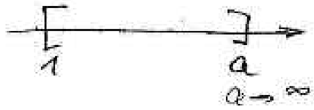
אינטגרלים לא אמיתיים (מוכללים)

20.02.05

הרצאה I

קלה: 7067

$$\int_1^\infty \frac{1}{x\sqrt[3]{x}}\,dx = \lim_{a\to\infty}\int_1^a \frac{1}{x\sqrt[3]{x}}\,dx = \lim_{a\to\infty}\int_1^a x^{-\frac{4}{3}}\,dx =$$



$$= \lim_{a\to\infty} \frac{x^{-\frac{1}{3}}}{-\frac{1}{3}}\Bigg]_1^a = -3\lim \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\Bigg]_1^a =$$

$$= \underbrace{-3\lim_{a\to\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{a}}}_{0} + 3\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{1}} = 3$$

תשובה סופית ← האינטגרל מתכנס

1. אינטגרלים עם גבולות אינטגרציה אינסופיים.

תהי $f(x)$ פונקציה רציפה בקטע $[a,\infty)$.

לכל מספר $b>a$, $f(x)$ רציפה בקטע הסגור $[a,b]$,

ולכן היא אינטגרבילית בקטע זה.

נסמן $I(b)=\int_a^b f(x)\,dx$ ונתן ל-b לשאוף ל-∞,

ובהתאם לתוצאה נגדיר את האינטגרל הלא אמיתי של $f(x)$ בקטע $[a,b]$

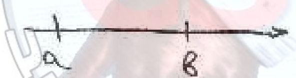
הגדרה: אם קיים גבול $I=\lim_{b\to\infty} I(b)$, אזי I נקרא האינטגרל הלא אמיתי של $f(x)$ בקטע $[a,\infty)$,

ונסמן אותו ע"י $I=\int_a^\infty f(x)\,dx$,

ונאמר כי האינטגרל הלא אמיתי של $f(x)$ בקטע $[a,\infty)$ קיים או מתכנס.

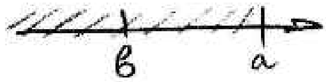
<u>אחרת</u>: נאמר כי האינטגרל אינו קיים או מתבדר.

באופן שקול ניתן לרשום:



$$\int_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)\,dx$$

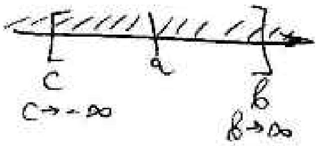
באופן דומה, נגדיר אינטגרל בקטע $(-\infty, a]$



$$\int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx = \lim_{b \to -\infty} \int_{b}^{a} f(x)\,dx$$

אם $f(x)$ אינטגרבילית בכל קטע סגור $[-b,b]$, ניתן להגדיר גם

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{a}^{\infty} f(x)\,dx + \int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx =$$



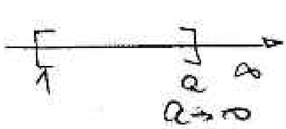
$$= \lim_{b \to \infty} \int_{a}^{b} f(x)\,dx + \lim_{c \to -\infty} \int_{c}^{a} f(x)\,dx$$

אם שני האינטגרלים באגף ימין של השוויון האחרון מתכנסים, נאמר שאינטגרל באגף שמאל מתכנס.

אם לפחות אחד מבין שני האינטגרלים באגף ימין מתבדר — האינטגרל באגף שמאל מתבדר.

הערה חשובה: אין חשיבות לבחירת a

דוגמא: חשב $\int_{1}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}$



$$\int_{1}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{a \to \infty} \int_{1}^{a} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \lim_{a \to \infty} \left(\operatorname{arctg} x \Big|_{1}^{a} \right) =$$

$$= \lim_{a \to \infty} \operatorname{arctg} a - \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$$

$\Leftarrow$ האינטגרל מתכנס.

עבור אילו ערכי α מתכנס האינטגרל $\int_a^\infty \frac{1}{x^\alpha}\,dx$ $(a>0)$

נבדוק עבור $\alpha=1$:

$$\int_a^\infty \frac{1}{x^1}\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_a^b \frac{1}{x}\,dx = \lim_{b\to\infty} \ln x \Big]_a^b$$

$$= \lim_{b\to\infty} \ln b - \ln a = \infty$$

מסקנה: עבור $\alpha=1$ האינטגרל מתבדר.

עבור $\alpha\neq 1$:

$$\int_a^\infty \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_a^b \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_a^b x^{-\alpha}\,dx =$$

$$= \lim_{b\to\infty} \frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\Big]_a^b = \lim_{b\to\infty} \frac{b^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} - \frac{a^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} =$$

$$= \lim_{b\to\infty} \frac{1}{b^{\alpha-1}(1-\alpha)} - \frac{1}{a^{\alpha-1}(1-\alpha)} = \star$$

$\alpha>1$:

$$\star = \underbrace{\frac{1}{\infty\cdot(\text{שלילי})}}_{0} - \underbrace{\frac{1}{a^{(\text{חיובי})}(\text{שלילי})}}_{\text{גבול סופי}} = -\frac{1}{a^{(\alpha-1)}(1-\alpha)}$$

האינטגרל מתכנס.

$\alpha<1$:

$$\star = \frac{1}{\infty^{\text{שלילי}}\cdot\text{חיובי}} - \frac{1}{a^{\text{שלילי}}(\text{חיובי})} \longrightarrow$$

$\Leftarrow$ עבור $\alpha\le 1$ האינטגרל מתבדר.

משפט: תהי $f(x)$ פונק' אינטגרבילית בקטע $[a,b]$ לכל $b>a$

כאשר a - נק' קבועה; ויהיו $M>0$ ו-α, שני מספרים.

