24.02.05

[illegible] I

חדו"א - 2

אינטגרלים לא אמיתיים

עפ"י ההגדרה, האינטגרל המסוים הוא על קטע סגור $[a,b]$ בלבד והפונק' $f(x)$ חייבת להיות חסומה בקטע (לפי משפט)
נרצה להרחיב את מושג האינטגרל כך שיחול גם על הקטעים $(-\infty,\infty)$, $[b,\infty)$, $(-\infty,a]$ וכן על פונק' שאינן חסומות.
אינטגרלים כאלה נקראים האינטגרלים לא אמיתיים.

* אינטגרל לא אמיתי אינו בהכרח מתכנס ואינו בהכרח לא מתכנס.

אינטגרלים עם גבולות אינטגרציה אינסופיים.

נגדיר:

$$\text{I} \quad \int_a^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)\,dx$$

$$\text{II} \quad \int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)\,dx$$

אם הגבול קיים — נאמר כי האינטגרל הלא אמיתי של $f(x)$ בקטע $(-\infty,a]$ / $[b,\infty)$ קיים או מתכנס.
אחרת נאמר כי הוא אינו קיים או מתבדר

בדקו את האינטגרלים הבאים:

$$\int_2^{\infty}\frac{x+1}{x^2(1-x)}\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_2^b \frac{x+1}{x^2(1-x)}\,dx =$$

$$= \lim_{b\to\infty}\int_2^b\left(\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{2}{1-x}\right)dx =$$

$$= \lim_{b\to\infty}\int_2^b\left(\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x-1}\right)dx =$$

פירוק לשברים

$$\frac{x+1}{x^2(1-x)} = \frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{(1-x)}$$

$$x+1 = Ax(1-x)+B(1-x)+Cx^2$$

$$x=0 \Rightarrow B=1$$
$$x=1 \rightarrow C=2$$
$$x=-1 \rightarrow A=2$$

$$= \lim_{b\to\infty}\left[2\ln|x| - \frac{1}{x} - 2\ln|x-1|\right]_2^b =$$

$$\ln a - \ln b = \ln\frac{a}{b}$$

$$= \lim_{b\to\infty}\left[2\ln\left|\frac{b}{b-1}\right| - \frac{1}{b} - 2\ln 2 + \frac{1}{2}\right] = \frac{1}{2} - 2\ln 2$$

$\Leftarrow$ האינטגרל מתכנס

$$②\ \int_{-\infty}^{1} \frac{e^x\,dx}{1+e^{2x}} = \lim_{b\to-\infty} \int_{b}^{1} \frac{e^x\,dx}{1+e^{2x}} = \lim_{b\to-\infty} \int_{e^b}^{e} \frac{t\,dt}{1+t^2} =$$

$$t = e^x$$
$$dt = e^x dx$$

$$x=1 \Rightarrow e^x = e$$
$$x=b \Rightarrow e^x = e^b$$

$$= \lim_{b\to-\infty} \operatorname{arctg}(t)\Big|_{e^b}^{e} = \operatorname{arctg}(e) - \operatorname{arctg}(e^b) = \operatorname{arctg}(e)$$

⇐ האינטגרל מתכנס.

$$③\ \int_{2}^{\infty} \frac{x^3\,dx}{\sqrt{x^4-1}} = \lim_{b\to\infty} \int_{2}^{b} \frac{x^3\,dx}{\sqrt{x^4-1}} = \frac{1}{4}\lim_{b\to\infty} \int_{2}^{b} \underbrace{(4x^3)}_{u'}\cdot(x^4-1)^{-\frac{1}{2}}\,dx =$$

$$\int u'(x)\cdot u^n(x)\,dx = \frac{u^{n+1}(x)}{n+1}$$
$$(x^4-1)' = 4x^3 \ ; \ n = -\tfrac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{4}\lim_{b\to\infty} \int_{2}^{b} \frac{4x^3\,dx}{(x^4-1)^{2}} = \lim_{b\to\infty}\left(\tfrac{1}{2}\cdot\sqrt{b^4-1} - \tfrac{1}{2}\sqrt{15}\right) = \infty$$

⇐ האינטגרל מתבדר

כמו כן נגדיר $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx + \int_{a}^{\infty} f(x)\,dx$

עבור נק' כלשהי a.

אם שני האינטגרלים באגף ימין מתכנסים אז נאמר כי האינטגרל באגף שמאל מתכנס,

אם אחד מהם מתבדר ⇐ נאמר כי האינטגרל מתבדר.

הערה חשובה: התוצאה אינה תלויה בבחירת a !!!

תרגילים:

$$①\ I = \int_{-\infty}^{\infty} e^x\,dx = \underbrace{\int_{-\infty}^{0} e^x\,dx}_{I_1} + \underbrace{\int_{0}^{\infty} e^x\,dx}_{I_2}$$

$$I_2 = \int_{0}^{\infty} e^x\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_{0}^{b} e^x\,dx = \lim_{b\to\infty} e^b\Big|_{0}^{b} = \lim_{b\to\infty} e^b - 1 = \infty$$

⇐ האינטגרל I מתבדר

אינטגרל של פונקציה לא חסומה

לפי משפט, אם $f(x)$ אינה חסומה ב-$[a,b]$, אזי היא אינה אינטגרבילית בו במובן הרגיל.

אינטגרל של פונקציה לא חסומה אלא במובן בו באה לידי ביטוי אי-החסימות של $f(x)$.

קיימים 3 מקרים:

1) $f(x)$ אינה חסומה בסביבת הנק' $x=b$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx = \lim_{t\to b^-}\int_a^t f(x)\,dx$$

2) $f(x)$ אינה חסומה בסביבת הנק' $x=a$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx = \lim_{t\to a^+}\int_t^b f(x)\,dx$$

3) $f(x)$ אינה חסומה בסביבת הנק' $x=c$ כאשר $c\in(a,b)$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \underbrace{\int_a^c f(x)\,dx}_{\text{מקרה I}} + \underbrace{\int_c^b f(x)\,dx}_{\text{מקרה II}}$$

דוגמאות:

(1)
$$\int_0^1 \ln^2 x\,dx = \lim_{b\to 0^+}\int_b^1 \underbrace{\ln^2 x}_{u\vartheta'}\,dx =$$

$$\int u\vartheta' = u\vartheta - \int u'\vartheta$$

$$u=\ln^2 x \to u'=\frac{2\ln x}{x}$$
$$\vartheta'=1 \to \vartheta=x$$

$$= \lim_{b\to 0^+} x\ln^2 x \Big|_b^1 - \lim_{b\to 0^+}\int_b^1 x\frac{2\ln x}{x}\,dx =$$

$$= \lim_{b\to 0^+} -b\ln^2 b - 2\lim_{b\to 0^+}\int_b^1 \ln x\,dx =$$

$$u=\ln x \Rightarrow u'=\frac{1}{x}$$
$$\vartheta'=1 \Rightarrow \vartheta=x$$

$$= \lim_{b\to 0^+}\left[-b\ln^2 b - 2\lim_{b\to 0^+}\left(x\ln x\Big|_b^1 - \int_b^1 dx\right)\right] =$$

$$= \lim_{b\to 0^+}\left[\underset{0}{-b\ln^2 b} + \underset{0}{2b\ln b} - \underset{0}{2b} + 2\right] = 2 \Rightarrow$$

האינטגרל מתכנס

$$\lim_{b\to 0^+} \underbrace{b\ln^2 b}_{0\cdot\infty} = \lim_{b\to 0^+} \frac{\ln^2 b}{\frac{1}{b}} = \frac{\infty}{\infty} \underset{\text{לופיטל}}{=} \lim_{b\to 0^+} \frac{\frac{2\ln b}{b}}{-\frac{1}{b^2}} =$$

$$= \lim_{b\to 0^+} \frac{2\ln b}{-\frac{1}{b}} \underset{\text{לופיטל}}{=} \lim_{b\to 0^+} \frac{\frac{2}{b}}{\frac{1}{b^2}} = \lim_{b\to 0^+} \frac{2}{\frac{1}{b}} = \lim_{b\to 0^+} 2b = 0$$

$$\lim_{b\to 0^+} b\ln b = 0$$

3.03.05

תרגול II

שעת קבלה:

ב': 12:00-13:00

חדר מעבדות

$$\int_a^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)\,dx$$

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)\,dx$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{c\to a^+}\int_c^b f(x)\,dx$$

$a \leftarrow$ נק' סינגולרית שבה $f(x)$ לא מוגדרת

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{c\to b^-}\int_a^c f(x)\,dx$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx + \int_c^{\infty} f(x)\,dx$$

דוגמא.

(1) $$\int_1^2 \frac{1-x}{\sqrt{2-x}}\,dx = \lim_{b\to2^-}\int_1^b \frac{1-x}{\sqrt{2-x}}\,dx = \lim_{b\to2^-}\int_1^b \frac{2-x-1}{\sqrt{2-x}}\,dx =$$

$$= \lim_{b\to2^-}\int_1^b \left(\sqrt{2-x} - \frac{1}{\sqrt{2-x}}\right)dx =$$

$$\int u'\cdot u^n = \frac{u^{n+1}}{n+1}$$

$$= \lim_{b\to2^-}\int_1^b \left((-1)(2-x)^{\frac12}(-1) - (2-x)^{-\frac12}\right)dx =$$

$$= \lim_{b\to2^-}\left[-\frac{(2-x)^{\frac12+1}}{\frac32} + \frac{(2-x)^{-\frac12+1}}{\frac12}\right]_1^b = \lim_{b\to2^-}\left[-\frac23\sqrt{(2-x)^3} + 2\sqrt{2-x}\right]_1^b =$$

$$= \lim_{b\to2^-}\Big[\underbrace{-\frac23\sqrt{(2-b)^3}}_{=0} + \underbrace{2\sqrt{2-b}}_{=0}\Big] + \frac23\sqrt{(2-1)^2} - 2\sqrt{2-1} = -\frac43$$

(2) $$\int_{1/2}^{e^2} \frac{dx}{x\cdot\sqrt[3]{\ln x}} = \underbrace{\int_{1/2}^{1} \frac{dx}{x\cdot\sqrt[3]{\ln x}}}_{I_1} + \underbrace{\int_1^{e^2} \frac{dx}{x\cdot\sqrt[3]{\ln x}}}_{I_2}$$

[illegible] $x=1$

$$I_1 = \int_{1/2}^{1} \frac{dx}{x\cdot\sqrt[3]{\ln x}} = \lim_{b\to1^-}\int_{1/2}^{b}\frac{dx}{x\sqrt[3]{\ln x}} = \lim_{b\to1^-}\int_{\ln\frac12}^{\ln b}\frac{dt}{\sqrt[3]{t}} = \lim_{b\to1^-}\int_{1/2}^{b}\frac32\sqrt[3]{t^2}\Big|_{\ln\frac12}^{\ln b} =$$

הצבה: $t=\ln x$

$dt = \frac{dx}{x}$

$x=\frac12 \longrightarrow t=\ln\frac12$ ..

$$= \frac32\underbrace{\sqrt[3]{\ln^2 b}}_{=0} - \frac32\sqrt[3]{\ln^2\frac12} = -\frac32\sqrt[3]{\ln^2\frac12}$$

$$I_2=\int_1^{e^2}\frac{dx}{x\sqrt[3]{\ln x}}=\lim_{a\to 1^+}\int_a^{e^2}\frac{dx}{x\sqrt[3]{\ln x}}=\lim_{a\to 1^+}\left[\frac{3}{2}\sqrt[3]{t^2}\right]_{\ln a}^{2}$$

$$=\lim_{a\to 1^+}\Big[\frac{3}{2}\sqrt[3]{4}-\underset{\overset{\|}{0}}{\frac{3}{2}\sqrt[3]{\ln^2 a}}\Big]=\frac{3}{2}\sqrt[3]{4}$$

$$I=I_1+I_2=-\frac{3}{2}\cdot\ln^2\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\sqrt[3]{4}$$

(3)

$$\int_0^1\left(\frac{3x^2-1}{x^3-x}\right)dx=\underbrace{\int_0^{\frac{1}{2}}\left(\frac{3x^2-1}{x^3-x}\right)dx}_{I_1}+\underbrace{\int_{\frac{1}{2}}^1\left(\frac{3x^2-1}{x^3-x}\right)dx}_{I_2}=\dots$$

$x=0,1$ [illegible]

$$I_1=\int_0^{1/2}\frac{3x^2-1}{x^3-x}\,dx=\lim_{b\to 0^+}\int_b^{\frac{1}{2}}\frac{3x^2-1}{x^3-x}dx=\lim_{b\to 0^+}\ln|x^3-x|\Big|_b^{\frac{1}{2}}=$$

$$=\ln\left|\frac{1}{8}-\frac{1}{2}\right|-\lim_{b\to 0^+}\underbrace{\ln|b^3-b|}_{\downarrow\ -\infty}=+\infty$$

