac{\sin x}{\cos x}\right]$$
$$=\sin(\ln\cos^2x)(2\,tg x)$$

ג)
$$f'(x)=2\sin\sqrt[3]{\frac{1}{x}}\cdot\underbrace{\left[\cos\sqrt[3]{\frac{1}{x}}\right]}_{\left[\sin\sqrt[3]{\frac{1}{x}}\right]'}\cdot\underbrace{\left[-\tfrac{1}{3}x^{-\frac{4}{3}}\right]}_{\left[x^{-\frac{1}{3}}\right]'}$$
$$\overset{\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha}{=}-\frac{\sin\left(2\sqrt[3]{\frac{1}{x}}\right)}{3\cdot\sqrt[3]{x^4}}$$

ג)
$$f'(x)=-\sin(1+tg\,2x)\cdot\frac{2}{\cos^2 2x}$$

ד)
$$f(x)=(\ln x)^{\ln x}=e^{\ln x\cdot\ln(\ln x)}$$
$$f'(x)=e^{\ln x\cdot\ln(\ln x)}\cdot\left[\frac{1}{x}\cdot\ln(\ln x)+\cancel{\ln x}\cdot\frac{1}{x\cancel{\ln x}}\right]$$
$$=\frac{(\ln x)^{\ln x}}{x}\left[\ln(\ln x)+1\right]$$

ו)
$$f(x)=x^{\sin x}+(\sin x)^x=e^{\sin x\cdot\ln x}+e^{x\cdot\ln(\sin x)}$$

$$f'(x) = e^{\sin x \cdot \ln x}\left[\cos x \cdot \ln x + \frac{\sin x}{x}\right] +$$

$$e^{x \cdot \ln(\sin x)}\left[\ln(\sin x) + x \cdot \frac{\cos x}{\sin x}\right] =$$

$$x^{\sin x}\left(\cos x \cdot \ln x + \frac{\sin x}{x}\right) + (\sin x)^x\left(\ln(\sin x) + x\,ctg x\right)$$

ג)

$$f(x) = (1-x)^{2/3 \cdot 1/2 \cdot 5} = (1-x)^{5/3}$$

$$f'(x) = 5/3\,(1-x)^{2/3}\,(-1) = -5/3\,(1-x)^{2/3}$$

ה)

$$f'(x) = e^{-x}(-1)(x+1) + e^{-x} \cdot 1 = -x e^{-x}$$

ו)

$$f'(x) = \frac{1/2\,(x^2-1)^{-1/2} \cdot 2x \cdot (2-x) - \sqrt{x^2-1} \cdot (-1)}{(2-x)^2}$$

$$= \frac{x(2-x) + (x^2-1)}{(2-x)^2 \sqrt{x^2-1}} = \frac{2x - x^2 + x^2 - 1}{(2-x)^2\sqrt{x^2-1}}$$

$$= \frac{2x-1}{(2-x)^2 \cdot \sqrt{x^2-1}}$$

י)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} & x>0 \\ -\frac{1}{x^2} & x<0 \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} -2/x^3 & x>0 \\ 2/x^3 & x<0 \end{cases}$$

יא)

$$f(x) = (\cos x)^{tg x} = e^{tg x \cdot \ln(\cos x)}$$

$$f'(x) = e^{tg x \cdot \ln(\cos x)}\left[\frac{1}{\cos^2 x} \cdot \ln(\cos x) + tg x \cdot \frac{-\sin x}{\cos x}\right]$$

$$= e^{tg x \cdot \ln(\cos x)}\left[\frac{\ln(\cos x)}{\cos^2 x} - tg^2 x\right]$$

$$= (\cos x)^{tg x}\left[\frac{\ln(\cos x)}{\cos^2 x} - tg^2 x\right]$$

יב)

$$f(x) = \sqrt{x^2+4} \cdot \sin^2 x \cdot (2^x)$$

$$\ln f(x) = \tfrac{1}{2}\ln(x^2+4) + 2\ln(\sin x) + x\ln 2$$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{x}{x^2+4} + \frac{2\cos x}{\sin x} + \ln 2$$

$$f'(x) = f(x)\left[\frac{x}{x^2+4} + 2ctg x + \ln 2\right]$$

$$f'(x) = \sqrt{x^2+4} \cdot \sin^2 x\,(2^x)\left[\frac{x}{x^2+4} + 2ctg x + \ln 2\right]$$

4) א) הטענה לא נכונה - דוג' נגדית: $f(x)=x^2$

למשל $f'(x)=2x=0 \Rightarrow$ יש שורש ממשי אחד $x=0$

אבל למשל $f(x)=0$ אין שני שורשים שונים.

ב) הטענה לא נכונה - דוג' נגדית: $f(x)=|x|=g(x)$

$f(x)\cdot g(x)=|x|\cdot|x|=x^2$ גזירה בנקודה $x_0=0$

אבל $f(x)=|x|$ אינה גזירה בנקודה $x_0=0$.

תאריך הגשה: 11/1/04

חדו"א א'

תרגיל בית מס' 10

1. הראו שלפולינום $f(x)=3x^3+5x+2$ קיים בדיוק שורש ממשי אחד.

2. תהי $f(x)=x^4-20x^3-25x^2-x+1$, הוכיחו שקיימת נקו' $-1<c<1$
כך ש: $4c^3-60c^2-50c-1=0$

3. הוכיחו בעזרת משפט לגרנג' את האי שוויונים הבאים:

א. $\frac{b-a}{1+b}<\ln\left(\frac{1+b}{1+a}\right)<\frac{b-a}{1+a}$

ב. $x<tgx$ לכל $0<x<\frac{\pi}{2}$

ג. $\frac{1}{6}<\ln\left(\frac{6}{5}\right)<\frac{1}{5}$

ד. $\frac{1}{9}<\sqrt{66}-8<\frac{1}{8}$

4. הוכיחו שלמשוואה $4ax^3+3bx^2+2cx-(a+b+c)=0$, לפחות פתרון אחד בקטע $(0,1)$ עבור $a,b,c\in R$ קבועים.

5. בידקו גזירות של הפונקציה: $f(x)=\begin{cases} e^{\frac{-1}{x^2}} & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$.

6. חשבו את הגבולות הבאים:

א. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3+\ln x}{e^x+x}$

ב. $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\ln(\sin ax)}{\ln(\sin bx)}$

ג. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right)$

ד. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{e^x}{x^n}$, $(n\in N)$

ה. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x}$

ו. $\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin x+x)^{\frac{1}{x}}$

ז. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}-2}{1-\cos x}$

ח. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\pi-2arctgx}{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}$

ט. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^x$

י. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{1-\cos x}}$

7. הוכיחו או הפריכו ע"י דוגמא נגדית:

א. אם $f'(x)=0$ לכל x אז $f(x)$ קבועה.