א) אם $\alpha>1$ וגם $0\le f(x)\le \frac{M}{x^\alpha}$ לכל x בקטע $[a,\infty)$, אזי $\int_a^\infty f(x)\,dx$ מתכנס. ($M<x$, מתכנס $\int \frac{1}{x^\alpha}dx$)

ב) אם $\alpha\le 1$ וגם $\frac{M}{x^\alpha}\le f(x)$ לכל x בקטע $[a,\infty)$, אזי $\int_a^\infty f(x)\,dx$ מתבדר

סה"כ קיבלנו: לכל $\alpha>1$ האינטגרל מתכנס, לכל $\alpha\le 1$ האינטגרל מתבדר.

דוגמא: בדוק התכנסות / התבדרות: $\int_0^\infty \frac{\sqrt[3]{x}}{1+x^2}\,dx$

נסמן: $f(x)=\frac{\sqrt[3]{x}}{1+x^2}$ לכל x בקטע הנתון

$$\frac{\sqrt[3]{x}}{1+x^2} \le \frac{\sqrt[3]{x}}{x^2} = x^{-\frac{5}{3}}$$

הקטנו מכנה ← הגדלנו שבר

קיבלנו ש $f(x) \le \frac{1}{x^{\frac{5}{3}}}$

$\alpha=\frac{5}{3}>1$, $\int \frac{1}{x^{\alpha}}\,dx$ ⇐ עפ"י גבול האינטגרל מתכנס

$\Rightarrow$ $\int$ מתכנס $\le f(x) \le 0$ ⇐ $\int_a^\infty f(x)\,dx$ מתכנס.

הגדרה: תהי $f(x)$ פונק' אינטגרבילית בקטע $[a,b]$ לכל $b>a$, כאשר a - נק' קבועה.

נאמר כי $f(x)$ אינטגרבילית בהחלט בקטע $[a,\infty)$ אם האינטגרל הלא אמיתי $\int_a^\infty |f(x)|\,dx$ מתכנס.

נאמר גם כי $\int_a^\infty f(x)\,dx$ מתכנס בהחלט

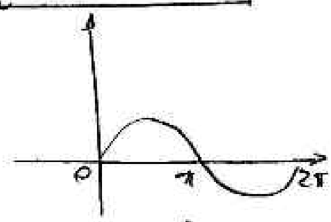
משפט: אם $f(x)$ אינטגרבילית בהחלט בקטע $[a,\infty)$, אז היא אינטג- רבילית בקטע!

בנוסף מתקיים:

$$\boxed{\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| = \int_a^b |f(x)|\,dx}$$

דוגמא:

$$\int_0^{2\pi} \sin x\,dx = 0$$



חשב את השטח הכלוא בין גרף הפונק' $g=\sin x$ וציר x בקטע $[0,2\pi]$

$$\int \sin x\,dx + \int_0^{\pi} -\sin x\,dx \;\dots$$

$$\int_0^\infty e^{-x}\sin x\,dx = \left|\int_0^\infty e^{-x}\sin x\,dx\right| = \dots$$

$$|e^{-x}\sin x| = |e^{-x}|\,|\sin x| \le |e^{-x}|$$

$-1\le \sin x \le 1$

$\sin^2 x \le 1$

$|\sin x| \le 1$

$$\int_0^\infty e^{-x}\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{-x}\,dx = \lim_{b\to\infty}\left(-e^{-x}\right]_0^b = \lim_{b\to\infty} -e^{-b}-(-e^{0})=1$$

קיבלנו ש:

$$\int_0^\infty \left|e^{-x}\sin x\right|dx$$ מתכנס

$f(x)=e^{-x}\sin x$ אינטגרבילית בהחלט בקטע הנתון $\Leftarrow$

$f(x)$ אינטגרבילית! $\int_0^\infty e^{-x}\sin x\,dx$ - מתכנס.

מבחן ההשוואה:

יהיו $f(x)$ ו-$g(x)$ שתי פונק' לא שליליות בקטע $[a,\infty)$ ואינטגרביליות בקטע $[a,b]$ לכל $b>a$.

נניח כי קיים מספר ממשי b_0 כך שלכל $b_0\le x$ מתקיים $f(x)\le g(x)$

אזי:

א) אם $\int_a^\infty g(x)\,dx$ מתכנס, אז גם $\int_a^\infty f(x)\,dx$ מתכנס.

ב) אם $\int_a^\infty f(x)\,dx$ מתבדר אז גם $\int_a^\infty g(x)\,dx$ מתבדר

אינטגרלים מוכללים: 27.02.05

הרצאה II

אינטגרלים עם גבולות אינטגרציה אינסופיים

מבחן המנה: יהיו $f(x)$ ו- $g(x)$ פונק' אי-שליליות בקטע $[a,\infty)$ ונניח שקיים הגבול $L=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}$.

אז:

א) אם $0<L<\infty$ אזי שני האינטגרלים $\int_a^\infty f(x)dx$ ו- $\int_a^\infty g(x)dx$ מתכנסים ביחד או מתבדרים ביחד.

כלומר אם ידוע על אחד מהאינטגרלים שהוא מתכנס $\Rightarrow$ גם השני מתכנס

" " " " " " מתבדר $\Rightarrow$ " " מתבדר

ב) אם $L=0$ ונתון $\int_a^\infty g(x)dx$ מתכנס, אז גם $\int_a^\infty f(x)dx$ מתכנס

ג) אם $L=\infty$ - " " " " " "

דוגמא: בשיעור שעבר הראינו:

$$\int_1^\infty f(x)\,dx=\int_1^\infty\frac{1}{1+x^2}dx=\frac{\pi}{4}\ \rightarrow\ \text{מתכנס}$$

$$\int_1^\infty g(x)\,dx=\int_1^\infty\frac{1}{5+x^2}dx$$

ברור כי $f(x)$ וגם $g(x)$ אי-שליליות בקטע $[1,\infty)$ וידוע כי $\int_1^\infty f(x)dx$ מתכנס.

לפי מבחן המנה, נסיק על שני האינטגרלים מתכנסים באותו אופן:

$$L=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{1+x^2}}{\frac{1}{5+x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{5+x^2}{1+x^2}=1\ \Rightarrow$$

כלומר $\int_1^\infty\frac{1}{5+x^2}dx$ מתכנס.