⇐ האינטגרל מתבדר

(4)

$$\int_{\frac{2}{\pi}}^{\infty}\frac{1}{x^2}\cdot\sin\frac{1}{x}\,dx=\lim_{b\to\infty}\int_{\frac{2}{\pi}}^{b}\frac{1}{x^2}\cdot\sin\frac{1}{x}\,dx=\lim_{b\to\infty}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{1}{b}}-\sin t\,dt=\lim_{b\to\infty}\cos t\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{1}{b}}$$

$$\frac{1}{x}=t \qquad dt=-\frac{dx}{x^2}$$

$$x=\frac{2}{\pi}\Rightarrow t=\frac{\pi}{2} \qquad x=b\Rightarrow t=\frac{1}{b}$$

$$=\lim_{b\to\infty}\underset{\overset{\|}{1}}{\cos\frac{1}{b}}-\underset{\overset{\|}{0}}{\cos\frac{\pi}{2}}=1$$

(5)

$$\int_0^1\frac{e^t\,dt}{\sqrt{e^t-1}}=\lim_{b\to 0^+}\int_b^1\frac{e^t\,dt}{\sqrt{e^t-1}}=\lim_{b\to 0^+}\frac{u^{-\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}}\Bigg|_{e^b-1}^{e-1}=$$

בעיה $\to 0$

$$u=e^t-1 \qquad du=e^t\,dt$$

$$t=b\to u=e^b-1 \qquad t=1\to u=e-1$$

$$=2\sqrt{e-1}-\lim_{b\to 0^+}\underset{\overset{\|}{0}}{2\sqrt{e^b-1}}=$$

$$=2\sqrt{e-1}$$

(6)

$$\int_0^{\infty}e^{-ex}dx=\lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{-ex}dx=-\frac{1}{e}\lim_{b\to\infty}\int_0^b(-e)e^{-ex}dx=$$

$$=-\frac{1}{e}\lim_{b\to\infty}\left[e^{-ex}\right]_0^b=-\frac{1}{e}\lim_{b\to\infty}\underset{\overset{\|}{0}}{e^{-eb}}+\frac{1}{e}e^0=\frac{1}{e}$$

7) $\int_{-\infty}^{\infty} x\cdot e^{-x^2}\,dx = \underbrace{\int_{-\infty}^{0} x\cdot e^{-x^2}\,dx}_{I_1} + \underbrace{\int_{0}^{\infty} x\cdot e^{-x^2}\,dx}_{I_2} =$

$I_1 = \int_{-\infty}^{0} x\cdot e^{-x^2}\,dx = \lim_{b\to-\infty}\int_{b}^{0} x\cdot e^{-x^2}\,dx = \lim_{b\to-\infty}\int_{-b^2}^{0}\frac{dt}{-2}\cdot e^t =$

$t=-x^2$
$dt=-2x\,dx$
$x=b \to t=b^2$
$x=0 \to t=0$

$= \lim_{b\to\infty} -\frac{1}{2}e^t \Big|_{-b^2}^{0} =$

$= -\frac{1}{2}e^0 + \frac{1}{2}\lim_{b\to-\infty} e^{-b^2} = -\frac{1}{2}$

$I_2 = \int_{0}^{\infty} x\cdot e^{-x^2}\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_{0}^{b} x\,e^{-x^2}\,dx = \lim_{b\to\infty} -\frac{1}{2}e^t \Big|_{0}^{b^2} = -\frac{1}{2}\lim_{b\to\infty} e^{-b^2} + \frac{1}{2}e^0 =$

$= \frac{1}{2}$

מתכנס $\int$ האינטגרל $\Leftarrow$

$I_1 + I_2 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0 = I$

8) $I = \int_{0}^{\pi}\frac{\sin x}{\sqrt[3]{\cos x}}\,dx = \underbrace{\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{\sqrt[3]{\cos x}}\,dx}_{I_1} + \underbrace{\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{\sin x}{\sqrt[3]{\cos x}}\,dx}_{I_2}$

$x=\frac{\pi}{2}$ סינג'

$I_1 = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{\sqrt[3]{\cos x}}\,dx = \lim_{b\to\frac{\pi}{2}^-}\int_{0}^{b}\frac{\sin x}{\sqrt[3]{\cos x}}\,dx = \lim_{b\to\frac{\pi}{2}^-} -\int_{0}^{b}(-\sin x)(\cos x)^{-\frac{1}{3}}\,dx =$

$= \lim_{b\to\frac{\pi}{2}^-}\left[-\frac{(\cos x)^{-\frac{1}{3}+1=\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}}\right]_{0}^{b} = -\frac{3}{2}\lim_{b\to\frac{\pi}{2}^-}\underbrace{\sqrt[3]{\cos^2 b}}_{\overset{\shortparallel}{0}} + \frac{3}{2}\sqrt[3]{\cos^2 0} = \frac{3}{2}$

$I_2 = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{\sin x}{\sqrt[3]{\cos x}}\,dx = \lim_{b\to\frac{\pi}{2}^+} -\frac{3}{2}\sqrt[3]{\cos^2 x}\Big|_{b}^{\pi} = -\frac{3}{2}\sqrt[3]{\cos^2\pi} + \frac{3}{2}\underbrace{\sqrt[3]{\cos^2 b}}_{\overset{\shortparallel}{0}} = -\frac{3}{2}$

$I = I_1 + I_2 = \frac{3}{2} - \frac{3}{2} = 0$

סה"כ:

9) $\int_{2}^{\infty}\frac{dx}{x^2-x-2} = \int_{2}^{\infty}\frac{dx}{(x-2)(x+1)} = \int_{2}^{3}\frac{dx}{(x-2)(x+1)} + \int_{3}^{\infty}\frac{dx}{(x-2)(x+1)}$

$x=2,\ -1$

$I_1 = \int_{2}^{3}\frac{dx}{(x-2)(x+1)} = \lim_{b\to2^+}\frac{1}{3}\int_{b}^{3} -\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-2}\,dx =$

$\frac{1}{(x+1)(x-2)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-2}$
$1 = A(x-2) + B(x+1)$
$x=2 \Rightarrow 1=3B \Rightarrow B=\frac{1}{3}$
$x=-1 \Rightarrow 1=-3A \Rightarrow A=-\frac{1}{3}$

$= \frac{1}{3}\lim_{b\to2^+}\Big[-\ln|x+1| + \ln|x-2|\Big]_{b}^{3} = \frac{1}{3}\lim_{b\to2^+}\ln\left|\frac{x-2}{x+1}\right|\Big]_{b}^{3} =$

$= \frac{1}{3}\ln\left|\frac{3-2}{3+1}\right| - \frac{1}{3}\lim_{b\to2^+}\ln\left|\frac{b-2}{b+1}\right| = +\infty$

$\ln\frac{0}{3} \to \infty ?$

$$\int_1^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2}\,dx = \lim_{b\to\infty} \int_1^{b} \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2}\,dx = \lim_{b\to\infty} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\operatorname{arctg} b} t\,dt =$$

$$t = \operatorname{arctg} x$$
$$dt = \frac{dx}{1+x^2}$$
$$x=1 \to t = \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}$$
$$x=b \to t = \operatorname{arctg} b$$

$$= \lim_{b\to\infty} \frac{t^2}{2} \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\operatorname{arctg} b} =$$

$$= \lim_{b\to\infty} \frac{1}{2}\operatorname{arctg}^2 b - \left(\frac{\pi}{4}\right)^2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - \frac{\pi^2}{32} = \frac{\pi^2}{8} - \frac{\pi^2}{32} = \frac{3\pi^2}{32}$$

16.03.05
תרגול III

הגדרה: תהי $\{a_n\}_{n}^{\infty}$ סדרת מספרים. הביטוי $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ נקרא טור אינסופי / טור

* אומרים שהטור מתכנס אם קיים גבול סופי S של סדרת הסכומים החלקיים $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ של הטור $\left(S_n=\sum_{k=1}^{n} a_n\right)$ ו-S הוא סכום הטור וכותבים $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = S$

* אם הגבול לא קיים (או $\pm\infty$) – אומרים שהטור מתבדר

(1) מצאו את הסכום של הטור $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k 2^k+1}{3^k}=$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}\Big[\underbrace{\left(-\tfrac{2}{3}\right)^k}_{*}+\underbrace{\left(\tfrac{1}{3}\right)^k}_{**}\Big]$$

$$* \quad \sum_{k=1}^{\infty}\left(-\frac{2}{3}\right)^k=\frac{1}{1-\left(-\frac{2}{3}\right)}-\underbrace{\left(-\frac{2}{3}\right)^0}_{k=0}=\frac{3}{5}-1=-\frac{2}{5}$$

זהו טור גאומטרי עם $q=-\frac{2}{3}$, $\left|-\frac{2}{3}\right|<1$

$$** \quad \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^k=\frac{1}{1-\frac{1}{3}}-\underbrace{\left(\frac{1}{3}\right)^0}_{k=0}=\frac{1}{2}$$

טור גאומטרי עם $q=\frac{1}{3}$, $\left|\frac{1}{3}\right|<1$, לכן מתכנס

משפט: * אם הטורים $B=\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ ו- $A=\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנסים יחד, אזי הטור $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\pm b_n)$ מתכנס ל- $A\pm B$, כלומר $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\pm b_n)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n+\sum_{n=1}^{\infty}b_n$

* הורדת/הוספת מס' סופי של איברים לטור איננה משפיעה על התכנסות/התבדרות

* אם C מספר קבוע השונה מ-אפס, אזי הטורים $\sum_{n=1}^{\infty} Ca_n$ ו- $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנסים/מתבדרים יחד.

הערה:

* אם שני טורים מתכנסים לחוד אזי סכומם מתכנס
* אם אחד מהטורים מתכנס והשני מתבדר אזי סכומם מתבדר.
* אם שני הטורים מתבדרים אזי לא ניתן להסיק דבר!!!
* מהתכנסות הסכום לא ניתן להסיק דבר על התכנסות כל אחד מן הטורים בנפרד!!!

דוגמא:

$$\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n}_{\text{מתבדר}},\quad \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}}_{\text{מתבדר}}. \qquad \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n+(-1)^{n+1}=\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty}0}_{\text{מתכנס}}$$

(2) בדקו את התכנסות הטור, אם מתכנס – חשבו את סכומו.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k+(-9)^k}{5^k} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{2}{5}\right)^k + \left(\frac{-9}{5}\right)^k$$

טור גאומטרי עם $q=\frac{2}{5}$ טור גאומטרי עם $q=\frac{-9}{5}$

$1>\left|\frac{2}{5}\right| \Leftarrow$ הטור מתכנס $1<\left|\frac{-9}{5}\right|$ $\Leftarrow$ הטור מתבדר

ולכן סה"כ הטור הנבדק מתבדר.

הגדרה: תהי $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרת מספרים נתונה. הטור $\sum_{n=1}^{\infty}(a_{n+1}-a_n)$ נקרא טור טלסקופי!

מתק"מ: $\sum_{n=1}^{\infty}(a_{n+1}-a_n) = \lim_{n\to\infty}(a_{n+1}-a_1)$ הטור הטלסקופי מתכנס

אם"ם הסדרה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת.

(3) בדקו את התכנסות הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)+\dots+\left(\frac{1}{2n-3}-\frac{1}{2n-1}\right)+\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right) = \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left(1-\underbrace{\frac{1}{2n+1}}_{\to 0}\right) = \frac{1}{2}$$

(4) כנ"ל עבור $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1-\frac{4}{2n+5}\right)$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1-\frac{4}{2n+5}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{2n+1}{2n+5}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \ln(2n+1)-\ln(2n+5) =$$

$$= (\ln 3 - \cancel{\ln 7}) + (\ln 5 - \cancel{\ln 9}) + (\cancel{\ln 7} - \cancel{\ln 11}) + \dots + (\ln(2n-3) - \cancel{\ln(2n+1)}) +$$

$$+ (\ln(2n-1) - \ln(2n+3)) + (\cancel{\ln(2n+1)} - \ln(2n+5)) =$$

$$= \ln 3 + \ln 5 - \ln(2n+3) - \ln(2n+5) = -\infty$$

$\Leftarrow$ הטור הנבדק מתבדר

(5)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \ln(n+1) - \ln n =$$

$$= (\ln 2 - \ln 1) + (\cancel{\ln 3} - \cancel{\ln 2}) + (\ln 4 - \cancel{\ln 3}) + \dots + (\ln n - \ln(n-1)) + (\ln(n+1) - \ln n) =$$

$$= \ln(n+1) - \ln 1 = \infty \Longrightarrow$$ הטור מתכנס.

(6) טור גאומטרי $|q|<1 \Rightarrow$ טור מתכנס

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-3)\left(\frac{2}{3}\right)^{2n} = (-3)\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{4}{9}\right)^n \overset{!}{=} \frac{-3}{1-\frac{4}{9}} = \frac{-27}{9}$$

קריטריון קושי להתכנסות טור

הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס אם"ם לכל $\varepsilon>0$ קיים N טבעי, כך שלכל $N<n$ ולכל p טבעי מתקיים: $|S_{n+p}-S_n| = |a_{n+1}+a_{n+2}+\dots+a_{n+p}|<\varepsilon$

7) בדוק את התכנסות הטור לפי קריטריון קושי: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2^n)}{n^2}$

נראה כי הטור מתכנס לפי קריטריון קושי.