ב. אם $f'(x) > 0$ בכל נקו' x אז $\lim_{x->\infty} f(x) = \infty$.

בהצלחה!

פתרון תרגיל בית מס' 10

1) א) נוכיח קיום פתרון:

$f(x)=3x^3+5x+2$ רציפה (פולינום) לכל x

מתקיים:

$$\left.\begin{array}{l} f(-2)=-32<0 \\ f(2)=36>0 \end{array}\right\} \Rightarrow f(-2)\cdot f(2)<0$$

לכן לפי משפט קיימת נקו' $c\in(-2,2)$ כך ש- $f(c)=0$

ב) נוכיח יחידות:

נניח בשלילה כי קיימים 2 פתרונות שונים, נסמנם: a ו- b.

ומתקיים $f(a)=0=f(b)$

הפונ' $f(x)$ רציפה לכל x ולכן רציפה בקטע $[a,b]$

הנגזרת $f'(x)=9x^2+5$ מוגדרת לכל x ולכן $f(x)$ גזירה

בקטע (a,b). לכן לפי משפט רול קיימת נקו' $c\in(a,b)$

כך ש- $f'(c)=0 \Leftarrow 9c^2+5=0 \Leftarrow c^2\neq -5/9$

$\Leftarrow$ סתירה!

מ-א' ו-ב' נובע שקיים בדיוק פתרון אחד ל- $f(x)$.

2) $f(x)=x^4-20x^3-25x^2-x+1$ פונ' רציפה לכל x (פולינום)

ומתקיים:

$$\left.\begin{array}{l} f(1)=-44<0 \\ f(0)=1>0 \\ f(-1)=-2<0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} f(1)\cdot f(0)<0 \\ f(0)\cdot f(-1)<0 \end{array}$$

לכן לפי משפט קיימת $0<c_1<1$ ו- $-1<c_2<0$ כך ש:

$$f(c_1)=0=f(c_2)$$

$f'(x)=4x^3-60x^2-50x-1$ מוגדרת לכל x ולכן הפונ' גזירה לכל x

לכן לפי משפט רול קיימת נקו' $-1<c<1$ כך ש- $f'(c)=0$

כלומר: $4c^3-60c^2-50c-1=0$

3) א) צ"ל: $\frac{b-a}{1+b}<\ln(1+b)-\ln(1+a)<\frac{b-a}{1+a}$

נגדיר $f(x)=\ln(1+x)$

ת.ה : $1+x>0 \Longrightarrow x>-1$ לכן הפונ' מוגדרת עבור $b>a>0$

הפונ' רציפה בקטע הסגור $[a,b]$

$f'(x)=\frac{1}{1+x}$ מוגדרת לכל $x>0$ לכן הפונ' גזירה ב- (a,b).

לכן לפי משפט לגרנז' קיימת נקו' $a<c<b$ כך ש:

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \Longrightarrow \circledast\ \frac{1}{1+c}=\frac{\ln(1+b)-\ln(1+a)}{b-a}$$

מתקיים $a<c<b$ כאשר $a,b,c>0$

$$\Leftarrow \quad 1+a<1+c<1+b$$

$$\Leftarrow \quad \frac{1}{1+a}>\frac{1}{1+c}>\frac{1}{1+b}$$

נציב את $\circledast$:
$$\frac{1}{1+a}>\frac{\ln(1+b)-\ln(1+a)}{b-a}>\frac{1}{1+b}$$

נכפול ב- $b-a>0$:
$$\frac{b-a}{1+a}>\ln\left(\frac{1+b}{1+a}\right)>\frac{b-a}{1+b}$$

ב) נתבונן בקטע $[0,x]$ לכל $0<x<\frac{\pi}{2}$ $\left([0,x]\subseteq[0,\frac{\pi}{2})\right)$

נגדיר $f(x)=tg\,x$

$f(x)$ רציפה בקטע $[0,x]$ כי $x<\frac{\pi}{2}$

$f'(x)=\frac{1}{\cos^2 x}$ מוגדרת בקטע $(0,x)$ לכן

$f(x)$ גזירה ב- $(0,x)$ עבור $x<\frac{\pi}{2}$

לכן לפי משפט לגרנז' קיימת נקו' $0<c<x$ כך ש:

$$f'(c)=\frac{f(x)-f(0)}{x-0} \Longrightarrow \frac{1}{\cos^2 c}=\frac{tg\,x-tg\,0}{x-0}=\frac{tg\,x}{x}$$

נשים ♡ כי עבור $0<c<x<\frac{\pi}{2}$ מתקיים $0<\cos c<1$

$$\frac{1}{\cos^2(c)}>1 \quad \Leftarrow \quad \cos^2(c)<1 \quad \Leftarrow$$

$$tg\,x>x \quad \Leftarrow \quad \frac{tg\,x}{x}>1 \quad \Leftarrow$$

ג) לפי סעי' א: נבחר: $a=4$, $b=5$ ונקבל:

$$\frac{5-4}{1+5}<\ln\left(\frac{1+5}{1+4}\right)<\frac{5-4}{1+4}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{1}{6}<\ln\left(\frac{6}{5}\right)<\frac{1}{5}$$

3) נגדיר $f(x)=\sqrt{x}$ בקטע $[64,66]$

$f(x)$ רציפה לכל $x>0$ ולכן רציפה בקטע $[64,66]$

$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$ מוגדרת לכל $x>0$ ולכן גזירה בקטע $(64,66)$

לכן, לפי משפט לגרנז' קיימת נקו' $64<c<66$ כך ש:

$$f'(c)=\frac{f(66)-f(64)}{66-64} \Rightarrow \frac{1}{2\sqrt{c}}=\frac{\sqrt{66}-\sqrt{64}}{2}$$

$$\Rightarrow (*)\ \frac{1}{\sqrt{c}}=\sqrt{66}-8$$

מתקיים: $64<c<66<72 \Rightarrow \sqrt{64}<\sqrt{c}<\sqrt{72}$

$$\Leftarrow \frac{1}{8}>\frac{1}{\sqrt{c}}>\frac{1}{9}$$

ולכן (*): $\frac{1}{8}>\sqrt{66}-8>\frac{1}{9}$

4) צ"ל: קיימת נקו' $x_0\in(0,1)$ כך ש:

$$4ax_0^3+3bx_0^2+2cx_0=a+b+c$$

נגדיר: $f(x)=ax^4+bx^3+cx^2$ בקטע $[0,1]$

הפונ' רציפה לכל x (פולינום)

$f'(x)=4ax^3+3bx^2+2cx$ מוגדרת לכל x (פולינום)

לכן הפונ' גזירה לכל x.

אז לפי משפט לגרנז' קיימת נקו' $x_0\in(0,1)$ כך ש:

$$f'(x_0)=\frac{f(1)-f(0)}{1-0} \Rightarrow 4ax_0^3+3bx_0^2+2cx_0=a+b+c$$

לכן למשו' $4ax^3+3bx^2+2cx-(a+b+c)=0$ לפחות פתרון אחד בקטע $(0,1)$.