נעבור למבחנים שאינם דורשים שהפונק' הן אי שליליות

מבחן Abel: יהיו $f(x)$ ו- $g(x)$ פונק' אינטגרביליות בקטע $[a,b]$ עבור כל $a<b$. אם האינטגרל $\int_a^\infty f(x)dx$ מתכנס, ואם $g(x)$ מונוטונית וחסומה בקטע $[a,\infty)$, אז גם $\int_a^\infty f(x)g(x)dx$ מתכנס

מבחן דיריכלה: יהיו $f(x)$ ו- $g(x)$ פונ' אינטגרביליות בקטע $[a,b]$ $\forall b>a$.
נניח שקיים M, כך ש: $\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \le M$, $\forall b>a$,
ונניח כי $g(x)$ מונוטונית ו- $\lim_{x\to\infty} g(x)=0$,
אזי $\int_a^\infty f(x)g(x)\,dx$ מתכנס.

דוגמא: הוכח כי האינטגרל $\int_a^\infty \frac{\sin x}{x^\alpha}\,dx$, עבור $a>0$, מתכנס לכל $\alpha>0$.

פתרון:

נסמן $f(x)=\sin x$ ו- $g(x)=\frac{1}{x^\alpha}$. $f(x)$ ו- $g(x)$ הן אינטגרביליות בקטע $[a,b]$ לכל $b>a$ (כי נתון $a>0$)

$$\left|\int_a^\infty f(x)\,dx\right| = \left|\int_a^\infty \sin x\,dx\right| = \left|\lim_{b\to\infty}\int_a^b \sin x\,dx\right| = \left|\lim_{b\to\infty}(-\cos x|_a^b\right| =$$
$$= \left|-\lim_{b\to\infty}\cos b-(-\cos a)\right| \le 2$$

$g(x)=\frac{1}{x^\alpha}$ - פונקציה מונוטונית ומקיימת $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^\alpha}=0$, $\alpha>0$

לפי מבחן דיריכלה $\Leftarrow$ $\int_a^\infty \frac{\sin x}{x^\alpha}\,dx$ מתכנס.

דוגמא: הדוגמא הנ"ל מראה ש- $\int_a^\infty f(x)\,dx$ מתכנס - אבל לא בהכרח $\lim_{x\to\infty}f(x)=0$

נסתכל על הפונקציה $f(x)=\sin x^2$:

$\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}(\sin x^2) \longrightarrow$ הגבול לא קיים

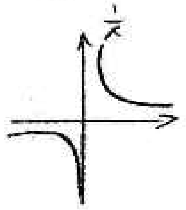
נסתכל על $\int_0^\infty \sin x^2\,dx$:

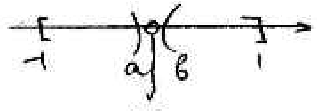
$$\int_0^\infty \sin(x^2)\,dx =$$

$x^2=t$
$x=\sqrt{t}$
$dx=\frac{1}{2\sqrt{t}}\,dt$

$$\int \sin(x^2)\,dx = \int \sin t\cdot\frac{1}{2\sqrt{t}}\,dt = \frac{1}{2}\int\frac{\sin t}{t^{\frac{1}{2}}}\,dt \Longrightarrow$$ לפי הדוגמא הקודמת האינטגרל מתכנס.

אינטגרל של פונקציה לא חסומה





$$a \to 0^- \,,\; b \to 0^+$$

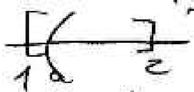
$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{x}\,dx = \underbrace{\lim_{a\to 0^-}\int_{-1}^{a} \frac{1}{x}\,dx}_{(*)} + \underbrace{\lim_{b\to 0^+}\int_{b}^{1} \frac{1}{x}\,dx}_{(**)}$$

$$(*)\quad \lim_{a\to 0^-}\int_{-1}^{a} \frac{1}{x}\,dx = \lim_{a\to 0^-} \ln|x|\Big]_{-1}^{a} = \lim_{a\to 0^-} \ln|a| - \ln|-1|$$

$$\downarrow -\infty$$

תחום הקטע $[-1,a)$, $a\to 0^-$ האינטגרל מתבדר $\Leftarrow$ $\int_{-1}^{1} \frac{1}{x}\,dx$ מתבדר

דוגמה:



$$a \to 1^+$$

$$\int_{1}^{2} \frac{1}{\sqrt{x-1}}\,dx = \lim_{a\to 1^+}\int_{a}^{2} \frac{1}{\sqrt{x-1}}\,dx \overset{(*)}{=}$$

$$= 2\Big[\lim_{a\to 1^+} \sqrt{x-1}\Big]_{a}^{2} =$$

$$= 2\Big[\underbrace{\sqrt{2-1}}_{1} - \underbrace{\lim_{a\to 1^+}\sqrt{a-1}}_{0}\Big] = 2$$

$$(*)\int \frac{1}{\sqrt{x-1}}\,dx =$$

$$= \int \frac{1}{(x-1)^{\frac12}}\,dx =$$

$$= \int (x-1)^{-\frac12}\,dx = \frac{(x-1)^{\frac12}}{1\cdot\frac12} = 2\sqrt{x-1}$$

דרך אחרת $\quad x-1=t,\; dx=dt$

$$\int \Big(\frac{1}{\sqrt{x-1}}\Big)dx = \int \frac{1}{\sqrt{t}}\,dt = \int t^{-\frac12}\,dt =$$

$$= \frac{t^{\frac12}}{\frac12} = 2\sqrt{t} = 2\sqrt{x-1}$$

נניח ♡ שאם $f(x)$ אינה חסומה בסביבת נק' פנימית בקטע $[a,b]$

ונניח כי הפונק' $f(x)$ מוגדרת לכל נק' בקטע $[a,b]$, פרט לנק' $c\in(a,b)$

אזי נפרק את התחום $[a,b]$ לשני תתי קטעים: $[a,c-\varepsilon)$ ו- $(c+\varepsilon,b]$