יהי $\varepsilon>0$. נמצא N, כך שלכל $N<n$ ולכל p טבעי מתקיים הקריטריון:

$$|S_{n+p}-S_n| = \left|\frac{\cos(2^{n+1})}{(n+1)^2}+\frac{\cos(2^{n+2})}{(n+2)^2}+\dots+\frac{\cos(2^{n+p})}{(n+p)^2}\right| \le$$

$$\le \left|\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+2)^2}+\dots+\frac{1}{(n+p)^2}\right| = \frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+2)^2}+\dots+\frac{1}{(n+p)^2} <$$

$$< \frac{1}{n(n+1)}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}+\dots+\frac{1}{(n+p-1)(n+p)} =$$

$$= \left(\frac{1}{n}-\cancel{\frac{1}{n+1}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{n+1}}-\cancel{\frac{1}{n+2}}\right)+\dots+\left(\cancel{\frac{1}{n+p-1}}-\frac{1}{n+p}\right) = \frac{1}{n}-\frac{1}{n+p} < \frac{1}{n} < \varepsilon$$

נבחר $N = \left\lfloor \frac{1}{\varepsilon} \right\rfloor + 1$

8) כנ"ל, הטור: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}$

טענה: הטור הנ"ל מתבדר. נראה זאת לפי קריטריון קושי.

נבחר את $p=n$:

$$|S_{n+p}-S_n| = |S_{2n}-S_n| = |a_{n+1}+a_{n+2}+\dots+a_{2n}| =$$

$$= \left|\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+3}+\dots+\frac{1}{4n-1}\right| = \underbrace{\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+3}+\dots+\frac{1}{4n-1}}_{n \text{ איברים}} \ge \frac{n}{4n-1} \ge$$

$$\ge \frac{n}{4n} = \frac{1}{4}$$

תנאי הכרחי להתכנסות טורים

17.03.05

תרגול IV

(1) בדוק האם הסכום הנ"ל מתכנס:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{n^2+1}{5n^2}\right)$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+1}{5n^2}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1+\frac{1}{n^2}}{5}\right) = \frac{1}{5} \neq 0$$

נחלק את המונה והמכנה ב-n^2

האיבר הכללי לא שואף ל-0. עפ"י תנאי הכרחי ⇐ לכן הטור מתבדר.

(2)

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(n+1)}{n}\right)^n$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e \neq 0$$

איבר כללי לא שואף ל-0 ⇐ הטור מתבדר

(3) האם הטור מתכנס?

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n}$$

נתון: $a_n = \frac{2^n}{n}$; $a_{n+1} = \frac{2^{n+1}}{n+1}$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{2^{n+1}}{n+1}}{\frac{2^n}{n}} = \frac{2^{n+1}\cdot n}{2^n\cdot(n+1)} = 2\cdot\frac{n}{n+1} = \frac{2}{1+\frac{1}{n}} = 2 > 1$$

⇐ $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$ ⇐ $a_{n+1} > a_n$ ⇐

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה מונוטונית עולה! $a_n > 0$ לכל $n\in\mathbb{N}$ ⇐ $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$

⇐ הטור מתבדר כיוון שלא מתקיים תנאי הכרחי להתכנסות הטור

$\boxed{\text{מתבדר}}$

(4)

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sin\left(\frac{n^k\cdot k!}{k^k}\right)$$

שואף ל-∞

הטור של סינוס ← איבר כללי אינו שואף ל-0 ⇐ לא אין גבול בכלל!!!

⇐ הטור מתבדר כיוון שלא מתקיים תנאי הכרחי להתכנסות.

מבחן השוואה I

(5) בדקו את הטור:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}$$

לכל $n \geq 1$ מתקיים:

$$\frac{n!}{n^n} = \frac{1\cdot2\cdot3\cdots n}{n\cdot n\cdot n\cdots n} \leq \frac{1\cdot2\cdot n\cdot n\cdots n}{n\cdot n\cdot n\cdot n\cdots n} = \frac{2}{n^2} = 2\cdot\frac{1}{n^2}$$

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ מתכנס ⇐ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n^2}$ מתכנס (קבוע אינו משפיע על התכנסות הטור.)

⇐ שני הטורים: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ ו- $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n^2}$ הינם טורים חיוביים ולכן,

עפ"י מבחן השוואה I, הטור הנבדק מתכנס.

⑥ בדקו את התכנסות הטור: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n(n+1)}\cdot\sqrt[6]{n^2+1}}$

פתרון: לכל $n\ge1$ מתקיים:

$$\frac{1}{\sqrt[3]{n(n+1)}\cdot\sqrt[6]{n^2+1}} \ge \frac{1}{\sqrt[3]{(n+1)^2}\cdot\sqrt[6]{(n+1)^2}} = \frac{1}{n+1}$$

הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}$ והטור הנבדק הם חיוביים! $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}$ מתבדר (מקביל לטור הרמוני)

$\Leftarrow$ לפי מבחן ההשוואה ה-I - הטור הנבדק מתבדר.

מבחן ההשוואה ה-II

⑦ בדקו את התכנסות הטור: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt[3]{(n+3)^2}+n^7}{\sqrt[4]{(n-2)^{32}+(2n+1)^{32}}}$

הטור הנ"ל הינו חיובי. נשווה אותו לפי מבחן השוואה ה-II

עם הטור החסום: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$;

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{\sqrt[3]{(n+3)^2}+n^7}{\sqrt[4]{(n-2)^{32}+(2n+1)^{32}}}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt[3]{(n+3)^2}+n^7\right)\cdot n}{\sqrt[4]{(n-2)^{32}+(2n+1)^{32}}} \underset{\text{נחלק מונה ומכנה ב-}n^8}{=} \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{\frac{(n+3)^2}{n^{7\cdot3}}}+1}{\sqrt[4]{\frac{(n-2)^{32}+(2n+1)^{32}}{n^{32}}}} =$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{\frac{n^2+6n+9}{n^{21}}}+1}{\sqrt[4]{\left(1-\frac{2}{n}\right)^{32}+\left(2+\frac{1}{n}\right)^{32}}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{\frac{1}{n^{19}}+\frac{6}{n^{20}}+\frac{9}{n^{21}}}+1}{\sqrt[4]{\left(1-\frac{2}{n}\right)^{32}+\left(2+\frac{1}{n}\right)^{32}}} = \frac{0+1}{\sqrt[4]{1+2^{32}}} > 0 \Rightarrow$$

הטור הנבדק מתבדר יחד עם הטור ההרמוני

⑧ בדקו את התכנסות הטור: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{ctg^2\frac{1}{2n}+1}$

הטור הנבדק הינו טור חיובי (איברי הטור מוגדרים לכל n)

נשווה את הטור לפי מבחן השוואה II עם טור חיובי מתכנס: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{ctg^2\frac{1}{2n}+1}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{\frac{\cos^2\frac{1}{2n}}{\sin^2\frac{1}{2n}}+1} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{\frac{1}{\sin^2\frac{1}{2n}}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sin^2\frac{1}{2n}}{\frac{1}{n^2}} =$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{\sin\frac{1}{2n}}{\frac{1}{2n}}\right)^2 = \frac{1}{4} > 0$$

$\Leftarrow$ הטור הנבדק מתבדר יחד עם הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ לפי מבחן השוואה II

מבחן ד'למבר (מבחן המנה)

⑨ בדקו התכנסות הטור: $\sum_{n=1}^{\infty} n^7e^{-n}$

זהו טור חיובי. נשתמש במבחן המנה:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^7\cdot e^{-(n+1)}}{n^7\cdot e^{-n}} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^7\cdot\frac{1}{e} = \frac{1}{e} < 1$$

$\Leftarrow$ הטור הנבדק מתכנס

10) בדקו התכנסות הטור.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2}$$

זהו טור חיובי. נשתמש במבחן המנה.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(2n+2)!}{((n+1)!)^2}\cdot\frac{(n!)^2}{(2n)!} = \lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)(2n+2)}{(n+1)(n+1)} = \lim_{n\to\infty}\frac{2(2n+1)}{n+1} = 4 > 1$$

$\Leftarrow$ הטור הנבדק מתבדר.

21.03.05

תרגול V

משפט מבחן השורש (קושי):

יהי $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ טור חיובי. אם קיים הגבול $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=L$, אז:

א. אם $L<1$ - הטור מתכנס

ב. אם $L>1$ - הטור מתבדר

ג. אם $L=1$ - לא ניתן לדעת על התכנסות/התבדרות הטור

(1) בדקו את התכנסות הטור:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n!}{n^n}\right)^n$$

(טור חיובי)

נשתמש במבחן השורש ע"מ לבדוק התכנסות הטור:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{n!}{n^n}\right)^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n}=0$$

הוכחנו: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}$ - מתכנס.

לכן: $\frac{n!}{n^n}\to 0$

(2) בדוק התכנסות הטור:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n^2}$$

זהו טור חיובי. נשתמש במבחן השורש:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\underbrace{\sqrt[n]{n}}_{1}\cdot\underbrace{\sqrt[n]{n}}_{1}}=2>1$$

$\Leftarrow$ הטור הנבדק מתבדר.

(3) בדוק את התכנסות הטור:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{3n}\cdot n^{n^2}}{(n+2)^{n^2}}$$

הטור חיובי.

נשתמש במבחן השורש:

$$\lim\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{e^3\cdot n^n}{(n+2)^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{e^3}{\left(\frac{n+2}{n}\right)^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{e^3}{\left(1+\frac{2}{n}\right)^n}=$$

$$=\frac{\lim_{n\to\infty}e^3}{e^2}=e>1$$

$\Leftarrow$ הטור מתבדר

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{k}{n}\right)^n=e^k$$

4) בדקו את התכנסות הטור: $\sum_{n=0}^{\infty} n^{100}\cdot e^{-n}$

הטור חיובי. נשתמש במבחן השורש:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^{100}\cdot e^{-n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^{\frac{100}{n}}}{e} = \lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt[n]{n}\right)^{100}}{e} = \frac{1}{e} < 1$$

$\Leftarrow$ הטור מתכנס.

משפט: מבחן האינטגרל:

יהי $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ טור חיובי, ו-$f(n)$ - ערך הפונק' $f(x)$ בנק' $x=n$.

אם הפונקציה $f(x)$ חיובית ולא עולה בתחום $1\le x$, - אזי הטור הנ"ל והאינטגרל $\int_1^{\infty} f(x)$ מתכנסים או מתבדרים יחד.

הערות חשובות:

* אם הפונקציה $f(x)$ חיובית ולא עולה בתחום $m\le x$, - אזי יש לחקור את הטור והאינטגרל $\int_m^{\infty} f(x)\,dx$
* יש לשים ♡ למילוי תנאי המשפט — צ"ל פונק' חיובית ולא עולה.
* פונק' לא עולה - נראה ע"י:

א. לפי הגדרה: $f(x)$ לא עולה בתחום D אם $\forall x_1,x_2 \in D$

$$x_1\le x_2 \Rightarrow f(x_1)\ge f(x_2)$$

ב. בדיקת נגזרת ראשונה בתחום.

2) בדקו את התכנסות הטור: $\sum_{n=1}^{\infty} n\cdot e^{-n}$

זה טור חיובי. נשתמש במבחן האינטגרל כדי לבדוק את התכנסותו:

נסמן: $f(x)=x\cdot e^{-x}$, ולכן עבור $x=n$ מתקיים $f(n)=n\cdot e^{-n}$

* f חיובית לכל $x\ge 1$: $\underbrace{x\cdot e^{-x}}_{\text{חיובי}}\ge 0$
* f מונוטונית יורדת לכל $x\ge1$;

$$f'(x)=e^{-x}-xe^{-x}=\underbrace{\frac{1}{e^x}}_{\text{גדול חיובי}}\underbrace{(1-x)}_{\text{שלילי}}\le 0$$

$\Leftarrow$ $f(x)$ מקיימת תנאי מבחן האינטגרל, ולכן נחשב אותו:

$\Downarrow$

$$\int_1^\infty xe^{-x}dx = \lim_{b\to\infty}\int_1^b xe^{-x}dx = \lim_{b\to\infty}\left[-xe\Big|_1^b - \int_1^b -e^{-x}dx\right] =$$

$u=x \rightarrow u'=1$

$v=-e^{-x} \rightarrow v'=e^{-x}$

$$= \lim_{b\to\infty}\left[-be^{-b}+\frac{1}{e}-e^{-x}\Big|_1^b\right] = \lim_{b\to\infty}\Big[-be^{-b}+\frac{1}{e}-\underbrace{e^{-b}}_{0}+\frac{1}{e}\Big] =$$

$$= \lim_{b\to\infty} -be^{-b} = \lim \frac{-b}{e^b} = \frac{-\infty}{\infty} \overset{\text{לופיטל}}{=} \lim_{b\to\infty}\frac{-1}{e^b} = 0$$

האינטגרל מתכנס, לכן הטור הנבדק מתכנס גם הוא.