5) לכל $x\neq 0$ הפונ' גזירה והנגזרת היא $f'(x)=2x^{-3}e^{-\frac{1}{x^2}}$

עבור $x=0$ נקבל:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{-\frac{1}{x^2}}-0}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{e^{1/x^2}} \overset{\text{לופיטל}}{=} \text{"}\frac{\infty}{\infty}\text{"}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{x^2}}{-2x^{-3}e^{1/x^2}}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{2e^{1/x^2}}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2}xe^{-1/x^2}=0$$

לכן $f'(0)=0$

6) א)

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+\ln x}{e^x+x}\overset{\text{לופיטל}}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2+\frac{1}{x}}{e^x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{3x^3+1}{xe^x+x}\overset{\text{ל}}{=}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{9x^2}{e^x+xe^x+1}\overset{\text{ל}}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{18x}{2e^x+xe^x}\overset{\text{ל}}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{18}{3e^x+xe^x}=0$$

ב)

$$\lim_{x\to0^+}\frac{\ln(\sin ax)}{\ln(\sin bx)}\overset{\text{ל}}{=}\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{(\sin ax)}(a\cos ax)}{\frac{1}{(\sin bx)}(b\cos bx)}=$$

$$\lim_{x\to0^+}\frac{\sin bx}{\sin ax}\cdot\lim_{x\to0^+}\frac{a\cos ax}{b\cos bx}=\frac{a}{b}\lim_{x\to0^+}\frac{\sin bx}{\sin ax}\overset{\text{ל}}{=}$$

$$\frac{a}{b}\lim_{x\to0^+}\frac{b\cos bx}{a\cos ax}=\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{a}=1$$

ג)

$$\lim_{x\to1}\left(\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right)=\lim_{x\to1}\frac{x\ln x-x+1}{(x-1)\ln x}\overset{\text{ל}\ \left(\frac{0}{0}\right)}{=}$$

$$\lim_{x\to1}\frac{\ln x+\frac{x}{x}-1}{\ln x+(x-1)\frac{1}{x}}=\lim_{x\to1}\frac{\ln x}{\ln x+1-\frac{1}{x}}\overset{\text{ל}}{=}$$

$$\lim_{x\to1}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to1}\frac{1}{1+\frac{1}{x}}=\frac{1}{2}$$

ד)

$$\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{x^n}\underset{\frac{\infty}{\infty}}{\overset{\text{ל}}{=}}\lim\frac{e^x}{nx^{n-1}}\underset{\frac{\infty}{\infty}}{\overset{\text{ל}}{=}}\dots=\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{\underbrace{n!}_{\text{מס' סופי}}}=\infty$$

כלומר נצטרך להשתמש בכלל לופיטל n פעמים ואז בפעם הראשונה נראה דבר שאינו "$\frac{\infty}{\infty}$" אלא $\frac{\infty}{\text{מס' סופי}}$

ה)

$$\lim_{x\to0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x}=\lim_{x\to0}\frac{x}{\sin x}\cdot\lim_{x\to0}\underset{\downarrow\,0}{x}\,\underbrace{\sin\frac{1}{x}}_{\text{חסום}}=1\cdot0=0$$

<u>הערה</u>: לא ניתן להשתמש בלופיטל כי:

$$\lim_{x\to0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to0}\frac{2x\sin\frac{1}{x}+x^2\cos\frac{1}{x}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{\cos x}=$$

$$\lim_{x\to0}\frac{2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}}{\cos x}\longrightarrow\lim_{x\to0}\cos\frac{1}{x}$$ לא קיים

ולכן $\lim_{x\to0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ לא מוגדר

(ו $\lim_{x\to 0}(1+\sin x+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0} e^{\frac{1}{x}\ln(1+\sin x+x)} = e^{2}$

$$\left[\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+\sin x+x)}{x} \underset{\text{לופיטל}}{\overset{\text{"}\frac{0}{0}\text{"}}{=}} \lim_{x\to 0}\frac{\cos x+1}{1+\sin x+x} = 2\right]$$

(ז $$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x}+e^{-x}-2}{1-\cos x} \underset{\text{ל}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{e^{x}-e^{-x}}{\sin x} \underset{\text{ל}}{=} \frac{e^{x}+e^{-x}}{\cos x} = 2$$

(ח $$\lim_{x\to\infty}\frac{\pi-2\operatorname{arctg}x}{\ln(1+\frac{1}{x})} \underset{\text{ל}}{\overset{\text{"}\frac{0}{0}\text{"}}{=}} \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{-2}{1+x^2}}{\left(\frac{1}{1+1/x}\right)\left(-1/x^2\right)} =$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2}{1+x^2}}{\frac{1}{x^2+x}} = \lim_{x\to\infty}\frac{2(x^2+x)}{1+x^2} \underset{\substack{\text{הוצאת מונה}\\ \text{ומכנה ב-}x^2}}{=} 2\lim_{x\to\infty}\frac{1+1/x}{1/x^2+1} = 2$$

(ט $$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{x} = \lim_{x\to\infty} e^{x\ln(1+\frac{1}{x^2})} =$$

$$= e^{\lim_{x\to\infty} x\ln(1+\frac{1}{x^2})} = e^{0} = 1$$

$$\left[\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(1+\frac{1}{x^2})}{1/x} \underset{\text{לופיטל}}{\overset{\text{"}\frac{0}{0}\text{"}}{=}} \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^2}{x^2+1}\left(\frac{-2}{x^3}\right)}{-1/x^2} = \lim_{x\to\infty}\frac{2x^2}{x(x^2+1)} = 0\right]$$

(י $$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{1-\cos x}} = e^{\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{1-\cos x}\right)\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)} =$$

$$\left[\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\frac{\sin x}{x})}{1-\cos x} = \lim_{x\to 0}\frac{\ln(\sin x)-\ln x}{1-\cos x} \underset{\text{לופיטל}}{\overset{\text{"}\frac{0}{0}\text{"}}{=}}\right.$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\cos x}{\sin x}-\frac{1}{x}}{\sin x} = \lim_{x\to 0}\frac{x\cos x-\sin x}{x\sin^2 x} \underset{\text{לופיטל}}{\overset{\text{"}\frac{0}{0}\text{"}}{=}}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x - x\sin x - \cos x}{\sin^2 x + 2x\sin x\cos x} = \lim_{x\to 0}\frac{-x}{\sin x+2x\cos x} \underset{\text{לופיטל}}{\overset{\text{"}\frac{0}{0}\text{"}}{=}}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{-1}{\cos x+2\cos x-2x\sin x} = \frac{-1}{1+2-0} = -1/3$$

7) א) הטענה נכונה - הוכחה:

נתון $f'(x)=0$ לכל $a<x<b$ עבור a,b כלשהם ו- $a<b$.