אם קיימים שני הגבולות:

$$\left.\begin{aligned} I_1 &= \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{a}^{c-\varepsilon} f(x)\,dx \\ I_2 &= \lim_{\varepsilon\to 0^-}\int_{c+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

קיים האינטגרל הלא אמיתי של $f(x)$ בקטע $[a,b]$, וערכו:

$$\int_a^b f(x)\,dx = I_1 + I_2$$

הגדרה: נאמר כי $f(x)$ אינטגרבילית בהחלט בקטע $[a,b]$ אם קיים האינטגרל הלא אמיתי $\int_a^b |f(x)|dx$

משפט: אם $f(x)$ אינטגרבילית בהחלט בקטע $[a,b]$, אזי קיים האינטגרל $\int_a^b f(x)dx$

סכום נושא אינטגרלים מכל הסוגים

$$\int_{-2}^{0} \frac{1}{x^2}\cdot e^{-\frac{1}{x}}\,dx = \lim_{a\to 0^-}\int_{-2}^{a} \frac{1}{x^2}\cdot e^{-\frac{1}{x}}\,dx = \circledast$$

$a \to 0^-$

$$= \lim_{a\to 0^-} e^{-\frac{1}{x}}\Big]_{-2}^{a} = \lim_{a\to 0^-} e^{-\frac{1}{a}} - e^{\frac{1}{2}} = \infty$$

$e^{\infty} \to \infty$

האינטגרל מתבדר

$$\int \frac{1}{x^2}\cdot e^{-\frac{1}{x}}\,dx = \int e^t\,dt =$$

$-\frac{1}{x} = t$

$\frac{1}{x^2} = t^2$

$\frac{1}{x^2}dx = dt$

$$= e^t = e^{-\frac{1}{x}}$$

$$\int_{-1}^{1} \frac{x}{1-x^2}\,dx = \underbrace{\lim_{a\to -1^+}\int_a^0 \frac{x}{1-x^2}\,dx}_{*} - \underbrace{\lim_{b\to 1^-}\int_0^b \frac{1}{1-x^2}\,dx}_{**} =$$

$a \to -1^+$

$b \to 1^-$

$$(*) = \lim_{a\to -1^+}\int_a^0 \frac{x}{1-x^2}\,dx =$$

$$= -\frac{1}{2}\lim_{a\to -1^+} \ln|1-x^2|\Big]_a^0 = \underbrace{-\frac{1}{2}\ln|1-0^2|}_{0} +$$

$$+\frac{1}{2}\lim_{a\to -1^+}\ln|1-a^2| = -\infty$$

$1-a^2 \to 0^+$

מתבדר

$-\infty$

האינטגרל מתבדר

$$\int_0^{\infty} \frac{\ln x}{x}\,dx = \lim_{a\to 0^+}\int_a^2 \frac{\ln x}{x}\,dx + \underbrace{\lim_{b\to\infty}\int_2^b \frac{\ln x}{x}\,dx}_{*} =$$

$$(*)\ \lim\int_2^b \frac{\ln x}{x}\,dx = \frac{1}{2}\lim_{b\to\infty}(\ln x)^2\Big]_2^b =$$

$$\int \frac{\ln x}{x}\,dx = \int t\,dt = \frac{t^2}{2}$$

$\ln x = t,\ \frac{1}{x}dx = dt$

$$\frac{1}{2}\lim_{b\to\infty}(\ln b)^2 - \frac{1}{2}(\ln 2)^2 = \infty$$

∞

מתבדר

ב.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2+1}\,dx = \underbrace{\lim_{a\to-\infty}\int_a^0 \frac{1}{x^2+1}\,dx}_{(*)} + \underbrace{\lim_{b\to\infty}\int_0^b \frac{1}{x^2+1}\,dx}_{(**)} =$$

$$-\infty \quad a \qquad 0 \qquad \infty \quad b$$

=

$(*)\ \lim_{a\to-\infty}\int_a^0 \frac{1}{x^2+1}\,dx = \lim \operatorname{arctg} x \Big]_a^0 =$

$= \operatorname{arctg} 0 - \operatorname{arctg} a =$

$= \frac{\pi}{2}$

$(**)\ \lim_{b\to\infty}\int_0^b \frac{1}{x^2+1}\,dx =$

$= \lim_{b\to\infty} \operatorname{arctg} x \Big]_0^b = \lim \operatorname{arctg} b - \operatorname{arctg} 0 =$

$= \frac{\pi}{2}$

סה"כ ק"ם גבול סופי

6.03.05
הרצאה III

טורים.

מושגים בסיסיים
טור גאומטרי. טור טלסקופי. טור p.
קריטריון קושי להתכנסות טורים.
מבחני השוואה לטורים חיוביים.

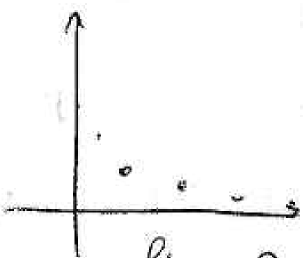
טור: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n(n-2)}$$

הגדרת הטור וסכומו: תהי $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרת מספרים.
הביטוי $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1+a_2+a_3+\dots$ נקרא טור אינסופי או טור
ו-a_n נקרא האיבר הכללי של הטור
נסתכל על סדרת הסכומים החלקיים המוגדרת ע"י:

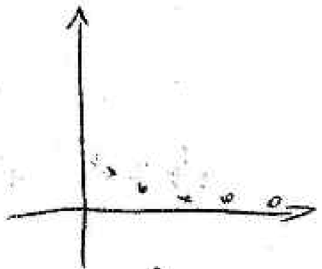
$$S_1=a_1,\quad S_2=a_1+a_2,\quad S_3=a_1+a_2+a_3,\ \dots,\quad S_n=a_1+a_2+\dots+a_n$$

הגדרה: נאמר שטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ הוא מתכנס אם קיים גבול לסדרת הסכומים החלקיים השווה ל-S, כאשר $\lim_{n\to\infty} S_n = S$.
ונרשום $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$.
ואם לא קיים $\lim_{n\to\infty} S_n$ (או שהגבול הוא אינסופי) — נאמר שהטור מתבדר.