6) בדקו את התכנסות הטור:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n^2}$$

זהו טור חיובי. נשתמש במבחן האינטגרל ע"מ לבדוק את התכנסות הטור.

נסמן: $f(x)=\frac{\ln x}{x^2}$, ואכן מתקיים עבור $x=n$: $f(n)=\frac{\ln n}{n^2}$

א) f חיובית: עבור $1<x$: $0<\frac{\ln x}{x^2}$;

המכנה x^2 תמיד חיובי, והמונה $\ln x>0$ עבור כל $1<x$

$\Leftarrow x\geq 2$

ב) f מונוטונית יורדת: עבור $x\geq 2$:

$$f'(x)=\frac{\frac{1}{x}\cdot x^2-2x\ln x}{x^4}=\frac{x-2x\ln x}{x^4}=\frac{1-2\ln x}{x^3}\leq 0$$

(המכנה תמיד חיובי עבור $x\geq 2$)

(המונה תמיד שלילי עבור $2\leq x$)

$\leftarrow$ סה"כ $f(x)$ חיובית ומונוטונית יורדת, לכן מתקיימים תנאי מבחן האינטגרל. לכן נחשב אותו:

$$\int_2^\infty \frac{\ln x}{x^2}dx = \lim_{b\to\infty}\int_2^b \frac{\ln x}{x^2}dx = \lim_{b\to\infty}\left[-\frac{\ln x}{x}\Big|_2^b - \int_2^b -\frac{1}{x^2}dx\right] =$$

אינטגרציה בחלקים:

$u=\ln x \rightarrow u'=\frac{1}{x}$

$v'=x^{-2} \rightarrow v=-x^{-1}$

$$= \lim_{b\to\infty}\left[\frac{-\ln b}{b}+\frac{\ln 2}{2}+\frac{x^{-2+1}}{-1}\Big|_2^b\right] = \lim_{b\to\infty}\Big[\underbrace{\frac{-\ln b}{b}}_{\to 0}+\frac{1}{2}\ln 2-\frac{1}{b}+\frac{1}{2}\Big] = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\ln 2$$

$$\lim_{b\to\infty}\frac{-\ln b}{b} = \frac{-\infty}{\infty} \overset{\text{לופיטל}}{=} -\frac{1}{b} = 0$$

7. בדקו אם מתכנסת הטור: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+1}$

הטור חיובי ← מבחן האינטגרל:

נסמן: $f(x)=\frac{x}{x^2+1}$ ולכן עבור $x=n$ $f(n)=\frac{n}{n^2+1}$

* f חיובית: עבור $x\ge 1$: $\frac{x}{x^2+1}\ge 0$
* הפונק' יורדת: $f'(x)=\frac{x^2+1-2x^2}{(x^2+1)^2}=\frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}\le 0$

← f חיובית ומונוטונית יורדת ולכן תנאי המבחן מתקיימים,
לכן נוכל לחשב את האינטגרל.

$$\int_1^{\infty}\frac{x}{x^2+1}dx=\lim_{b\to\infty}\int_1^{b}\frac{x}{x^2+1}dx=\frac12\lim_{b\to\infty}\ln|x^2+1|\Big|_1^b=$$

$$=\frac12\lim_{b\to\infty}\ln|b^2+1|-\frac12\ln 2=\infty$$

מסקנה: האינטגרל מתבדר ולכן הטור הנבדק מתבדר.

מבחן לייבניץ

הגדרה: טור נקרא מחליף סימן אם כל איבריו מחליפים סימן לסירוגין; ונרשום אותו בצורה ($a_n>0$), $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$

משפט לייבניץ:

אם מתקיים:

א. הסדרה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ מונוטונית יורדת

ב. $\lim_{n\to\infty}a_n=0$

אזי הטור $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$ מתכנס, וסכומו S מקיים: $0<S<a_1$

הערה: התנאי הזה מספיק והכרחי.

8. בדקו התכנסות הטור: $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac1n\left(1+\frac1n\right)^n$

זהו טור מחליף סימן. נשתמש במבחן לייבניץ.

א. נבדוק האם איבר כללי שואף ל-0.

$$\lim_{n\to\infty}\frac1n\left(1+\frac1n\right)^n=0\cdot e=0$$

ב. נבדוק האם הסדרה $\left\{\frac1n\left(1+\frac1n\right)^n\right\}_{n=1}^{\infty}$ מונוטונית יורדת:

צ"ל: $a_{n+1}\le a_n$ ⟸ צ"ל: $\frac{1}{n+1}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\le\frac1n\left(1+\frac1n\right)^n$

$\Leftrightarrow \frac{1}{n+1}\cdot\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1}\le\frac1n\cdot\left(\frac{n+1}{n}\right)^n \Leftrightarrow \frac{(n+2)^{n+1}}{(n+1)^{n+2}}\le\frac{(n+1)^n}{n^{n+1}}$

כפל באגפים ב־ $(n+1)$ / $\frac{(n+2)^{n+1}}{(n+1)^{n+1}}\le\frac{(n+1)^{n+1}}{n^{n+1}}$ ← חזקה $\frac{1}{n+1}$ / $\frac{n+2}{n+1}\le\frac{n+1}{n} \Leftrightarrow n^2+2n\le(n+1)^2$

$0<1$ נכון

9

← מתקיימים תנאי מבחן לייבניץ ולכן הטור הנבדק מתכנס

גרסה מועד ב' 2003

נתונים 2 טורים חיוביים:

$$A=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+e}{3^n}\quad,\quad B=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4n^2-n+3}{n^3+2-3\sin(n!)}$$

טענה: 2 הטורים מתכנסים לגבולות חיוביים.

$$A=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{n^2}{3^n}+\frac{e}{3^n}\right]$$

מבחן השורש

טור גאומטרי $q=\frac{1}{3}$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{n^2}{3^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt[n]{n}\right)^2}{3}=\frac{1}{3}<1$$

⇐ הטור מתכנס:

$$B=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4n^2-n+3}{n^3+2-3\sin(n!)}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{4n^2-n+3}{n^3+2-3\sin(n!)}}{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{4n^3-n^2+3n}{n^3+2-3\sin(n!)}=4$$

מבחן השוואה

31.03.05

התכנסות בהחלט ובתנאי

תרגול VI **הגדרה:** אומרים שהטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס בהחלט אם הטור $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ מתכנס.

הגדרה: אומרים שהטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס בתנאי אם הוא מתכנס, אך $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ מתבדר.

משפט: טור מתכנס בהחלט מתכנס.

הערה: א) לגבי טורים חיוביים - לא קיים מושג של התכנסות בתנאי
ב) על מנת לבדוק התכנסות בהחלט - נשתמש במבחנים, שהיו לטורים חיוביים.

①

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \underbrace{\frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}_{a_n>0}$$

ראינו שזהו טור מחליף סימן ומתכנס בתנאי.
נבדוק עכשיו שהוא מתכנס בהחלט.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|(-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

נשתמש במבחן השוואה:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{\frac{1}{n}} = e$$

$\Leftarrow$ הטור החיובי מתבדר יחד עם $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$

$\Leftarrow$ הטור הנבדק איננו מתכנס בהחלט.

②

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n+3}{n(n+1)}$$

בדקו התכנסות בהחלט ובתנאי.

<u>נבדוק התכנסות בהחלט:</u>

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|(-1)^{n+1} \frac{n+3}{n(n+1)}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+3}{n(n+1)} \rightarrow$$

טור חיובי, נבדוק התכנסותו:

נשתמש במבחן השוואה II עם הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n+3}{n(n+1)}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+3n}{n^2+n} = 1$$

$\Leftarrow$ הטור הנבדק איננו מתכנס בהחלט.

<u>נבדוק התכנסות בתנאי:</u>

זהו טור מחליף סימן, נשתמש במבחן לייבניץ.

+ נראה כי שואף לאפס:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+3}{n(n+1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+3}{n^2+n} = 0$$

* נבדוק שהסדרה היא מונוטונית יורדת:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{n+4}{(n+1)(n+2)}}{\frac{n+3}{(n+1)n}} = \frac{n+4}{(n+1)(n+2)}\cdot\frac{n(n+1)}{n+3} = \frac{n^2+4n}{n^2+5n+6} = \frac{n^2+4n}{(n^2+4n)+(n+6)} \le 1$$

⇐ לפי משפט לייבניץ הטור מתכנס בתנאי

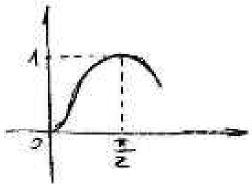
3. בדקו התכנסות בהחלט ובתנאי: $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\sin\frac{2\pi}{n}$

נבדוק התכנסות בהחלט:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^{n+1}\sin\frac{2\pi}{n}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{2\pi}{n}$$

$\sin x$ בתחום $[0;\frac{\pi}{2}]$ – מונוטונית עולה וחיובית.

$$0<\frac{2\pi}{n}\le\frac{\pi}{2}$$



⇐ לכן $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{2\pi}{n}$ טור חיובי.

נשתמש במבחן השוואה II עם $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\pi}{n}$:

הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\pi}{n}$ מתבדר כמו $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ מכיוון שזה מכפלה $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ בקבוע.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{2\pi}{n}}{\frac{2\pi}{n}} = 1$$

⇐ הטור איננו מתכנס בהחלט

נבדוק התכנסות בתנאי:

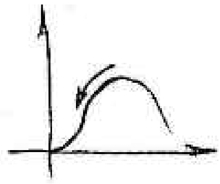
זה טור מחליף סימן, נשתמש במבחן לייבניץ.

* איבר כללי שואף לאפס: $\lim_{n\to\infty}\frac{2\pi}{n}=0$

* סדרה $\{\sin\frac{2\pi}{n}\}_{n=1}^{\infty}$ מונוטונית יורדת:

$\sin x$ בתחום $[0;\frac{\pi}{2}]$ מונוטונית עולה.

⇐ $\sin\frac{2\pi}{n} > \sin\frac{2\pi}{n+1}$



⇐ הסדרה $\{\sin\frac{2\pi}{n}\}_{n=1}^{\infty}$ מונוטונית יורדת.

⇐ סה"כ הטור מתכנס בתנאי לפי משפט לייבניץ.

4. בדקו התכנסות:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{3^{n+1}}{2^{4n}} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)(-1)^n\cdot\frac{3\cdot3^n}{(2^4)^n} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)\cdot3\cdot\left(-\frac{3}{2^4}\right)^n = \frac{-3}{1-(-\frac{3}{16})} = -\frac{48}{19}$$

טור גאומטרי [זוהי $\sum q^k$]: $|q|<1$ – טור מתכנס ל $\frac{1}{1-q}$

$|q|\ge1$ – טור מתבדר.

⇐ $q=-\frac{3}{16}$

⇐ הטור הנבדק מתכנס.

(5) בדקו התכנסות: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(3n+2)^3}$

טור חיובי. נשתמש במבחן השוואה I:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(3n+2)^3} < \frac{n}{n^3} = \frac{1}{n^2}$$

⇐ לכן לפי מבחן השוואה הטור הנ"ל מתכנס.

(6) הסתכלו על 2 טורים הבאים:

(א) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4n-5}{n+1}\right)^n$ (ב) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\ln(n+1))^n}$

בדקו התכנסותם.

2 הטורים הנ"ל הם חיוביים. נשתמש במבחן השורש.

(א) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{4n-5}{n+1}\right)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{4n-5}{n+1} = 2 > 1$

⇐ הטור הנ"ל מתבדר.

(ב) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{(\ln(n+1))^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\ln(n+1)} = 0 < 1$

⇐ הטור הנ"ל מתכנס.

(7) בדקו עבור אילו ערכי p הטור הבא מתכנס: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p}$

זהו טור חיובי.

$$\frac{1}{n(\ln n)^p} \ge \frac{1}{n}$$

$p=1$: $\frac{1}{n\ln n} < \frac{1}{n}$

$p=-1$: $\frac{\ln n}{n} > \frac{1}{n}$

עבור $p \le 0$ הטור הנ"ל מתבדר

עבור $p > 0$: לכן נוכל להשתמש במבחן האינטגרל.

נסמן $f(x) = \frac{1}{x(\ln x)^p}$, ואז עבור $x=n$: $f(n) = \frac{1}{n(\ln n)^p}$

* $f(x)$ חיובית בתחום $x \ge 3$: $\frac{1}{x(\ln x)^p} > 0$

* $f(x)$ מונוטונית יורדת בתחום $x \ge 3$:

$$f'(x) = \left(x^{-1}(\ln x)^{-p}\right)' = -\frac{1}{x^2}(\ln x)^{-p} - p(\ln x)^{-p-1}\cdot\frac{1}{x^2} = \underbrace{-\frac{1}{x^2}}_{\text{שלילי}}\underbrace{\left(\frac{1}{(\ln x)^p} + \frac{p}{(\ln x)^{p+1}}\right)}_{\text{חיובי}} < 0$$

⇐ $f(x)$ מונוטונית יורדת

⇐ סה"כ מתקיימים תנאי מבחן האינטגרל, ולכן נוכל להשתמש בו.