$f(x)$ רציפה וגזירה לכל $a<x<b$ לכן לפי

מ. לגרנז' קיימת נקו' $c\in(a,b)$ כך ש:

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=0 \Rightarrow f(b)-f(a)=0$$

$$\Rightarrow f(b)=f(a)$$

לכל a,b

$\Rightarrow$ הפונ' קבועה

ב) הטענה לא נכונה - פונ' לדוג': $f(x)=arctg\,x$

מתקיים $f'(x)=\frac{1}{1+x^2}>0$ לכל x

אבל $\lim\limits_{x\to\infty} arctg\,x=\frac{\pi}{2}$

תאריך הגשה: 18/1/04

חדו"א א'

תרגיל בית מס' 11

1. מצאו אסימפטוטות עבור הפונקציות:

א. $f(x)=\sqrt{\dfrac{x^3}{x-4}}$

ב. $f(x)=x\cdot arctgx$

2. חקרו את הפונקציות:

א. $f(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}$

ג. $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1-x}}$

ב. $f(x)=x^2\cdot\ln x$

ד. $f(x)=\ln\left(x^2-2x+5\right)$

3. הוכיחו כי עבור $0<x<1$ מתקיים: $2x<\ln(1+x)-\ln(1-x)$

4. הוכיחו כי עבור $0<x<\dfrac{\pi}{3}$ מתקיים: $x+\dfrac{x^3}{3}<tgx$

5. מצאו את מס' הפתרונות של המשוואה $x\sin x+\cos x=x^2$
(רמז: הגדירו פונ', בידקו תחומי עליה וירידה של הפונ' והסיקו בהתאם)

פתרון תרגול בית מס' 11

1) א) $f(x)=\sqrt{\frac{x^3}{x-4}}$

ת.ה: $x>4$ או $x<0$

אסימפטוטה אנכית: $\lim\limits_{x\to 4^+} f(x)=\infty$

$\Leftarrow$ $x=4$ אסימפטוטה אנכית

אסימפטוטה משופעת:

כאשר $x\to\infty$:

$$a=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\sqrt{\frac{x}{x-4}}=1$$

$$b=\lim_{x\to\infty}[f(x)-ax]=\lim_{x\to\infty}\sqrt{\frac{x^3}{x-4}}-x\overset{\text{נכפול ונחלק בצמוד}}{=}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^3}{x-4}-x^2}{\sqrt{\frac{x^3}{x-4}}+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3-x^3+4x^2}{(x-4)\left(\sqrt{\frac{x^3}{x-4}}+x\right)}\overset{\text{נחלק מונה ומכנה ב-}x^2}{=}\frac{4}{2}=2$$

$\Leftarrow$ $y=x+2$ אסימפטוטה משופעת כאשר $x\to\infty$

כאשר $x\to-\infty$:

$$a=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{\frac{x^3}{x-4}}}{-\sqrt{x^2}}=\lim_{x\to-\infty}-\sqrt{\frac{x}{x-4}}=-1$$

$$b=\lim_{x\to-\infty}\sqrt{\frac{x^3}{x-4}}+x=\lim_{y\to\infty}\sqrt{\frac{y^3}{y+4}}-y=$$

נציב $y=-x$ ואז עבור $x\to-\infty$ נקבל $y\to\infty$

$$=\lim_{y\to\infty}y\left(\sqrt{\frac{y}{y+4}}-1\right)=\lim_{y\to\infty}\frac{\sqrt{\frac{y}{y+4}}-1}{\frac{1}{y}}\overset{\text{ל}}{=}$$

"$\frac{0}{0}$"

$$=\lim_{y\to\infty}\frac{\frac{1}{2\sqrt{\frac{y}{y+4}}}\cdot\frac{y+4-y}{(y+4)^2}}{-\frac{1}{y^2}}=\lim_{y\to\infty}\frac{-2y^2}{\sqrt{\frac{y}{y+4}}\,(y+4)^2}=-2$$

$\Leftarrow$ $y=-x-2$ אסימפטוטה משופעת כאשר $x\to-\infty$

ב) $f(x) = x \cdot arctg\, x$

ת.ה: $x \in \mathbb{R}$ $\Leftarrow$ אין אסימפטוטה אנכית

אסימפטוטה משופעת:

כאשר $x \to \infty$: $a = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to \infty} arctg\, x = \frac{\pi}{2}$

$$b = \lim_{x \to \infty} [f(x) - ax] = \lim_{x \to \infty} \left(x\, arctg\, x - \frac{\pi}{2} x\right) =$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{arctg\, x - \frac{\pi}{2}}{1/x} \underset{\text{"}\frac{0}{0}\text{"}}{\overset{\text{ל}}{=}} \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{1}{1+x^2}}{-1/x^2} =$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{-x^2}{1+x^2} = -1$$

$\Leftarrow$ $y = \frac{\pi}{2}x - 1$ אסימפטוטה משופעת

כאשר $x \to -\infty$: $a = \lim\limits_{x \to -\infty} arctg\, x = -\frac{\pi}{2}$

$$b = \lim_{x \to -\infty} [f(x) - ax] = \lim_{x \to -\infty} \left(x\, arctg\, x + \frac{\pi}{2} x\right) =$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{arctg + \frac{\pi}{2}}{1/x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{\frac{1}{1+x^2}}{-1/x^2} = -1$$

$\Leftarrow$ $y = -\frac{\pi}{2}x - 1$ אסימפטוטה משופעת כאשר $x \to -\infty$

2) א)

$$f(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}=\frac{x-1}{x^2}$$

① ת.ה: $x\neq 0$

② נקו' חיתוך עם הצירים: $(1,0)$, אין חיתוך עם ציר y

③ תחומי עליה וירידה ונקו' קיצון:

$$f'(x)=-\frac{1}{x^2}+\frac{2}{x^3}=\frac{2-x}{x^3}$$

נקו' חשודות: $f'(x)$ לא מוגדרת בנקו' $x_1=0$

$f'(x)=0 \Leftarrow x_2=2$

		0		2	
y'	$-$		$+$		$-$
y	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$
		לא מוגדר		Max	

תחומי עליה: $0<x<2$

תחומי ירידה: $x>2$ או $x<0$

נקו' Max: $(2,\frac{1}{4})$

④ קמירות, קעירות ופיתול:

$$f''(x)=\frac{2}{x^3}-\frac{6}{x^4}=\frac{2(x-3)}{x^4}$$

נקו' חשודות: $f''(x)$ לא מוגדרת בנקו' $x_1=0$

$f''(x)=0 \Leftarrow x_2=3$

		0		3	
y''	$-$		$-$		$+$
y	$\cap$		$\cap$		$\cup$
				פיתול	

תחומי קמירות: $x>3$

תחומי קעירות: $0<x<3$ או $x<0$

נקו' פיתול: $x=3$

⑤ אסימפטוטות:

אנכית: $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{x-1}{x^2}=-\infty$, $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{x-1}{x^2}=-\infty$

$\Leftarrow x=0$ אסימפטוטה אנכית

משופעת: $y=ax+b$

כאשר $x\to\infty$:

$$a=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x-1}{x^3}\overset{\text{ל}}{=}\text{"}\frac{\infty}{\infty}\text{"}$$

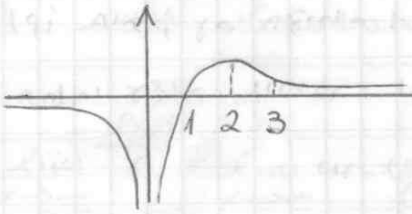
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{3x^2}=0$$

$$b=\lim_{x\to\infty}[f(x)-ax]=\lim_{x\to\infty}\frac{x-1}{x^2}=0$$

⇐ $y=0$ אסימפטוטה משופעת (אופקית) כאשר $x\to\infty$

(באותה דרך נקבל אסימפטוטה $y=0$ כאשר $x\to-\infty$)

⑥ הגרף:



ג) $f(x)=\frac{x}{\sqrt{1-x}} = x(1-x)^{-1/2}$

① ת.ה: $x<1$

② נק' חיתוך עם הצירים: $(0,0)$

③ תחומי עליה וירידה ונק' קיצון:

$$f'(x)=(1-x)^{-1/2}+\tfrac{1}{2}x(1-x)^{-3/2}=$$
$$=\tfrac{1}{2}(1-x)^{-3/2}\left[2(1-x)+x\right]=\frac{2-x}{2(1-x)^{3/2}}>0$$

נשים ♡ כי בכל ת.ה אין נק' קריטיות ומתקיים $f'(x)>0$

לכן $f(x)$ עולה בת.ה $x<1$

④ קמירות, קעירות ופיתול:

$$f''(x)=\tfrac{1}{2}(1-x)^{-3/2}+\tfrac{1}{2}\left[(1-x)^{-3/2}+\tfrac{3}{2}x(1-x)^{-5/2}\right]=$$
$$=\frac{1}{(1-x)^{3/2}}+\frac{3x}{4(1-x)^{5/2}}=\frac{4(1-x)+3x}{4(1-x)^{5/2}}=\frac{4-x}{4(1-x)^{5/2}}>0$$

בכל ת.ה $f''(x)>0$ ולכן $f(x)$ קמורה בת.ה $x<1$

⑤ אסימפטוטות:

אנכית:
$$\lim_{x\to1^-}\frac{x}{\sqrt{1-x}}=\infty$$

⇐ $x=1$ אסימפטוטה אנכית

משופעות: $y=ax+b$

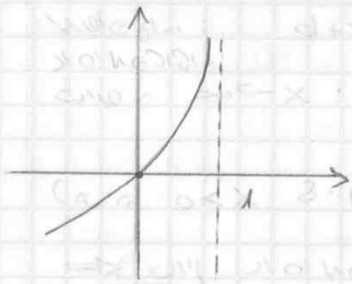
כאשר $x\to-\infty$: (ת.ה $x<1$, לכן נבדוק רק עבור $x\to-\infty$)

$$a=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{\sqrt{1-x}}=0$$

$$b=\lim_{x\to-\infty}\left[f(x)-ax\right]=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{\sqrt{1-x}}\underset{\frac{\infty}{\infty}}{\overset{L}{=}}\lim_{x\to-\infty}2\sqrt{1-x}=\infty$$

⇐ אין אסימפטוטה משופעת

⑥ גרף:



ב)

$f(x) = x^2 \ln x$

① ת.ה: $x>0$

② נקו' חיתוך עם הצירים: $(1,0)$

③ תחומי עליה וירידה ונקו' קיצון:

$$f'(x) = 2x\ln x + x^2\cdot\frac{1}{x} = 2x\ln x + x = x(2\ln x+1)$$

נקו' חשודות: $f'(x)=0 \Leftarrow 2\ln x+1=0 \Leftarrow \ln x=-\frac{1}{2}$

$\Leftarrow x=e^{-1/2}$

		$e^{-1/2}$	
y'	$-$		$+$
y	↘	Min	↗

תחומי עליה: $x>e^{-1/2}$

תחומי ירידה: $0<x<e^{-1/2}$

נקו' Min מקומי: $(e^{-1/2}, -\frac{1}{2}e^{-1})$

④ קמירות, קעירות ופיתול:

$$f''(x) = 2\ln x + 2x\cdot\frac{1}{x} + 1 = 2\ln x+3$$

נקו' חשודות: $f''(x)=0 \Leftarrow 2\ln x=-3 \Leftarrow \ln x=-\frac{3}{2}$

$\Leftarrow x=e^{-3/2}$

		$e^{-3/2}$	
y''	$-$		$+$
y	$\cap$		$\cup$

תחומי קמירות: $x>e^{-3/2}$

תחומי קעירות: $x<e^{-3/2}$

נקו' פיתול: $x=e^{-3/2}$

⑤ אסימפטוטות:

אנכית: $\lim_{x\to 0^+} x^2\ln x = \lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{1/x^2} \overset{L}{=} 0$ $\quad$ "$\frac{-\infty}{\infty}$"

⇐ אין אסימפטוטה אנכית

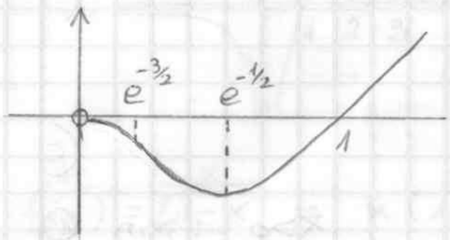
משופעת : $y=ax+b$

כאשר $x\to\infty$: $a=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}x\ln x=\infty$

(תחום $x>0$ לכן נבדוק רק עבור $x\to\infty$)

⇐ אין אסימפטוטה משופעת

⑥ הגרף :



③ $f(x)=\ln(x^2-2x+5)$

① ת.ה: $x^2-2x+5>0$ $(\Delta<0)$ ⇐ $x\in\mathbb{R}$

② נקו' חיתוך עם הצירים: $x=0 \Rightarrow y=\ln 5$

$y=0 \Rightarrow x^2-2x+5=1 \Rightarrow$ אין פתרון

⇐ נקו' חיתוך : $(0,\ln 5)$

③ תחומי עליה וירידה ונקו' קיצון : $f'(x)=\frac{2x-2}{x^2-2x+5}$

נקו' חשודות : $f'(x)=0 \Rightarrow x=1$

		1	
y'	$-$		$+$
y	↘	Min	↗

תחומי עליה : $x>1$

תחומי ירידה : $x<1$

נקו' Min מקומי : $(1,\ln 4)$

④ קמירות, קעירות ופיתול :

$$f''(x)=\frac{2(x^2-2x+5)-(2x-2)^2}{(x^2-2x-5)^2}=\frac{-x^2+2x+3}{(x^2-2x-5)^2}$$