$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}$

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \to$ מתבדר



$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}$

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \to$ מתכנס

טורים מוכרים:

טור גאומטרי: טור מהצורה: $a_1, a_1 q, a_1 q^2, \dots$, $q\neq 0$
האיבר הכללי: $a_n = a_1 q^{n-1}$
סכום n האיברים הראשונים של הטור:

$$\boxed{S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}}\ (q\neq 1)$$

$$S_n = 1+q+q^2+\dots+q^{n-1} = \begin{cases} \frac{1-q^n}{1-q} & ; q\neq 1 \\ n & ; q=1 \end{cases}$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \begin{cases} \frac{1}{1-q} ; & -1<q<1 \iff |q|<1 \\ \infty ; & q \geq 1 \\ \text{לא קיים גבול} ; & q \leq -1 \end{cases}$$

<u>מסקנה</u>: טור גאומטרי מתכנס <u>אמ"מ</u> $|q|<1$.

הטור (סכום הסדרה) מתכנס לגבול $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{a_1}{1-q}$

קבע התכנסות של הסדרות. במקרה והטור מתכנס קבע את סכומו.

a) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} 3\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^n$

$a_1 = 3\cdot\frac{2}{5}$
$a_2 = 3\cdot\frac{4}{25}$, $a_3 = 3\cdot\frac{8}{125}$ ...

קיבלנו טור הנדסי אינסופי! $-1<q=\frac{2}{5}<1 \Rightarrow$ טור מתכנס.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{a_1}{1-q} = \frac{\frac{6}{5}}{1-\frac{2}{5}} = \frac{\frac{6}{5}}{\frac{3}{5}} = 2$$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 3\left(\frac{5}{2}\right)^n$

$a_1 = 3\cdot\left(\frac{5}{2}\right)$
$a_2 = 3\cdot\left(\frac{5}{2}\right)^2$, $a_3 = 3\cdot\left(\frac{5}{2}\right)^3$, ...

קיבלנו טור הנדסי אינסופי.

$q=\frac{5}{2}>1 \Rightarrow$ הטור $\to \infty \Leftarrow$ מתבדר

c) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = (-1)^{n+1}$

$a_1=-1$
$a_2=1$
$a_3=-1$ ...

$\begin{cases} 0 ; & n \text{ זוגי} \\ 1 ; & n \text{ אי זוגי} \end{cases}$

$\Leftarrow$ לא קיים $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \Leftarrow$ מתבדר

טור לייבניץ:

טור מהצורה $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ נקרא טור לייבניץ.

<u>טענה</u>: טור לייבניץ הוא טור מתכנס וסכומו $\ln 2$.

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ - טור הרמוני

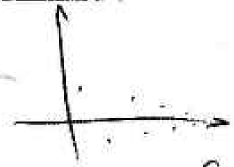
הדוגמא הקלאסית לטור שהאיבר הכללי של שואף ל-0

$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$

אבל הטור הזה - טור מתבדר:

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \to \infty$

טור לייבניץ:



האיבר הכללי שואף ל-0.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{(-1)^{n+1}}{n} + \dots$$

נרשום פיתוח טיילור (מקלורן) עבור $\ln(1+x)$:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}\cdot x + \frac{f''(0)}{2!}\cdot x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\cdot x^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}\cdot x^{n+1}$$

$f(x) = \ln(x+1)$; $f'(x) = \frac{1}{1+x}$; $f'(0) = 1$

$$\ln(1+x) = \ln 1 + x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + \frac{(-1)^{n+1}}{n}\cdot x^n + \underbrace{\frac{(-1)^{n+2}\cdot x^{n+1}}{(n+1)(1+c)^n}}_{\text{איבר השארית}}$$

נציב בפיתוח של $\ln(1+x)$: $x=1$:

$$\ln 2 = \ln 1 + 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots + \frac{(-1)^{n+1}}{n} + \underbrace{\frac{(-1)^{n+2}}{(n+1)(1+c)^n}}_{\text{איבר השארית}}$$

נוכיח כי איבר השארית הזה לנ"ח עבור $n \to \infty$:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^{n+2}}{(n+1)(1+c)^n}$$

באופן כללי $0<c<x$, ואצלנו הצבנו $x=1$, $\Rightarrow$ $0<c<1$

$$\Downarrow$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln 2$$

טור טלסקופי.

הגדרה: נתונה סדרת מספרים $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. הטור $\sum_{n=1}^{\infty}(a_{n+1}-a_n)$ נקרא טור טלסקופי.

$$\sum_{n=1}^{\infty} = S_n = (a_2-a_1) + (a_3-a_2) + (a_4-a_3) + \dots + (a_{n+1}-a_n) =$$
$$= a_{n+1} - a_1$$

נעבור לגבול:

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} - a_1}$$

מסקנה 1 טור טלסקופי הוא מתכנס אמ"מ הסדרה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ גם מתכנסת.

אם הסדרה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת ל-a, אזי הטור הטלסקופי מתכנס, וסכומו: $\boxed{a - a_1}$

בדוק האם הטור מתכנס, ואם כן - חשב את סכומו:

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k(k-1)}$$

$$\frac{1}{k(k-1)} = \frac{A}{k} + \frac{B}{k-1} \qquad / k(k-1)$$

$$1 = A(k-1) + B \cdot k \quad \Rightarrow \quad A = -1, \quad B = 1$$

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k(k-1)} = \sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right) = \left(\frac{1}{1} - \cancel{\frac{1}{2}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{2}} - \cancel{\frac{1}{3}}\right) + \dots + \left(\cancel{\frac{1}{k-1}} - \frac{1}{k}\right) =$$

$$= 1 - \frac{1}{k}$$

עבור $k \to \infty$: $\lim_{k \to \infty} \left(1 - \frac{1}{k}\right) = 1$

דוגמא:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\ln(n+1) - \ln(n)\right]$$

$$= (\cancel{\ln 2} - \ln 1) + (\cancel{\ln 3} - \cancel{\ln 2}) + \dots + (\ln(n+1) - \cancel{\ln n}) =$$

$$= \ln(n+1) - \ln 1 = \ln(n+1)$$

עבור $n \to \infty$: $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \lim_{n \to \infty} \ln(n+1) \to \infty$

$$\Downarrow$$

הטור הנתון הוא טלסקופי מתבדר

13.03.05
הרצאה $\overline{N}$

טורים: קריטריון קושי
מבחני התכנסות לטורים חיוביים.
מבחן השוואה
מבחן השוואה בגבול
מבחן השורש
מבחן המנה
מבחן האינטגרל