⇓

$$\int_3^\infty \frac{1}{x(\ln x)^p}\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_3^b \frac{dx}{x(\ln x)^p} = \dots$$

$$p=-1 \qquad \int \frac{u'(x)}{u(x)} = \ln|u(x)|$$
$$p\neq-1: \quad \int u'(x)\cdot u^p(x) = \frac{u(x)^{p+1}}{p+1}$$

עבור $p=1$:
$$\dots = \lim_{b\to\infty} \ln|\ln x|\Big|_3^b = \lim_{b\to\infty} \ln|\ln b| - \ln(\ln 3) = \infty$$

עבור $p\neq1$:
$$\dots = \lim_{b\to\infty} \frac{(\ln x)^{-p+1}}{-p+1}\Big|_3^b = \lim_{b\to\infty} \frac{1}{-p+1}\left((\ln b)^{-p+1} - (\ln 3)^{-p+1}\right)$$

שלנו $p>0$:

$0<p<1$: ∞ מתבדר

$p>1$: $\frac{1}{-p+1}(\ln 3)^{-p+1}$ מתכנס.

$\Leftarrow$ הטור מתכנס עבור $p>1$

8 בדקו התכנסות:
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n(n+1)(n+2)}}$$

זהו טור חיובי. נשתמש במבחן השוואה I:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt[3]{n(n+1)(n+2)}}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt[3]{n(n+1)(n+2)}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{\frac{n(n+1)(n+2)}{n^3}}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{\frac{(n+1)(n+2)}{n^2}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{\frac{n^2+3n+2}{n^2}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{1+\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2}}} = 2$$

$\Leftarrow$ הטור הנבדק מתבדר.

4.04.05

תרגול VII

חדו"א 2

פונקציות במספר משתנים

עד עכשיו חקרנו פונק' במשתנה אחד, $y=f(x)$, כלומר יחס בין 2 נעלמים x ו-y.

בחקירת בעיות שונות נתקלים בצורך לטפל ביחס בין יותר משני משתנים.

גבולות של פונקציות

הגדרה: נאמר שהמספר L הוא גבול הפונקציה $f(M)$ כאשר $M\to M_0$ אם לכל $\varepsilon>0$ קיים $\delta>0$, כך שלכל נק' M המקיימת $0<d(M,M_0)<\delta$ מתקיים: $|f(M)-L|<\varepsilon$

הערה חשובה: אם הגבול קיים אזי הוא יחיד ואינו תלוי במסלול שהנק' M מתקרבת דרכו ל-M_0

מסקנה:

אם לפונק' $f(M)$ גבולות שונים לפי מסלולים שונים של התקרבות M ל-M_0, אזי ל-$f(M)$ אין גבול כאשר $M\to M_0$

1) הראו שלא קיים הגבול:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^3-x^2y}{x^3+y^3}$$

נחשב את הגבול הנ"ל לפי כל קו ישר העובר דרך ראשית הצירים: $y=kx$, $x\to 0$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{k^3x^3-x^3k}{x^3+k^3x^3} = \lim_{\substack{x\to0\\ y=kx}} \frac{k^3-k}{1+k^3} = \frac{k(k+1)(k-1)}{(k+1)(k^2-k+1)} = \frac{k(k-1)}{k^2-k+1}$$

⇐ קיבלנו גבול שתלוי בפרמטר k:

למשל: עבור $k=0$: $L=0$

עבור $k=2$: $L=\frac{2}{3}$

⇐ עבור ערכי k שונים מקבלים גבולות שונים ⇐ הגבול לא קיים.

2) הראו כי הגבול לא קיים:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2-y^5}$$

כל הישרים העוברים דרך ראשית הצירים:

$$\lim_{\substack{y=kx\\ x\to0}} \frac{kx^3}{x^2-k^5x^5} = \lim_{\substack{y=kx\\ x\to0}} \frac{kx^2}{1-k^5x^3} = \frac{0}{1-0} = 0$$

$x=y^2$:

$$\lim_{\substack{x=y^2\\ y\to0}} \frac{y^4}{y^4-y^5} = \lim_{\substack{x=y^2\\ y\to0}} \frac{1}{1-y} = 1$$

⇐ מצאנו 2 מסלולים שונים נותנים גבולות שונים ⇐ הגבול לא קיים

טכניקות לחישוב גבולות

(3) $$\lim_{(x,y)\to(2,-1)} \frac{x^4y-5xy}{x^2-y^4} = \frac{2^4(-1)-5\cdot 2(-1)}{2^2-(-1)^4} = \frac{-16+10}{3} = -\frac{6}{3} = -2$$

שימו ♡: אם חישבנו גבול כלשהו לפי מסלולים שונים
וקיבלנו את אותו הגבול שוב ושוב — אין זה אומר
שנקבל אותו גבול לפי כל המסלולים השונים (קיימים ∞ כאלה)
לכן שיטה כזו טובה להערכת קיום גבול ולא להוכחה.

תזכורת:

משפט הסנדוויץ': אם $h(M)\le f(M)\le g(M)$ ו- $\lim_{M\to M_0} h(M)=\lim_{M\to M_0} g(M)=L$
אזי $\lim_{M\to M_0} f(M)=L$

כל התכונות שאנו מכירים מחישובי גבולות במשתנה אחד — חיבור
חיסור כפל וחילוק גבולות, — נכונים גם לגבולות במספר משתנים.

(4) חשבו: $$L=\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^2+y^4}$$

$$0\le \left|\frac{x^2y}{x^2+y^4}\right| \le \left|\frac{x^2y}{x^2}\right| = |y| \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0$$

עפ"י משפט סנדוויץ' $L=0$

(5) חשבו: $$L=\lim_{(x,y)\to(0,0)} y\cdot\sin\frac{1}{x-1}$$

לכל $x\neq 1$:

$$0\le \left|y\cdot\sin\frac{1}{x-1}\right| = |y|\cdot\left|\sin\frac{1}{x-1}\right| \le |y| \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0$$

(6) חשבו: $$L=\lim_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+y^2)\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

הרעיון: להביא את $f(M)$ לצורה של פונק' במשתנה אחד:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+y^2)\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{t\to 0} \underset{\downarrow\, 0}{t}\cdot \underbrace{\sin\frac{1}{\sqrt{t}}}_{\text{חסום}} = 0$$

$t=x^2+y^2$

(7) $$\lim_{(x,y,z)\to(0,1,2)} \frac{\sin(x(y^2+z^2))}{xy^2} = \lim_{(x,y,z)\to(0,1,2)} \frac{\sin(x(y^2+z^2))}{x(y^2+z^2)}\cdot\frac{x(y^2+z^2)}{xy^2} =$$

$\lim_{x\to 0}\frac{\sin t}{t}=1$

$$=\left(\lim_{(x,y,z)\to(0,1,2)} \frac{\sin(x(y^2+z^2))}{x(y^2+z^2)}\right)\cdot\left(\lim_{(x,y,z)\to(0,1,2)} \frac{x(y^2+z^2)}{xy^2}\right) = 1\cdot 5 = 5$$

$\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}=1$

8

$$L = \lim_{(x,y)\to(0,\frac{\pi}{2})} \left[1-\cos(x+y)\right]^{tg(x+y)} \overset{tg=\frac{\sin}{\cos}}{=}$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,\frac{\pi}{2})} \left[\left(1-\cos(x+y)\right)^{\frac{1}{\cos(x+y)}}\right]^{\sin(x+y)} \overset{\lim_{(x,y)\to(0,\frac{\pi}{2})}(\sin(x+y))=\sin\frac{\pi}{2}=1}{=}$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,\frac{\pi}{2})} \left(1-\cos(x+y)\right)^{\frac{1}{\cos(x+y)}} \underset{t=\cos(x+y)}{=} \lim_{t\to 0}(1-t)^{\frac{1}{t}} \underset{t=\frac{1}{n}}{=} \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

רציפות

הגדרה: תהי פונק' $f(M)$ מוגדרת בתחום D.

אומרים ש-$f(M)$ רציפה בנק' $M_0 \in D$ אם $\lim_{M\to M_0} f(M) = f(M_0)$.

9 בדוק רציפות ב-$\mathbb{R}^2$ של הפונק':

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

עבור כל $(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2 \neq (0,0)$:

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{x^2y}{x^2+y^2} = \frac{x_0^2 y_0}{x_0^2+y_0^2} = f(x_0,y_0)$$

$\Leftarrow$ f רציפה ב-$\mathbb{R}^2 \setminus (0,0)$

עבור $(x_0,y_0)=(0,0)$:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^2+y^2} \underset{\text{סנדוויץ'}}{=} 0 = f(0,0)$$

$\Leftarrow$ f רציפה ב-$(0,0)$

10 בדקו רציפות בנק' $(0,0)$ של הפונק':

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2-y}{x+y^2} & (x,y)\neq(0,0) \\ 1 & (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y}{x+y^2} = \lim_{\substack{y=kx \\ x\to 0}} \frac{x^2-kx}{x+k^2x^2} = \lim_{\substack{y=kx \\ x\to 0}} \frac{x-k}{1+k^2x} =$$

$$= \frac{0-k}{1+0} = -k$$

$\Leftarrow$ אין גבול בנק' $(0,0)$, ולכן f אינה רציפה בה.

11) בדקו תחום רציפות ב-$\mathbb{R}^2$ של הפונק':

$$f(x,y)=\begin{cases} y\sin\frac{1}{x-1} & (x,y)\neq(1,0) \\ 1 & (x,y)=(1,0)\end{cases}$$

* עבור כל הנקודות מהצורה $(1,y_0)$, $y_0\in\mathbb{R}$, $y\neq 0$ — הפונקציה אינה מוגדרת בהן $\Leftarrow$ אינה רציפה בהן

* עבור $(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$, $x_0\neq 1$ — f רציפה שם:

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}\left(y\cdot\sin\frac{1}{x-1}\right)=y_0\cdot\sin\frac{1}{x_0-1}=f(x_0,y_0)$$

* חיוני בנפרד e:

$$\lim_{(x,y)\to(1,0)} f(x,y)=\lim_{(x,y)\to(1,0)}\left(y\cdot\sin\frac{1}{x-1}\right)\underset{\substack{\uparrow\\ \text{מ. סנדוויץ'}}}{=}0\neq 1=f(1,0)$$

לסיכום: תחום הרציפות של f הינו: $\mathbb{R}^2\setminus\{(1,y)\mid y\in\mathbb{R}\}$

12) האם ניתן להגדיר את הפונק' $f(x,y)=\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$, $(x,y)\neq(0,0)$,
כך שתהיה רציפה גם ב-$(0,0)$?

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$$

$$0\le\left|\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}\right|\underset{\substack{\downarrow\\ \text{אי שוויון המשולש}}}{\le}\left|\frac{x^3}{x^2+y^2}\right|+\left|\frac{y^3}{x^2+y^2}\right|\le\left|\frac{x^3}{x^2}\right|+\left|\frac{y^3}{y^2}\right|=|x|+|y|\xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{}0$$

אם נגדיר:

$$f(x,y)\begin{cases}\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

אזי f תהיה רציפה בכל $\mathbb{R}^2$

11.04.05

תרגול VIII

נגזרות חלקיות (מסדר 1)

גזירת פונק' בכמה משתנים לפי אחד המשתנים

[illegible] קבועים כל המשתנים למעט המשתנה שלפיו אנו גוזרים

(תרגיל הבא) גזירה אחת, והגזירה לפי הנגזרת החלקית בנק' $M_0=(x_1^0,x_2^0,\dots,x_n^0)$

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(M_0)=f'_{x_i}(M_0)=\lim_{\Delta x_i\to 0}\frac{f(x_1^0,x_2^0,\dots,x_i^0+\Delta x_i,\dots,x_n^0)-f(x_1^0,x_2^0,\dots,x_n^0)}{\Delta x_i}$$

1. חשבו את הנגזרות החלקיות של:

$$f(x,y,z)=x+e^{\sin(z^2y)}$$

$$f'_x=1 \qquad f'_y=e^{\sin(z^2y)}\cdot\cos(z^2y)\cdot z^2$$

$$f'_z=e^{\sin(z^2y)}\cdot\cos(z^2y)\cdot 2zy$$

2. חשבו את הנגזרות החלקיות של הפונקציה:

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{x\sin y}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq 0\\ 0, & (x,y)=0\end{cases}$$

עבור כל נק' $(x,y)\neq(0,0)$:

$$f'_x=\frac{\sin y(x^2+y^2)-2x^2\sin y}{(x^2+y^2)^2}=\frac{\sin y(x^2+y^2-2x^2)}{(x^2+y^2)^2}=\frac{\sin y(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2}$$

$$f'_y=\frac{x\cdot\cos y(x^2+y^2)-2yx\sin y}{(x^2+y^2)^2}=$$

עבור הנק' $(x,y)=(0,0)$:

נחשב את הנגזרת החלקית לפי הגדרה:

$$f'_x=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{\Delta x\cdot 0}{\Delta x^2+0}-0}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}0=0$$

$$f'_y=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(0,0+\Delta y)-f(0,0)}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\frac{0\cdot\sin\Delta y}{0+\Delta y^2}-0}{\Delta y}=0$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x\sin y}{x^2+y^2}\underset{\downarrow}{=}\lim_{x\to 0}\frac{x\sin x}{2x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2}\cdot\frac{\sin x}{x}=$$

נבחר מסלול: $y=x$

$$=\frac{1}{2}\neq 0=f(0,0)$$

$\Leftarrow$ f אינה רציפה ב-$(0,0)$!!!