נקו' חשודות :

$f''(x)=0 \Rightarrow -x^2+2x+3=0 \Rightarrow x_1=-1$ או $x_2=3$

		-1		3	
y''	$-$		$+$		$-$
y		פיתול		פיתול	∩

תחומי קמירות : $-1<x<3$

תחומי קעירות : $x<-1$ או $x>3$

נקו' פיתול : $x=-1$, $x=3$

5) אסימפטוטות:

אנכיות: אין

משופעות: $y=ax+b$

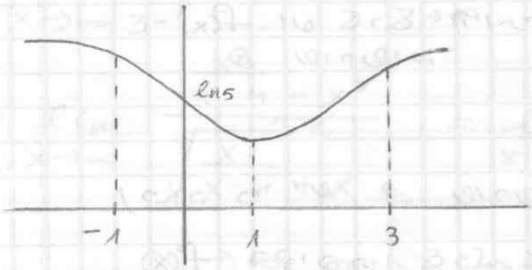
$$a=\lim_{x\to\mp\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\mp\infty}\frac{\ln(x^2-2x+5)}{x}\overset{\text{ל}}{\underset{\text{"}\frac{\infty}{\infty}\text{"}}{=}}\lim_{x\to\mp\infty}\frac{2x-2}{x^2-2x+5}=0$$

$$b=\lim_{x\to\mp\infty}[f(x)-ax]=\lim_{x\to\mp\infty}\ln(x^2-2x+5)=$$

$$\lim_{x\to\mp\infty}\ln((x-1)^2+4)=\infty$$

$\Leftarrow$ אין אסימפטוטה משופעת.

6) הגרף:



3) נגדיר: $f(x)=\ln(1+x)-\ln(1-x)-2x \quad (0<x<1)$

$$f'(x)=\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1-x}-2=\frac{1-x+1+x-2(1-x^2)}{(1+x)(1-x)}=\frac{2x^2}{1-x^2}$$

נתון כי $0<x<1$ ולכן $f'(x)>0$ בתחום הנידון.

$\Leftarrow$ בתחום זה הפונ' עולה, כלומר לכל $0<x<1$

קיים $f(x)>f(0)$.

מכיוון ש: $f(0)=\ln 1-\ln 0-0=0$ קיים

$$0<\ln(1+x)-\ln(1-x)-2x$$

4) נגדיר: $f(x)=tgx-x-\frac{x^3}{3} \quad (0<x<\frac{\pi}{3})$

צ"ל: $f(x)>0$ בתחום הנידון

$$f'(x)=\frac{1}{\cos^2x}-1-x^2=\frac{1-\cos^2x}{\cos^2x}-x^2=tg^2x-x^2$$

לפי משפט: $x<tgx$ לכל $0<x<\frac{\pi}{3}$

$f'(x)>0 \Leftarrow 0<tg^2x-x^2 \Leftarrow x^2<tg^2x \Leftarrow$

לכן, $f(x)$ מונוטונית עולה, כלומר לכל $0<x$

נקבל) $f(0) < f(x)$ כאשר $f(0)=0$

$\Leftarrow$ $0 < f(x)$ $\Leftarrow$ $0 < tgx - x - \frac{x^3}{3}$

5) נגדיר: $f(x) = x\sin x + \cos x - x^2$

נבדוק נקו' קיצון ותחומי עליה וירידה של הפונ':

$f'(x) = \sin x + x\cos x - \sin x - 2x = x(\cos x - 2)$

לכל x, $\cos x - 2 < 0$ לכן $f'(x)$ מתאפס רק

בנקו' $x=0$

		0	
y'	+		−
y	↗	Max	↘

$\Rightarrow$ ל-$f(x)$ יש לכל היותר 2 שורשים

נראה כי יש 2 שורשים בדיוק:

$f(x)$ רציפה לכל x (סכום של פונ' אלמנטריות)

ומתקיים:

$$\left.\begin{array}{l} f(-\pi) = -1-\pi^2 < 0 \\ f(0) = 1 > 0 \\ f(\pi) = -1-\pi^2 < 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} f(-\pi)\cdot f(0) < 0 \\ f(0)\cdot f(\pi) < 0 \end{array}$$

$\Leftarrow$ לפי משפט ע.ב קיים פתרון בקטע $(-\pi,0)$

וקיים פתרון בקטע $(0,\pi)$

$\Leftarrow$ למשו' $x\sin x + \cos x = x^2$ יש 2 פתרונות!

תאריך הגשה: 25/1/04

חדו"א א'

תרגיל בית מס' 12

1. פתחו לטור מקלורן את הפונקציות:

א. $f(x)=e^{2x-x^2}$ כאשר n=5

ב. $f(x)=\ln(\cos x)$ כאשר n=2

ג. $f(x)=\begin{cases}\frac{\sin x}{x} & x\neq 0\\ 1 & x=0\end{cases}$ כאשר n=2

2. בעזרת טור מקלורן של הפונ' $f(x)=e^x$ כאשר n=3, חשבו את $e^{\frac{7}{8}}$ והעריכו את השגיאה.

3. חשבו את $\ln(1.03)$ בדיוק של 0.01.

4. חשבו את האינטגרלים הבאים:

א. $\int\frac{3}{\sqrt{x+3}}dx$

ב. $\int\frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}dx$

ג. $\int\frac{\sqrt{\ln x}}{x}dx$

ד. $\int\frac{dx}{e^{2x}+e^x+1}$

ה. $\int e^{3\sqrt{x}}dx$

ו. $\int\frac{\ln x}{\sqrt[3]{x}}dx$

ז. $\int\ln^2 x dx$

ח. $\int\sin(\ln x)dx$

ט. $\int\frac{x^4-x^3-x-1}{x^3-x^2}dx$

י. $\int\frac{x^4}{x^4+5x^2+4}dx$

יא. $\int\frac{dx}{1+\sin x}$

יב. $\int\frac{\sin^7 x}{\cos^2 x}dx$

בהצלחה!

רמזים לפתירת תרגיל בית מס' 12:

לגבי סעיף 4:

ד. נסו לפתור לפי שיטת ההצבה
ו+ז. נסו לפתור לפי שיטת אינטגרציה בחלקים
ח+ט. בצעו אינטגרציה של פונקציות רציונליות

הערה: באתר הקורס מפורסמים תרגילים נוספים (עם פתרונות) בנושא אינטגרלים.