קריטריון קושי להתכנסות טורים: הטור $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ מתכנס אמ"מ

$$\forall \varepsilon>0 \quad \exists N(\varepsilon), \quad \forall n,\ n>N(\varepsilon),$$
$$\forall p\in\mathbb{N} \quad |a_{n+1}+a_{n+2}+\dots+a_{n+p}| = \left|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k\right| < \varepsilon$$

דוגמא:
הוכח שהטור ההרמוני $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}$ מתבדר.
נשתמש בקריטריון קושי ונקח $p=n$ ונחשב:

$$S_{2n}-S_n=\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{k}=\underbrace{\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\dots+\frac{1}{2n}}_{n \text{ פעמים}} >$$

$$> \overbrace{\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n}+\dots+\frac{1}{2n}} = n\cdot\frac{1}{2n}=\frac{1}{2}$$

קיבלנו כי $\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{k}>\frac{1}{2}$, והסכום לא קטן מ-$\varepsilon$, לכל $0<\varepsilon$,
לכן קריטריון קושי אינו מתקיים.

דוגמא:
בדוק התכנסות הטור: $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos 2^k}{k^2}$

$$=\frac{\cos 2^1}{1^2}+\frac{\cos 2^2}{2^2}+\dots+\frac{\cos 2^n}{n^2}+\dots$$

נבחר $\varepsilon>0$ נתון מראש, ונמצא $N(\varepsilon)$ כך שלכל $n>N(\varepsilon)$,
ולכל $p\in\mathbb{N}$ הטור מתכנס.

$$|S_{n+p}-S_n| = \left|\frac{\cos 2^{n+1}}{(n+1)^2}+\frac{\cos 2^{n+2}}{(n+2)^2}+\dots+\frac{\cos 2^{n+p}}{(n+p)^2}\right| \le$$

$|\cos x|\le 1$

$$\le \left|\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+2)^2}+\dots+\frac{1}{(n+p)^2}\right| = \frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+2)^2}+\dots+\frac{1}{(n+p)^2}\le$$

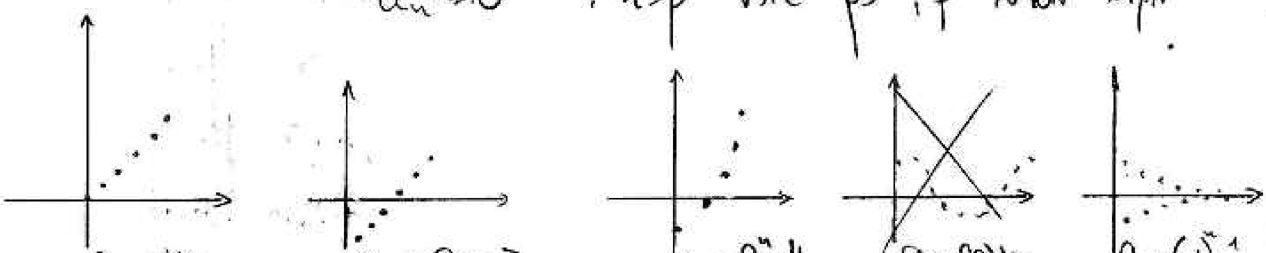
$(n+1)(n+1)<n(n+1)$

$$\le \frac{1}{n(n+1)}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}+\dots+\frac{1}{(n+p-1)(n+p)} = \left(\frac{1}{n}-\cancel{\frac{1}{n+1}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{n+1}}-\cancel{\frac{1}{n+2}}\right)+\dots+$$

$$+\left(\cancel{\frac{1}{n+p-1}}-\frac{1}{n+p}\right)=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+p}<\frac{1}{n}<\varepsilon$$

אם נקח $N(\varepsilon)=[\frac{1}{\varepsilon}]$ – נקבל שלכל $0<\varepsilon$ קיים $N(\varepsilon)$ כזה,
שלכל $p\in\mathbb{N}$ ולכל $n>N(\varepsilon)$ ... $|S_{n+p}-S_n|<\varepsilon$ ...

הגדרה: טור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ נקרא טור חיובי (אי שלילי), אם קיים
מקום מסוים k, כך שלכל $n>k$: $a_n\geq 0$ ...



$a_n=n$, $a_n=2n-7$, $a_n=2^n-4$, $a_n=\cos n$, $a_n=(-1)^n\cdot\frac{1}{n}$

$\sum a_n=\sum_{n=1}^{\infty} n$

$a_1=-5$
$a_2=-3$
$a_3=-1$
$a_4=1$

תנאי הכרחי להתכנסות טורים:

אם טור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס, אזי $\lim_{n\to\infty} a_n=0$

שאלה: האם העובדה שאיבר הכללי $\to 0$ $\Rightarrow$ טור מתכנס? לא!

דוגמא: הטור ההרמוני – $\sum_{n=1}^{\infty} a_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ – ראינו ע"פ קריטריון קושי
הטור מתבדר, אך: $\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$

דוגמא:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\cos\left(\frac{2^n\cdot n!}{n^2+1}\right)\right|$$

איבר כללי לא שואף ל-0 $\Rightarrow$ **הטור מתבדר**

טורים חיוביים (אי-שליליים)

נתונים 2 טורים חיוביים: $A=\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $B=\sum_{n=1}^{\infty} b_n$

נסמן ע"י A_n ו- B_n את סדרת הסכומים החלקיים של הטורים בהתאמה.