מסקנה: מקיום הנגזרות החלקיות בנקודה לא נובעת בהכרח רציפות הפונקציה באותה נקודה !!!

3 חשבו נגזרות חלקיות של: $u=\left(\frac{x}{y}\right)^z$ בנק' $M(e,1,0)$.

$$u'_x = z\cdot\left(\frac{x}{y}\right)^{z-1}\cdot\frac{1}{y} = z\,x^{z-1}\cdot\frac{1}{y^z}$$

$$(a^x)' = a^x \ln a \qquad x a^{x-1}$$

$$u'_y = z\cdot\left(\frac{x}{y}\right)^{z-1}\cdot\left(-\frac{x}{y^2}\right) = -z\cdot x^z\cdot\frac{1}{y^{z+1}}$$

$$u'_z = \left(\frac{x}{y}\right)^z\cdot\ln\left(\frac{x}{y}\right)$$

$$u'_x(e,1,0) = 0\ ; \quad u'_y(e,1,0) = 0\ ; \quad u'_z(e,1,0) = \left(\frac{e}{1}\right)^0\cdot\ln\left(\frac{e}{1}\right) = 1$$

4 חשבו את הנגזרות החלקיות של:
$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{2x^2y}{x^2+y^2}, & x^2+y^2>0 \\ 0, & x=y=0 \end{cases}$$

עבור כל נק' $(x,y)\neq(0,0)$:

$$f'_x = \frac{4xy(x^2+y^2)-2x\cdot 2x^2y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{4xy(x^2+y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{4xy^3}{(x^2+y^2)^2}$$

$$f'_y = \frac{2x^2(x^2+y^2)-2\cdot 2x^2y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2x^2(x^2+y^2-2y^2)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2x^2(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}$$

עבור הנק' $(x,y)=(0,0)$ נחשב נגזרות חלקיות לפי הגדרה:

$$f'_x(0,0) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{2\Delta x^2\cdot 0}{\Delta x^2+0}-0}{\Delta x} = 0$$

$$f'_y(0,0) = \lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(0,0+\Delta y)-f(0,0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y\to 0}\frac{\frac{2\cdot 0\cdot\Delta y}{0+\Delta y^2}-0}{\Delta y} = 0$$

נגזרות חלקיות של פונקציות מורכבות

כלל שרשרת

כלל שרשרת למשתנה אחד: אם $f(x,y,z)$ פונק' בעלת נגזרות חלקיות רציפות f'_x, f'_y, f'_z; ואלו פונקציות $x(t), y(t), z(t)$ גזירות.

אזי קיימת הנגזרת $\frac{df}{dt}$ ומתקיים:

$$\boxed{\frac{df}{dt} = \frac{df}{dx}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{df}{dy}\cdot\frac{dy}{dt} + \frac{df}{dz}\cdot\frac{dz}{dt}}$$

כלל שרשרת לשני משתנים: נניח $f(x,y,z)$ רציפה בנקודה

ושלה נגזרות חלקיות רציפות (דיפרנציאבילית)

ובנוסף לכך הפונק': $z=z(t,\theta)$, $y=y(t,\theta)$, $x=x(t,\theta)$

רציפות ושלהן נגזרות חלקיות רציפות (דיפרנציאביליות).

אזי הפונק' המורכבת $f(t,\theta)$ גזירה חלקית לפי t, θ, ומתקיים:

$$\boxed{\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial t}&=\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial t}\\ \frac{\partial f}{\partial \theta}&=\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial \theta}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial \theta}+\frac{\partial f}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial \theta}\end{aligned}}$$

5) חשב $\frac{du}{dt}$ של הפונק' $u=y^x$, כאשר $x=e^{2t}$; $y=\sin t$

$$u=y^x=(\sin t)^{e^{2t}}$$

נשתמש בכלל השרשרת:

$$\frac{du}{dt}=\frac{du}{dx}\cdot\frac{dx}{dt}+\frac{du}{dy}\cdot\frac{dy}{dt}=y^x\ln y\cdot 2\cdot e^{2t}+x\cdot y^{x-1}\cdot\cos t=$$

$$=2(\sin t)^{e^{2t}}\underbrace{\cdot}_{\cdot\ln(\sin t)\cdot}e^{2t}+e^{2t}(\sin t)^{e^{2t}-1}\cdot\cos t$$

6) חשבו $\frac{dw}{dt}$: $z=\sqrt{t}$, $y=-5t$, $x=\frac{1}{t^2}$; $w=\frac{z}{x\cdot y^2}-3$

$$\frac{dw}{dt}=\frac{dw}{dx}\cdot\frac{dx}{dt}+\frac{dw}{dy}\cdot\frac{dy}{dt}+\frac{dw}{dz}\cdot\frac{dz}{dt}=$$

$$=\left(-\frac{z}{x^2y^2}\right)\left(\frac{2}{t^3}\right)+\left(-\frac{2z}{xy^3}\right)(-5)+\left(\frac{1}{xy^2}\right)\left(\frac{1}{2\sqrt{t}}\right)=$$

$$=\frac{t^{\frac{1}{2}}}{(-5t)^2\left(\frac{1}{t^2}\right)^2}\cdot\frac{-2}{t^3}+10\cdot\frac{t^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{t^2}\cdot(-5t)^3}+\frac{1}{2\cdot\frac{1}{t^2}\cdot(-5t)^2\cdot t^{\frac{1}{2}}}=$$

$$=-\frac{2}{25}\cdot t^{\frac{1}{2}-2+4-3}-\frac{10}{125}t^{\frac{1}{2}+2-3}+\frac{1}{2\cdot\frac{1}{t^2}(-5t)^2\cdot t^{\frac{1}{2}}}=$$

$$=-\frac{2}{25}t^{-\frac{1}{2}}-\frac{10}{125}t^{-\frac{1}{2}}+\frac{1}{50}t^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{50}\sqrt{t}$$

$$; w = \ln(x^2+y^2+z^2) \qquad ;\text{נתון} \quad \frac{du}{dt} \quad \text{חשב} \qquad 7$$

$$x = \sin t \;;\quad y = \cos t \;;\quad z = e^{-t^2}$$

$$\frac{dw}{dt} = \frac{dw}{dx}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{dw}{dy}\cdot\frac{dy}{dt} + \frac{dw}{dz}\cdot\frac{dz}{dt} =$$

$$= \left(\frac{2x}{x^2+y^2+z^2}\right)\cos t + \left(\frac{2y}{x^2+y^2+z^2}\right)(-\sin t) + \left(\frac{2z}{x^2+y^2+z^2}\right)\left(-2t\cdot e^{-t^2}\right) =$$

$$= \frac{2\sin t\cos t}{\underbrace{\sin^2 t+\cos^2 t}_{1}+e^{-2t^2}} - \frac{2\sin t\cos t}{1+e^{-2t^2}} - \frac{2e^{-t^2}\cdot 2te^{-t^2}}{1+e^{-2t^2}} = \boxed{-\frac{4te^{-2t^2}}{1+e^{-2t^2}}}$$

$$x = 3t,\; y = t^{1/2},\; z = t^{1/3} \qquad ; w = \sin(xy^2z^3) \quad :\text{נתון} \quad \frac{dw}{dt} \quad \text{חשב} \qquad 8$$

$$\frac{dw}{dt} = \frac{dw}{dx}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{dw}{dy}\cdot\frac{dy}{dt} + \frac{dw}{dz}\cdot\frac{dz}{dt} =$$

$$= \left(\cos(xy^2z^3)\cdot y^2z^3\right)\cdot 3 + \left(\cos(xy^2z^3)\cdot 2xyz^3\right)\left(\frac{1}{2\sqrt{t}}\right) + \left(\cos(xy^2z^3)\, 3z^2y^2\right)\left(\frac{1}{3\cdot t^{2/3}}\right) =$$

$$= \cos\left(3t\cdot\left(t^{\frac{1}{2}}\right)^2\cdot\left(t^{\frac{1}{3}}\right)^3\right)\left[3^{\star} + 3\cdot t\cdot t^{\frac{1}{2}}\cdot\left(t^{\frac{1}{3}}\right)^3\cdot t^{-\frac{1}{2}} + 3t\left(t^{\frac{1}{2}}\right)^2\left(t^{\frac{1}{3}}\right)^2\cdot t^{-\frac{2}{3}}\right] =$$

$$= \cos(3t^3)\cdot\left[3t^2+3t^2+3t^2\right] = 9t^2\cdot\cos(3t^3)$$

$$\star = \left(t^{\frac{1}{2}}\right)^2\left(t^{\frac{1}{3}}\right)^3$$

5.05.05
תרגול X

1) בדוק דיפרנציאביליות בנק' $(0,0)$ של הפונק':

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{3x^3+4y^3}{5x^2+2y^2} & ; \ (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & ; \ (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

נבדוק רציפות בנקודה:
לפי משפט סנדוויץ':

$$0\le\left|\frac{3x^3+4y^3}{5x^2+2y^2}\right|\underset{\text{א"ש משולש}}{\le}\left|\frac{3x^3}{5x^2+2y^2}\right|+\left|\frac{4y^3}{5x^2+2y^2}\right|\le$$

$$\le\left|\frac{3x^3}{5x^2}\right|+\left|\frac{4y^3}{2y^2}\right|=\frac{3}{5}|x|+2|y|\xrightarrow[(x,y)\to 0]{}0$$

$\Leftarrow$ f רציפה ב-$(0,0)$

נבדוק דיפרנצ' של f ב-$(0,0)$: נחשב נגזרות חלקיות בנק' $(0,0)$ לפי הגדרה:

$$f'_x(0,0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{3\Delta x^3+0}{5\Delta x^2+0}-0}{\Delta x}=\frac{3}{5}=A$$

לפי משפט

$$f'_y(0,0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(0,0+\Delta y)-f(0,0)}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\frac{4\Delta y^3+0}{2\Delta y^2+0}-0}{\Delta y}=2=B$$

$$\Delta z(x_0,y_0)=f(x_0+\Delta x,\ y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)$$

f דיפרנציאבילית ב-(x_0,y_0) אם:

$$\Delta z=A\Delta x+B\Delta y+\varepsilon\rho$$

כאשר: $\rho=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$ ו- $\lim_{\rho\to 0}\varepsilon=0$

$$\Delta z(0,0)=f(0+\Delta x,\ 0+\Delta y)-f(0,0)=\frac{3\Delta x^3+4\Delta y^3}{5\Delta x^2+2\Delta y^2}-0$$

f דיפרנציאבילית אם $\Delta z=A\Delta x+B\Delta y+\varepsilon\rho$
כאשר:

$$\lim_{\rho\to 0}\varepsilon=\lim_{\rho\to 0}\frac{\Delta z-A\Delta x-B\Delta y}{\rho}=$$

$$=\lim_{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}\to 0}\frac{\frac{3\Delta x^3+4\Delta y^3}{5\Delta x^2+2\Delta y^2}-\frac{3}{5}\Delta x-2\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}$$

$\Downarrow$

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \frac{\frac{3\Delta x^3+4\Delta y^3}{5\Delta x^2+2\Delta y^2}-\frac{3}{5}\Delta x-2\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{7\Delta x^3}{7\Delta x^2}-\frac{3}{5}\Delta x-2\Delta x}{\sqrt{2\Delta x^2}=\sqrt{2}\cdot|\Delta x|} =$$

נבחר מסלול: $\Delta y=\Delta x$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x\left(1-\frac{3}{5}-2\right)}{\sqrt{2}\cdot|\Delta x|} = \frac{1-\frac{3}{5}-2}{\sqrt{2}}\cdot \mathrm{sign}(\Delta x)$$

$\Leftarrow$ f אינה דיפרנציאבילית כי מצאנו מסלול עבור $\lim_{\rho\to 0}\varepsilon\neq 0$

(למרות ש-f רציפה)

האם f דיפרנציאבילית?

(1) בודקים רציפות f בנק' → לא רציפה → לא דיפרנ'.
→ רציפה → ממשיכים...

(2) נגזרות חלקיות בנקודה → אם אחת מהן לא קיימת או $\pm\infty$ → f לא דיפרנ'.
→ אם שתיהן קיימות ומקבלים מס' ממשי סופי: $f'_x=A$, $f'_y=B$

(*) ניתן לבדוק רציפות נגזרות חלקיות בנקודה: → רציפות בנק' → f דיפרנציאבילית
→ לא רציפות → ממשיכים.