פתרון תרגול בית מס' 12

1) א)

$f(x)=e^{2x-x^2}$

$f'(x)=(2-2x)e^{2x-x^2}$

$f''(x)=-2e^{2x-x^2}+(2-2x)^2e^{2x-x^2}=e^{2x-x^2}(2-8x+4x^2)$

$f'''(x)=e^{2x-x^2}(-4-12x+24x^2-8x^3)$

$f^{(4)}(x)=e^{2x-x^2}(-20-32x+48x^2-64x^3+16x^4)$

$f^{(5)}(x)=e^{2x-x^2}(-8+200x-64x^2-16x^3+160x^4-32x^5)$

לכן,

$f(0)=e^0=1$

$f'(0)=2\cdot e^0=2$

$f''(0)=e^0\cdot 2=2$

$f'''(0)=e^0\cdot(-4)=-4$

$f^{(4)}(0)=e^0\cdot(-20)=-20$

$f^{(5)}(0)=e^0\cdot(-8)=-8$

נציב בנוסחת מקלורן ונקבל:

$$f(x)=e^{2x-x^2}=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+\frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4+\frac{f^{(5)}(0)}{5!}x^5+R_5(x)=$$

$$=1+2x+x^2-\tfrac{2}{3}x^3-\tfrac{5}{6}x^4-\tfrac{1}{15}x^5+R_5(x)$$

כאשר $R_5(x)=\dfrac{f^{(6)}(c)}{6!}x^6$

ב)

$f(x)=\ln(\cos x)$ $f(0)=0$

$f'(x)=-\dfrac{\sin x}{\cos x}=-tg x$ $f'(0)=0$

$f''(x)=-\dfrac{1}{\cos^2 x}$ $f''(0)=-1$

נציב בנוסחת מקלורן ונקבל:

$$f(x)=\ln(\cos x)=-\tfrac{1}{2}x^2+R_2(x)$$

כאשר $R_2(x)=\dfrac{f^{(3)}(c)}{3!}x^3=-\dfrac{\sin c}{3\cos^3 c}x^3$

ג)

$$f(x)=\begin{cases}\frac{\sin x}{x} & x\neq 0\\ 1 & x=0\end{cases}$$

f(x) אינו מוגדר כאשר x=0 היא נקודת תפר, ולכן נצטרך לחשב את f'(0) ו- f''(0) לפי הגדרה.

$$x\neq 0:\quad f'(x)=\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}$$

$$x=0:\quad f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\frac{\frac{\sin x}{x}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x}{x^2}\overset{\text{ל}}{\underset{\frac{0}{0}}{=}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{2x}\overset{\text{ל}}{\underset{\frac{0}{0}}{=}}\lim_{x\to 0}\frac{-\sin x}{2}=0$$

קיבלנו:

$$f'(x)=\begin{cases}\frac{x\cos x-\sin x}{x^2} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$$

מתקיים:

$$f''(x)=[f'(x)]'=\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)-f'(0)}{x-0}$$

לכן מנקודה 0 נקבל:

$$f''(0)=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}-0}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{x\cos x-\sin x}{x^3}\overset{\text{ל}}{\underset{\frac{0}{0}}{=}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cancel{\cos}x-x\sin x-\cancel{\cos}x}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{-\sin x}{3x}=-\frac{1}{3}$$

נציב בנוסחת מקלורין ונקבל:

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+R_2(x)=$$

$$=1-\frac{1}{6}x^2+R_2(x)$$

$$\Rightarrow f(x)\approx 1-\frac{1}{6}x^2$$

2) $f^{(k)}(x) = e^x \quad (k=0..3) \Rightarrow f^{(k)}(0) = 1$

ולכן בפיתוח מקלורן עד $n=3$ נקבל:

$$f(x) = e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + R_3(x)$$

$$\Rightarrow e^{7/8} \approx 1 + 7/8 + \frac{1}{2}(7/8)^2 + \frac{1}{6}(7/8)^3 \approx 2.369$$

נעריך את השגיאה: $|R_3(7/8)| = \left| \frac{e^c}{4!}\left(\frac{7}{8}\right)^4 \right| < \frac{e}{24}\left(\frac{7}{8}\right)^4$

c נקודה בין 0 ל-x
כאשר $x = 7/8$

3) לפי פיתוח מקלורן של הפונ' $f(x) = \ln(1+x)$ מתקיים:

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + R_n(x)$$

עבור $x > -1$.

נרצה לחשב את $\ln(1.03)$ כלומר את $\ln(1+0.03)$ בדיוק של $\frac{1}{100}$

לכן נדרוש שיתקיים $|R_n(x)| < \frac{1}{100}$.

נשים ♡ כי $\frac{0.03^{n+1}}{n+1} < \frac{1}{100}$ החל מ-$n=1$ כי $\frac{0.03^2}{2} < \frac{1}{100}$

לכן פיתוח מקלורן הינו עד $n=1$, כלומר:

$$\ln(1+x) \approx x$$

$$\Rightarrow \ln(1+0.03) \approx 0.03$$

בדיוק של 0.01

4) א) $\int \frac{3}{\sqrt{x+3}}dx = 3\int \frac{dx}{\sqrt{x+3}} = 3\int (x+3)^{-1/2}dx = 3\frac{(x+3)^{1/2}}{1/2} + C$

$= 6\sqrt{x+3} + C$

ב) $\int \frac{x^2}{1+x^2}dx = \int \frac{x^2+1-1}{x^2+1}dx = \int dx - \int \frac{dx}{x^2+1} = x - \arctan x$

ג) $\int \frac{\sqrt{\ln x}}{x}dx = \int \sqrt{t}\,dt = \frac{2}{3}t^{3/2} + C = \frac{2\sqrt{\ln^3 x}}{3} + C$

$t = \ln x \Rightarrow dt = \frac{dx}{x}$

ד) $\int \frac{dx}{e^{2x}+e^x+1} = \int \frac{dt}{t(t^2+t+1)} \Rightarrow$ נחשב את האינט' כפונ' רציונלית:

$t = e^x \Rightarrow dt = e^x dx$

$\Rightarrow dx = \frac{dt}{t}$

$$\frac{1}{t(t^2+t+1)} = \frac{A}{t} + \frac{Bt+c}{t^2+t+1}$$

$$1 = A(t^2+t+1) + (Bt+c)t$$

השוויון מתקיים לכל t אם:

$t=0: \quad A=1$

$t=-1: \quad 1 = 1+B-c \Rightarrow B=c$

$t=1: \quad 1 = 3+B+c = 3+2B \Rightarrow B=-1=c$

$$\Rightarrow \int\frac{dt}{t(t^2+t+1)} = \int\frac{dt}{t} - \int\frac{t+1}{t^2+t+1}dt =$$

$$= \ln|t| - \tfrac{1}{2}\int\frac{2t+1}{t^2+t+1} - \tfrac{1}{2}\int\frac{dt}{\underbrace{t^2+t+1}_{(t+\frac{1}{2})^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2}} =$$

$$= \ln|t| - \tfrac{1}{2}\ln|t^2+t+1| - \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{t+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right) + c =$$

$$= \ln|t| - \tfrac{1}{2}\ln|t^2+t+1| - \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2t+1}{\sqrt{3}} + c =$$

$$= \ln|e^x| - \tfrac{1}{2}\ln|e^{2x}+e^x+1| - \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2e^x+1}{\sqrt{3}} + c$$