מבחן השוואה (הראשון): אם לכל n החל ממקום מסוים מתקיים:
$a_n\le b_n$ אזי:

א. מהתכנסותו של הטור B נובעת התכנסותו של הטור A.

ב. מהתבדרותו של הטור A " התבדרותו " B.

הוכחה: מהעובדה ש- $a_n\le b_n$ נובע כי $A_n\le B_n$.

אם קיים גבול סופי $B=\lim_{n\to\infty} B_n$, והסדרה $\{A_n\}$ חסומה ע"י B

$\Longrightarrow$ קיים $\lim_{n\to\infty} A_n$ $\Longrightarrow$ הטור A מתכנס.

דוגמאות: בדוק התכנסות/התבדרות של הטורים:

משפט: טור מהצורה $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$
מתכנס לכל $1<p$,
מתבדר לכל $p\le 1$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ (אפשר מ-0 או [illegible])

$\downarrow$

טור p, $p=2 \Rightarrow$ מתכנס.

$$\frac{1}{n^2} \le \frac{1}{n(n-1)}$$

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n(n-1)} = \sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n-1}\right) = -\left[\left(\frac{1}{2}-1\right)+\left(\cancel{\frac{1}{3}}-\cancel{\frac{1}{2}}\right)+\left(\frac{1}{4}-\cancel{\frac{1}{3}}\right)+\dots\right.$$

$$\left.+\left(\frac{1}{n}-\cancel{\frac{1}{n-1}}\right)\right] = 1-\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 1 \Rightarrow$$

טור טלסקופי מתכנס.

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+3)^2}$

$\frac{1}{(n+3)^2} \le \frac{1}{n^2}$

$\sum \frac{1}{n^2}$ - מתכנס לפי הדוגמא הקודמת

הטור הנבדק קטן מהטור מתכנס

$\Downarrow$

הטור הנבדק מתכנס.

$\sum \frac{1}{(n-3)^2}$

$\frac{1}{(n-3)^2} \ge \frac{1}{n^2}$

מתכנס.

מבחן השוואה שני (מבחן השוואה הגבולי)

אם קיים הגבול $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = l$,

א. $0<l<\infty$ - אזי הטורים A ו-B מתכנסים ביחד או מתבדרים ביחד.

ב. אם $l=0$ והטור B מתכנס $\Rightarrow$ A - טור מתכנס

ג. אם $l=\infty$ $\Rightarrow$ מהתכנסות A נובעת התכנסות B.

דוגמא:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{(n-3)^2}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{(n-3)^2} = 1$$

קבלנו $l=1$ $\Leftarrow$ 2 הטורים מתנהגים אותו דבר.

$\sum \frac{1}{n^2}$ מתכנס $\Leftarrow$ $\sum \frac{1}{(n-3)^2}$ מתכנס.

$\sum_{n=1}^{\infty} \left|\sin \frac{2}{n}\right|$

נבדוק איבר כללי:

$\lim_{n\to\infty} \sin\left(\frac{2}{n}\right) = \sin 0 = 0$

נסתכל על: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n} = 2\cdot \boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}}$

טור הרמוני, מתבדר

לפי מבחן השוואה גבולי

$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{\sin\frac{2}{n}}{\frac{2}{n}}\right| = 1$

$\lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{t} = 1$

2 הטורים מתנהגים באותו אופן ⟸ הטור הנבדק מתבדר

מבחן השוואה שלישי: אם לכל n:

$(a_n \neq 0,\ b_n \neq 0)$: $\frac{a_{n+1}}{a_n} \le \frac{b_{n+1}}{b_n}$

אזי:

א. מהתכנסות הטור B נובעת התכנסות A

ב. מהתבדרות הטור A נובעת התבדרות B

מבחן דלמבר: אם החל ממקום מסוים $n=k$, איברי הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, (כלומר a_n), מקיימים: $\frac{a_{n+1}}{a_n} \le q < 1$, (*)

אזי הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס.

אם $\frac{a_{n+1}}{a_n} \ge 1$ אזי הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתבדר.

ניסוח מבחן דלמבר בצורה גבולית:

אם קיים הגבול $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$, אזי:

א. $l < 1$ ← הטור מתכנס.

ב. $l > 1$ ← הטור מתבדר

ג. $l = 1$ ← המבחן "לא עובד"

נשים ♡ שבניסוח מבחן דלמבר המקורי לא ניתן להחליף את אי שוויון (*)

ב: $\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$

דוגמא: נסתכל על $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$

$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = \frac{n}{n+1} < 1$

קיבלנו שהיחס קטן ממש מ-1, אבל לא ניתן למצוא q שמקיים את (*)

(שים ♡ ש $\sum \frac{1}{n}$ - טור מתבדר)

$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = \frac{n}{n+1} = 1$

!! ?

20.03.05
הרצאה V

טורים חיוביים:

מבחן דלמבר

מבחן האינטגרל

טורים כלליים + טורים מחלפי סימן

(מבחן המנה)
מבחן דלמבר: אם החל ממקום מסוים בטור (המקום ה- $n=k$)
איברי הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ $(a_n>0)$, מקיימים: $\frac{a_{n+1}}{a_n} \le q < 1$
אזי הטור מתכנס. אם $\frac{a_{n+1}}{a_n} \ge 1$ אזי הטור מתבדר.

הנוסח הגבולי של מבחן דלמבר: אם קיים הגבול $L = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$

אזי: עבור $L<1$ – הטור מתכנס

עבור $L>1$ – הטור מתבדר

עבור $L=1$ – מבחן דלמבר אינו מתאים לבדיקה בנושא התכנסות/התבדרות הטור.

(מבחן השורש)
מבחן קושי: יהי $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ טור חיובי.
אם החל ממקום מסוים איברי הטור מקיימים $\sqrt[n]{a_n} \le q < 1$
אזי הטור מתכנס. אם $\sqrt[n]{a_n} \ge 1$ – הטור מתבדר.