(3) מחשבים ε ובודקים $\lim_{\rho\to 0}\varepsilon=0$ → אם הגבול $=0$ → f דיפרנציאבילית
→ אם הגבול $\neq 0$ → f לא דיפרנ'

(2) נגזרות חלקיות מסדר גבוה / נגזרות מעורבות

עבור הפונק' $f(x,y,z)=x^5y^4z^2$ חשבו:

(א) $f^{(4)}_{z^2xy}=\frac{d^3f}{dy\,dx\,dz^2}$

(ב) $f^{(4)}_{xzyz}=\frac{d^4f}{dz\,dy\,dz\,dx}$

א

$$\frac{d^4f}{dy\,dx\,dz^2}=\frac{d^3}{dy\,dx\,dz}\left(2x^5y^4z\right)=\frac{d^2}{dy\,dx}\left(2x^5y^4\right)=$$

$$=\frac{d}{dy}\left(10x^4y^4\right)=40x^4y^3$$

ב

$$\frac{d^4f}{dz\,dy\,dz\,dx}=\frac{d^3}{dz\,dy\,dz}\left(5x^4y^4z^2\right)=\frac{d^2}{dz\,dy}\left(10x^4y^4z\right)=$$

$$=\frac{d}{dz}\left(40x^4y^3z\right)=40x^4y^3$$

* המקיאים לכך שקיים שוויון בנגזרות מעורבות

עבור פונק' בשני משתנים:

משפט: אם הפונק' $f(x,y)$ מוגדרת בתחום D ובעלת נגזרות חלקיות f'_x, f'_y, f''_{xy}, f''_{yx} רציפות בסביבת הנק' $M_0(x_0,y_0)\in D$, אז בנקודה זו הנגזרות המעורבות שוות, כלומר $f''_{xy}(x_0,y_0)=f''_{yx}(x_0,y_0)$.

עבור פונקצ"ה ב-k משתנים:

הגדרה: הפונק' $f(x_1,x_2,\dots,x_k)$ שייכת למחלקה C בתחום D אם היא רציפה ב-D. הפונק' $f(M)$ שייכת למחלקה C^n אם היא רציפה ובעלת נגזרות עד סדר n בתחום D.

משפט: אם $u=f(x_1,x_2,\dots,x_k)$ מוגדרת בתחום k-ממדי D, ושייכת למחלקה C^n, אז ערך הנגזרת המעורבת מסדר n אינו תלוי בסדר הגזירה.

3) נרצה לחשב f''_{xy} ו- f''_{yx} בנק' $(0,0)$ ולראות אם הם שוים.

$$f(x,y)=\begin{cases} x\cdot y\,\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & ; (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & ; (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

עבור $(x,y)\neq(0,0)$ ל

$$f'_x= y\,\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}+x y\left(\frac{2x(x^2+y^2)-2x(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}\right)=$$

$$=\frac{y(x^2-y^2)(x^2+y^2)+2x^2y(x^2+y^2-x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2}=\frac{y(x^4-y^4)+4y^3x^2}{(x^2+y^2)^2}=\frac{y(x^4-y^4+4x^2y^2)}{(x^2+y^2)^2}$$

$$f'_y= x\,\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}+xy\,\frac{-2y(x^2+y^2)-2y(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}=\frac{x(x^2-y^2)(x^2+y^2)-2xy^2(x^2+y^2+x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}=$$

$$=\frac{x(x^4-y^4)-4x^3y^2}{(x^2+y^2)^2}=\frac{x(x^4-y^4-4x^2y^2)}{(x^2+y^2)^2}$$

$$f'_x(0,0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x\cdot 0\left(\frac{\Delta x^2-0}{\Delta x^2-0}\right)-0}{\Delta x}=0$$

$$f'_y(0,0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(0,0+\Delta y)-f(0,0)}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta y\cdot 0\left(\frac{-\Delta y^2}{\Delta y^2}\right)-0}{\Delta y}=0$$

↓

$$f'_x = \begin{cases} \frac{y(x^4-y^4+4x^2y^2)}{(x^2+y^2)^2} & ; \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & ; \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$f'_y = \begin{cases} \frac{x(x^4-y^4-4x^2y^2)}{(x^2+y^2)^2} & ; \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & ; \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

הנגזרות החלקיות.

$$f''_{xy}(0,0) = \frac{d^2 f(0,0)}{dy\,dx} = \frac{d}{dy}(f'x)(0,0) =$$

$$= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f'_x(0,0+\Delta y) - f'x(0,0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\frac{\Delta y(-\Delta y^4)}{(\Delta y^2)^2} - 0}{\Delta y} = -1$$

$$f''_{yx}(0,0) = \frac{d^2 f(0,0)}{dx\,dy} = \frac{d}{dx}(f'y)(0,0) =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f'y(0+\Delta x, 0) - f'_y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{\Delta x(\Delta x^4)}{(\Delta x^2)^2} - 0}{\Delta x} = 1$$

4 נתונה הפונקציה:

$$f(x,y,z) = x^5 \cdot \sin\left(e^{x^3 \cdot \cos(x+y)} - \cos\left(e^{xy}\right)\right) y^5 \cdot z^{11}$$

חשבו:

$$\frac{d^{100} f}{d_x^{20}\, d_y^{10}\, d_x^{30}\, d_z^{10}\, d_y^{10}\, d_z^{5}\, d_x^{5}}$$

תשובה: 0

הסבר: סדרת גזירה אינו משנה עבור f הנ"ל,
לכן הביטוי שווה לאפס.

grad = ∇ תכונות של וקטור הגרדיאנט 9.05.05

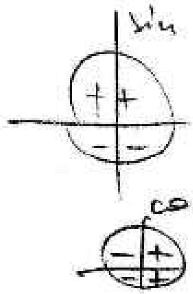
גרדיאנט * קובע השינוי המקסימלי – הוא הכיוון וקטור הגרדיאנט

* האורך המקסימלי של הנגזרת המכוונת של הפונק' $u=f(x,y,z)$

בנק' M_0 הוא: $|\nabla f(M_0)| = \sqrt{f_x'^2(M_0)+f_y'^2(M_0)+f_z'^2(M_0)}$

(1) חשבו את גרדיאנט בנק' $(2,\frac{\pi}{2})$ של הפונק': $f(x,y)=x\cdot\sin y$

$$\left.\begin{aligned} f_x' &= \sin y & f_x'\left(2,\tfrac{\pi}{2}\right) &= \sin\tfrac{\pi}{2} = 1 \\ f_y' &= x\cos y & f_y'\left(2,\tfrac{\pi}{2}\right) &= 2\cdot\cos\tfrac{\pi}{2} = 0 \end{aligned}\right\}$$



$$\begin{cases} \nabla f(x,y) = (\sin y,\ x\cos y) \\ \nabla f\left(2,\frac{\pi}{2}\right) = \left(\sin\frac{\pi}{2},\ 2\cos\frac{\pi}{2}\right) = (1,0) \end{cases}$$

(2) חשבו גרדיאנט של הפונק' $f(x,y,z)=e^{xy}+z$

$f_x' = y\cdot e^{xy}$, $f_y' = x\cdot e^{xy}$, $f_z' = 1$

$$\nabla f = (y\cdot e^{xy},\ x\cdot e^{xy},\ 1)$$

(3) באילו נקודות מתאפס גרדיאנט של: $z=x^3+3x^2+4xy+y^2$

הערה: הגרדיאנט מתאפס כאשר 2 מרכיבין שווים ל-0.

$$\begin{cases} z_x' = 3x^2+6x+4y = 0 \\ z_y' = 4x+2y = 0 \end{cases}$$

$y=-2x$

$3x^2+6x-8x=0$

$3x^2-2x=0 \qquad x(3x-2)=0$

$x=\frac{2}{3}$, $y=0$ או $x=0$, $y=-\frac{4}{3}$

4) נה' $f(x,y,z)=2x^2+3y^2+z^2$ המתארת טמפרטורה בנק' (x,y,z).

א. מה' טמפ' בנקודה $(2,3,1)$

$f(2,3,1)=2\cdot4+3\cdot9+1=36$.

ב. באילו נקודות (x,y,z) הטמפ' שווה ל-$36°C$?

$2x^2+3y^2+z^2=36$ ← אליפסואיד

ג. צבוע נמצא בנק' $(2,3,1)$; רוצה להגיע לטמפ' גבוהה ביותר. באיזה כיוון עליו לנוע, כך שקצב השינוי של הטמפ' יהיה מקסימלי?

— צבוע צריך לנוע לכיוון הגרדיאנט:

$\nabla f=(4x,6y,2z)$

$\nabla f(2,3,1)=4\cdot2\vec{i}+6\cdot3\vec{j}+2\vec{k}=8\vec{i}+18\vec{j}+2\vec{k}$

ד. צבוע נמצא על השולחן (מישור $z=1$), בנק' $(2,3,1)$. הוא רוצה להגיע לטמפ' גבוהה יותר אבל הצבוע חייב לנוע על השולחן, כך שקצב השינוי של הטמפ' יהיה מקסימלי.

$f(x,y)=2x^2+3y^2+1$

הצבוע יצטרך לנוע לכיוון הגרדיאנט בנק' $(2,3)$

$\nabla f=(4x,6y)$

$\nabla f(2,3)=(8\vec{i},18\vec{j})$

5) חשב את הגרדיאנט של: $g(x,y)=x\cdot\ln(x+y)$, בנק' $(-2,3)$

א. $\nabla(x,y)=\left(x\cdot\frac{1}{x+y}+\ln(x+y)\right)\vec{i}+\left(\frac{x}{x+y}\right)\vec{j}$

$\nabla g(-2,3)=-2\vec{i}-2\vec{j}$

ב. מהו הכיוון בו הפונק' $g(x,y)$ גדלה בקצב המהיר ביותר בנק' $(-2,3)$?

— בכיוון הגרדיאנט, שזה מה שחישבנו ב-א'.

ג' מהו הכיוון בו הפונק' $g(x,y)$ גדלה בקצב האיטי ביותר?

– בכיוון המנוגד לכיוון הגרדיאנט,

כלומר: $-(-2\hat{i} - 2\hat{j}) = 2\hat{i} + 2\hat{j}$

ד' מהו ערך המקסימלי של הנגזרת המכוונת של $g(x,y)$ בנק' $(-2,3)$?

$$|\nabla g(-2,3)| = \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2} = \sqrt{8}$$

אקסטרמום של פונקציות במספר משתנים

נרצה לחקור בעיות מינימום ומקסימום של פונק' במספר משתנים.

* בפונק' של משתנה אחד: מצאנו נק' קריטיות (חשודות לקיצון) ע"י מציאת הנק' בהן מתאפסת הנגזרת ובדקנו האם הן: min / max / פיתול

אקסטרמום לוקלי / מקומי

הגדרה: נק' קריטית היא נקודה חשודה באקסטרמום לוקלי.

נקודות קריטיות הן:

(1) נק' בהן $\nabla f(M_0) = \vec{0}$

(2) נק' בהן הנגזרות החלקיות לא קיימות.

הבעיה: אלו תנאים הכרחיים אך לא מספיקים!

למשל: $z = f(x,y) = xy$ ומקיימת: $\nabla f(0,0) = (0,0)$

אך $(0,0)$ איננה נקודת min או max לוקלי!

$\Leftarrow$ נרצה למצוא דרך למיין נקודות קריטיות אלו:

הגדרה: תהי $f(x_1,x_2,\dots,x_n)$ פונק' ב-n משתנים, אזי ההסיאן של f ב- $M_0=(x_1^0,x_2^0,x_3^0,\dots,x_n^0)$ היא מטריצה.

$$H_f(M_0) = \frac{\partial^2 f(M_0)}{\partial x_i \partial x_j}$$

(6) חשבו $H_f(M_0)$ (ההסיאן) עבור $M_0=(0,2)$, $f(x,y)=y^2e^x$

$$\frac{d^2f}{dx^2} = \frac{d}{d^2x}(y^2 e^x) = y^2 e^x$$

$$\frac{d^2f}{dy^2} = \frac{d}{d^2y}(2y\cdot e^x) = 2e^x$$

$$H_f = \begin{pmatrix} \frac{d^2f}{dx^2} & \frac{d^2f}{dxdy} \\ \frac{d^2f}{dydx} & \frac{d^2f}{dy^2} \end{pmatrix}$$

$$\frac{d^2f}{dxdy} = \frac{d^2f}{dydx} = \frac{d}{dy}(y^2e^x) = 2ye^x$$

$$H_f = \begin{pmatrix} y^2e^x & 2ye^x \\ 2ye^x & 2e^x \end{pmatrix}_{(0,2)} = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$$

* אם f דיפרנציאבלית ב-M_0, אזי $H_f(M_0)$ מטריצה סימטרית.
* אם $H_f(M_0)$ חיובית ⟸ ל-f יש min לוקאלי ב-M_0;
" " שלילית ⟸ " " max " ";
* אם $H_f(M_0)$ מעורבת ⟸ ל-f אין אקסטרמום ב-M_0;
M_0 - נקודת אוכף (פיתול)
* אם f לא חיובית / לא שלילית / לא מעורבת ⟸
לא ניתן ללמוד מכך על הנק' M_0 האם היא אקסטרמום.