ה) $$\int e^{3\sqrt{x}}dx = \int e^{3t}\cdot 2t\,dt = 2\int e^{3t}\cdot t\,dt =$$

$t=\sqrt{x} \Rightarrow t^2=x \Rightarrow 2t\,dt=dx$

$\begin{cases} u=t \Rightarrow u'=1 \\ v'=e^{3t} \Rightarrow v=\frac{1}{3}e^{3t} \end{cases}$

$$= 2\left(\tfrac{1}{3}te^{3t} - \tfrac{1}{3}\int e^{3t}dt\right) =$$

$$= \tfrac{2}{3}te^{3t} - \tfrac{2}{3}\left(\tfrac{1}{3}e^{3t}\right) + c = \tfrac{2}{3}\sqrt{x}e^{3\sqrt{x}} - \tfrac{2}{9}e^{3\sqrt{x}} + c$$

ו) $$\int\frac{\ln x}{\sqrt[3]{x}}dx = \int \ln x\cdot x^{-\frac{1}{3}}dx = \tfrac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}\ln x - \tfrac{3}{2}\int x^{-\frac{1}{3}}dx =$$

$\begin{cases} u=\ln x \Rightarrow u'=\frac{1}{x} \\ v'=x^{-\frac{1}{3}} \Rightarrow v=\frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}} \end{cases}$

$$= \tfrac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}\ln x - \tfrac{3}{2}\left(\tfrac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}\right) + c =$$

$$= \tfrac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}\left(\ln x - \tfrac{3}{2}\right) + c$$

ז) $$\int \ln^2 x\,dx = x\ln^2 x - 2\int \ln x\,dx =$$

$\begin{cases} u=\ln^2 x \Rightarrow u'=\frac{2\ln x}{x} \\ v'=1 \Rightarrow v=x \end{cases}$

$\begin{cases} u=\ln x \Rightarrow u'=\frac{1}{x} \\ v'=1 \Rightarrow v=x \end{cases}$

$$= x\ln^2 x - 2\left(x\ln x - \int dx\right) = x\ln^2 x - 2x\ln x + 2x + c$$

ח) $\overbrace{\int \sin(\ln x)\,dx}^{I} = x\sin(\ln x) - \int \cos(\ln x)\,dx =$

$\begin{cases} u=\sin(\ln x) \Rightarrow u'=\dfrac{\cos(\ln x)}{x} \\ v'=1 \Rightarrow v=x \end{cases}$ $\qquad$ $\begin{cases} u=\cos(\ln x) \Rightarrow u'=\dfrac{-\sin(\ln x)}{x} \\ v'=1 \Rightarrow v=x \end{cases}$

$= x\sin(\ln x) - x\cos(\ln x) - \underbrace{\int \sin(\ln x)\,dx}_{I}$

$\Longrightarrow 2\underbrace{\int \sin(\ln x)\,dx}_{I} = x\sin(\ln x) - x\cos(\ln x)$

לעבור אגפים

$\Longrightarrow \int \sin(\ln x)\,dx = \dfrac{x\sin(\ln x) - x\cos(\ln x)}{2}$

ט) $\int \dfrac{x^4-x^3-x-1}{x^3-x^2}\,dx = \int \left(x - \dfrac{x+1}{x^3-x^2}\right)dx =$

נבצע חלוקת פולינומים

$= \int x\,dx - \int \dfrac{x+1}{x^2(x-1)}\,dx =$

$\dfrac{x+1}{x^2(x-1)} = \dfrac{A}{x} + \dfrac{B}{x^2} + \dfrac{C}{x-1} \Rightarrow x+1 = Ax(x-1) + B(x-1) + Cx^2$

השוויון נכון לכל x לכן:

$x=0:\ B=-1$

$x=1:\ C=2$

$x=2:\ 3=2A-1+8 \Rightarrow A=-2$

$= \int x\,dx + 2\int \dfrac{dx}{x} + \int \dfrac{dx}{x^2} - \int \dfrac{2}{x-1}\,dx =$

$= \frac{1}{2}x^2 + 2\ln|x| - \dfrac{1}{x} - 2\ln|x-1| + c$

י) $\int \dfrac{x^4}{x^4+5x^2+4}\,dx = \int dx - \int \dfrac{5x^2+4}{\underbrace{x^4+5x^2+4}_{(x^2+1)(x^2+4)}}\,dx =$

נבצע חלוקת פולינומים

$\dfrac{5x^2+4}{(x^2+1)(x^2+4)} = \dfrac{A}{x^2+1} + \dfrac{B}{x^2+4}$

$5x^2+4 = A(x^2+4) + B(x^2+1)$

$A = -1/3\ ,\ B = 16/3$

$= \int dx + 1/3\int \dfrac{dx}{x^2+1} - 16/3 \int \dfrac{dx}{x^2+\underbrace{4}_{2^2}} =$

$= x + 1/3\,\mathrm{arctg}\,x - 16/3\left(1/2\,\mathrm{arctg}\dfrac{x}{2}\right) + c$

$$= x + \tfrac{1}{3}\operatorname{arctg} x - \tfrac{8}{3}\operatorname{arctg}\left(\tfrac{x}{2}\right) + c$$

יא) $\displaystyle \int \frac{dx}{1+\sin x} = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{1+\frac{2t}{1+t^2}} =$

ונבצע אינטגרציה על פי טריגונומטריה:

$$\begin{cases} t = tg\,\frac{x}{2} \\ dx = \frac{2dt}{1+t^2} \\ \sin x = \frac{2t}{1+t^2} \end{cases}$$

הסבר בספר מיוחד עמ׳ 251

$$= \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{1+t^2+2t}{1+t^2}} = 2\int \frac{dt}{\underbrace{1+t^2+2t}_{(1+t)^2}} = \frac{-2}{1+t} + C = \frac{-2}{1+tg\frac{x}{2}} + C$$

יב) $\displaystyle \int \frac{\sin^7 x}{\cos^2 x}\,dx = \int \frac{(\overbrace{\sin^2 x}^{1-\cos^2 x})^3 \sin x}{\cos^2 x}\,dx =$

$$t = \cos x \Rightarrow -dt = \sin x\,dx$$

$$= -\int \frac{(1-t^2)^3 dt}{t^2} = -\int \frac{1-3t^2+3t^4-t^6}{t^2}\,dt =$$

$$= -\int \left(\frac{1}{t^2} - 3 + 3t^2 - t^4\right) dt$$

$$= \frac{1}{t} + 3t - t^3 + \frac{t^5}{5} + C$$

$$= \frac{1}{\cos x} + 3\cos x - \cos^3 x + \frac{\cos^5 x}{5} + C$$