⑦ מצאו אקסטרמום לוקאלי של הפונק' $f(x,y) = x^3+y^3-3x-3y$

(א) נחפש נקודות חשודות:

$\nabla f\,(3x^2-3,\ 3y^2-3) = (0,0)$

$\begin{cases} x^2=1 \\ y^2=1 \end{cases} \Rightarrow (1,1),(1,-1),(-1,1),(-1,-1)$ הנקודות החשודות:

(ב) נחשב את H_f הכללי:

$H_f = \begin{pmatrix} 6x & 0 \\ 0 & 6y \end{pmatrix} = A$; $\det A = 36xy$

(ג) נציב נק' קריטיות ב-H_f:

1) $H_f(1,1) = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} > 0 \Rightarrow$ $(1,1)$ - מינ' מקומי

2) $H_f(1,-1) = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix} < 0$ (מעורבת A) $\Rightarrow$ $(1,-1)$ - נק' פיתול

3) $H_f(-1,1) = \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} < 0$ (מעורבת A) $\Rightarrow$ $(-1,1)$ - נק' פיתול

4) $H_f(-1,-1) = \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix} > 0$ (שלילית A) $\Rightarrow$ $(-1,-1)$ - max מקומי.

⑧ מצאו אקסטרמום מקומי של הפונק' $f(x,y) = x^2+ay^4$, $a \neq 0$.

$\nabla f\,(2x,\ 4ay^3) = (0,0)$

⟸ הנק' קריטית היחידה היא: $(0,0)$.

$H_f = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 12ay^2 \end{pmatrix}_{(0,0)} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \det A = 0$

⟸ לא ניתן לדעת...

1.06.05

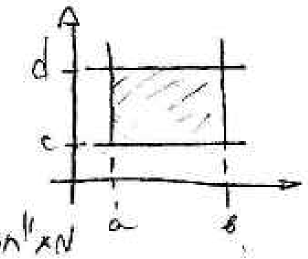
תרגול (2.06.05)

תזכורת:

יהי D תחום מלבני $D=\{(x,y) \mid a\le x\le b,\ c\le y\le d\}$

א. $$\iint_D f(x,y)\,dxdy=\int_{y=c}^{d}dy\int_{x=a}^{b}f(x,y)\,dx=\int_{x=a}^{b}dx\int_{y=c}^{d}f(x,y)\,dy$$

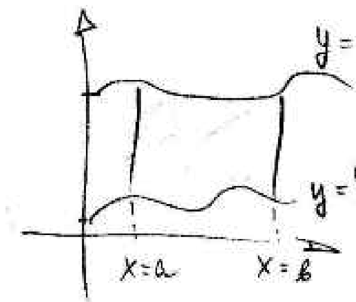
ב. $$\iint_D f(x)\cdot g(y)\,dxdy=\left(\int_a^b f(x)\right)\left(\int_c^d g(y)\right)$$



מתקיים רק לתחום מלבני

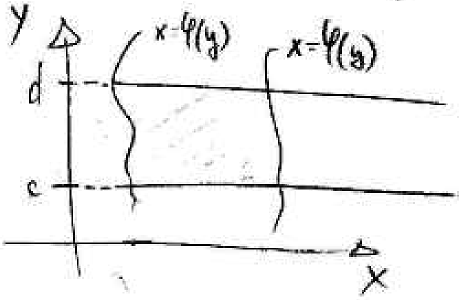
אינטגרלים כפולים על תחומים כלליים

תחום מסוג I :



$$\iint_D f(x,y)\,dxdy=\int_a^b dx\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)}f(x,y)\,dy$$

תחום מסוג II :



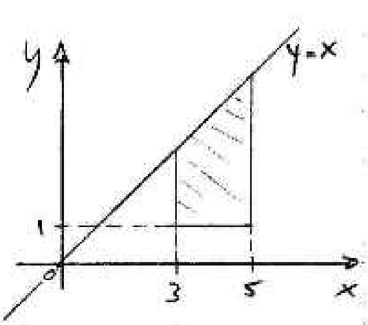
$$\iint_D f(x,y)\,dxdy=\int_c^d dy\int_{\varphi(y)}^{\psi(y)}f(x,y)\,dx$$

1

חשב: $\iint_D x\,dxdy$

כאשר D הוא הגרף התחום ע"י הישרים:

$x=3,\quad x=5,\quad y=1,\quad y=x$



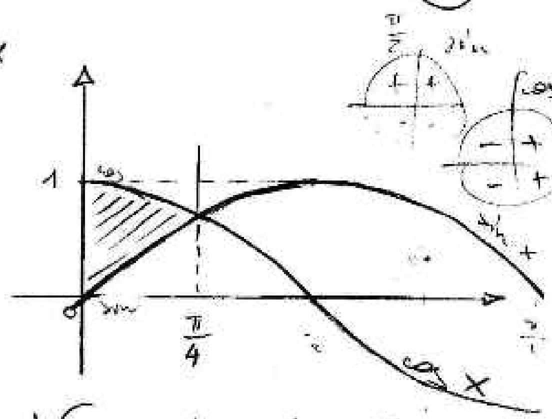
$$\iint_D x\,dxdy=\int_3^5 dx\int_1^x x\,dy=\int_3^5 x\cdot y\Big|_1^x\,dx=$$

$$=\int_3^5 (x^2-x)\,dx=\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}\Big|_3^5=$$

$$=\frac{125}{3}-\frac{25}{2}-\frac{27}{3}+\frac{9}{2}=\frac{98}{3}-\frac{16}{2}=\frac{98-24}{3}=\frac{74}{3}$$

(2) חשבו את השטח התחום ע"י:

$x = \frac{\pi}{4}$, $x=0$, $y = \sin x$, $y = \cos x$



$$\iint_D 1\, dxdy = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_{\sin x}^{\cos x} dy\,dx =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} y \Big|_{\sin x}^{\cos x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos x - \sin x)\, dx =$$

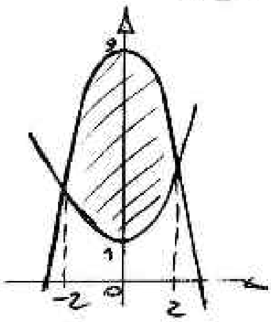
$$= \sin x + \cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} - (0+1) = \sqrt{2} - 1$$

הערה: חישוב שטחים בעזרת אינטגרל כפול: $S(D) = \iint_D 1\, dxdy$

(3) D תחום ע"י הפרבולות: $y = 1+x^2$; $y = 9-x^2$

חשבו: $\iint_D (4+x^2)\, dxdy$



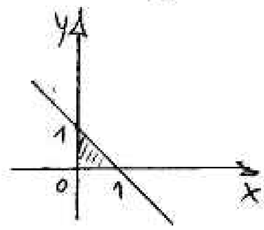
$$9 - x^2 = 1 + x^2$$
$$8 = 2x^2$$
$$4 = x^2$$
$$x = \pm 2$$

$$\iint_D (4+x^2)\, dxdy = \int_{-2}^{2} \int_{1+x^2}^{9-x^2} (4+x^2)\, dy\,dx =$$

$$= \int_{-2}^{2} (4+x^2) y \Big|_{1+x^2}^{9-x^2} dx = \int_{-2}^{2} 4y + x^2 y \Big|_{1+x^2}^{9-x^2} dx = \int_{-2}^{2} (4+x^2)(9-x^2-1-x^2)\, dx =$$

$$= \int_{-2}^{2} (4+x^2)(8-2x^2)\, dx = \int_{-2}^{2} (32-2x^4)\, dx = 32 - \frac{2x^5}{5} \Big|_{-2}^{2} = \frac{512}{5}$$

(4) מצאו את הנפח של התחום תחום ברביע הראשון ע"י: $z = x^2+y^2$ במישור $x+y=1$ $(y = 1-x)$ וצירי הקואורדינטות



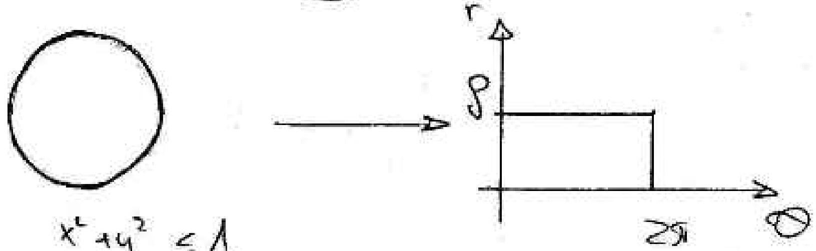
$$V = \iint_D (x^2+y^2)\, dxdy = \int_0^1 \int_0^{1-x} (x^2+y^2)\, dy\,dx = \int_0^1 x^2 y + \frac{y^3}{3} \Big|_0^{1-x} dx =$$

$$= \int_0^1 x^2(1-x) + \frac{1}{3}(1-x)^3\, dx = \int_0^1 \left(x^2 - x^3 + \frac{1}{3}(1-x)^3\right) dx =$$

$$= \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \frac{(1-x)^4}{3 \cdot 4} \Big|_0^1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - 0 + \frac{1}{12} = \frac{1}{12} + \frac{1}{12} = \frac{1}{6}$$

החלפת משתנים באינטגרל הכפול

– קואורדינטות קוטביות



$x^2+y^2 \le 1$

$x = \rho\cos\theta$

$y = \rho\sin\theta$

$J(\rho,\theta) = \rho \qquad \rho \ge 0$

$0 \le \theta \le 2\pi$

קואורדינטות קוטביות מוכללות

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

$$\rho \ge 0 \qquad \begin{cases} x = a\rho\cos\theta \\ y = b\rho\sin\theta \end{cases}$$
$$0 \le \theta \le 2\pi$$

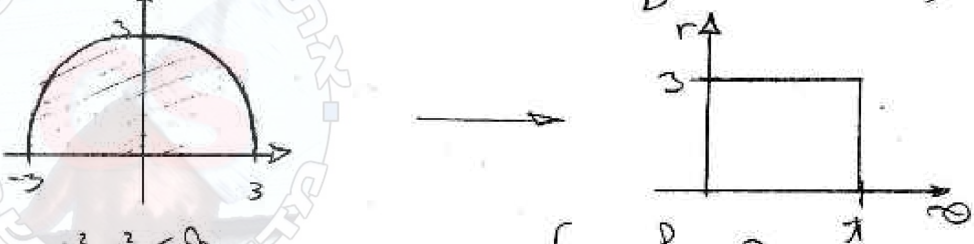
$J = ab\rho$

$$J(\rho,\theta) = \begin{vmatrix} \frac{dx}{d\rho} & \frac{dx}{d\theta} \\ \frac{dy}{d\rho} & \frac{dy}{d\theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a\cos\theta & -a\rho\sin\theta \\ b\sin\theta & b\rho\cos\theta \end{vmatrix} =$$

$$= ab\rho\sin^2\theta + ab\rho\cos^2\theta = \rho\cdot ab\ *$$

* – עבור ק. קוטביות מוכללות

2) חשב $\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\,dxdy$, כאשר $D = \{x^2+y^2 \le 9,\ y \ge 0\}$



$x^2+y^2 \le 9$

רדיוס

$0 \le \rho \le 3$

$0 \le \theta \le \pi$

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases}$$

$G(\rho,\theta) = \rho$

$$\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy = \int_0^{\pi}\int_0^{3} \sqrt{\rho^2\cos^2\theta + \rho^2\sin^2\theta}\cdot \underbrace{\rho}\, d\rho\, d\theta =$$

לא לשכוח יעקוביאן !!!

$$= \int_0^{\pi}\int_0^{3} \rho^2\, d\rho\, d\theta = \int_0^{\pi} \frac{\rho^3}{3}\Big|_0^3 d\theta = \int_0^{\pi} 9\, d\theta = 9\theta\Big|_0^{\pi} = 9\pi$$

6 חשב: $\iint_D e^{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}}\,dx\,dy$ כאשר $D=\left\{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le 1\right\}$

נעבר בק.קוטביות מוכללות:

$$\begin{cases} x = a\rho\cos\theta \\ y = b\rho\sin\theta \\ J = ab\rho \end{cases}$$

$0 \le \rho \le 1$

$0 \le \theta \le 2\pi$

$$\iint_D \left(e^{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}}\right)dx\,dy =$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{1}\left(e^{\frac{a^2\rho^2\cos^2\theta}{a^2}+\frac{b^2\rho^2\sin^2\theta}{b^2}}\cdot a\cdot b\cdot\rho\right)d\rho\, d\theta =$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{1}\left(e^{\rho^2}ab\rho\right)d\rho\, d\theta = ab\cdot\left(\theta\Big|_0^{2\pi}\right)\cdot\int_0^1\left(e^{\rho^2}\cdot\rho\right)d\rho =$$

$$= 2\pi ab\cdot\frac{1}{2}e^{\rho^2}\Big|_0^1 = ab\pi(e-1)$$