ניסוח גבולי למבחן קושי: אם קיים הגבול $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = L$, אזי:

עבור $L<1$ – הטור מתכנס;

עבור $L>1$ – הטור מתבדר;

עבור $L=1$ – לא ניתן לדעת עפ"י מבחן קושי לגבי התכנסות/התבדרות.

טיפ:

תרגילים עם "!" עובדים טוב עם מבחן דלמבר (98%)

תרגילים עם חזקת n – עם מבחן קושי

תרגילים שמתאימים לשני המבחנים – מעדיף מבחן קושי.

אם אחד מהמבחנים לא עובד אז גם השני לא יעבוד

טורים עם ln, וחזקות שלו → מבחן האינטגרל

בדוק התכנסות/התבדרות:

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!} \rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{2^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2\cdot\cancel{2^n}\cdot\cancel{n!}}{\cancel{n!}(n+1)\cancel{2^n}} =$$

עפ"י מבחן המנה של דלמבר:

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n+1} = 0 \Rightarrow$$ הטור מתכנס

(2) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^n} \rightarrow \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{2^n}{n^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n} < 1$$

מבחן קושי

$\Leftarrow$ טור מתכנס.

(3) עבור אילו ערכי a הטור מתכנס?

" " " " " מתבדר?

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!\cdot a^n}{n^n} \xrightarrow[\text{דלמבר}]{} \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!\cdot a^{n+1}}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n!\cdot a^n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n!}\cancel{(n+1)}\cdot \cancel{a^n}\cdot a\cdot n^n}{(n+1)^n\cdot\cancel{(n+1)}\cdot\cancel{n!}\cdot\cancel{a^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{a\cdot n^n}{(n+1)^n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{a}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} = \boxed{\frac{a}{e}}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n = e$$

עפ"י מבחן המנה הטור מתכנס עבור $L<1$

$\Leftarrow \frac{a}{e} < 1 \Leftarrow \boxed{a<e}$; הטור מתבדר עבור $a>e$

(4) $$\underset{L}{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{3^n}} \le \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n+2}{3^n} \le \underset{R}{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6}{3^n}}$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{4}{3^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{4}}{3} = \frac{1}{3}$$

הטור מתכנס.

עפ"י מבחן השורש.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{6}{3^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{6}}{3} = \frac{1}{3}$$

הטור מתכנס.

גבולות ידועים:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{c} = 1$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

(אין צורך להראות כי "L" מתכנס,

כי מדובר על טורים חיוביים $\leftarrow$

כלומר הטור האמצעי חסום מטור מתכנס,

והוא חיובי $\rightarrow$ מכאן לא יתבדר.)

מכאן נובע לפי משפט הסנדוויץ' ראינו שהטור האמצעי מתכנס.

מבחן האינטגרל:

יהי $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ טור חיובי, ו- $f(n)$ ערך הפונקציה $f(x)$ בנק' $x=n$. אם $f(x)$ חיובית, ולא עולה בתחום $1 \le x$,
אזי הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ והאינטגרל $\int_1^{\infty} f(x)dx$ מתכנסים או מתבדרים ביחד. (ציור 1)

הערות:

1) מבחן האינטגרל עובד בשני כיוונים, לומר מהתכנסות פונקציה ניתן להסיק מסקנות על התכנסות טור, ומהתכנסות טור ניתן להסיק התכנסות פונקציה.

2) המבחן מתאים גם עבור $\sum_{n=m}^{\infty} a_n$ ואז נסתכל על $\int_m^{\infty} f(x)dx$, $m>0$

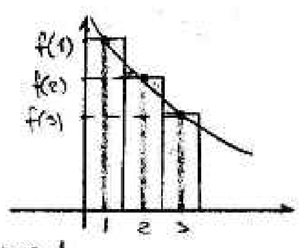
5) * בדוק התכנסות הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$

נסתכל על הפונקציה $f(x)=\frac{1}{x^p}$ בקטע $[1,\infty)$

$f(x)$ חיובית בקטע $[1,\infty)$;

$f(x)$ לא עולה בתחום,

$$\underset{f(x+1)}{\frac{1}{(x+1)^p}} \le \underset{f(x)}{\frac{1}{x^p}}$$



ציור 1

נוכל להסתכל על

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p}dx = \begin{cases} \infty, & 0<p\le 1 \\ \frac{1}{p-1} & 1<p \end{cases}$$

לכן: טור p מתכנס עבור $1<p$, ומתבדר עבור $0<p\le 1$

6) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\cdot \ln n}$

מבחן השוואה:

$$\frac{1}{n\cdot \ln n} \le \frac{1}{n}$$

$$\sum \frac{1}{n} \text{ - מתבדר}$$

מבחן השוואה הגבולי:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n\cdot \ln n}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n\cdot \ln n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\ln n} = 0$$

(не подходит, правила не для lim=0)

מבחן האינטגרל:

נגדיר: $f(x)=\frac{1}{x\cdot \ln x}$ בקטע $[2,\infty)$.

חיובית: $f(x)=\frac{1}{x\cdot \ln x}$ עבור כל x בקטע $[2,\infty)$ חיובית.

לא עולה:

$$\underset{f(x+1)}{\frac{1}{(x+1)\cdot \ln(x+1)}} \le \underset{f(x)}{\frac{1}{x\cdot \ln x}}$$

$$\int_e^\infty \frac{1}{x\ln x}\,dx = \lim_{a\to\infty}\int_e^a \frac{1}{x\ln x}\,dx = \lim_{a\to\infty}\left(\ln|\ln x|\right)\Big|_e^a =$$

$$\int_e \frac{1}{x\ln x}\,dx = \int_e^\infty \frac{1}{t}\,dt = \ln|t| = \ln|\ln x|$$

$\ln x = t$

$\frac{1}{x}dx = dt$

$$= \lim_{a\to\infty}\left(\ln|\ln a| - \ln|\ln e|\right) \to \infty \Rightarrow$$ האינטגרל מתבדר

∞ , 0

$\Rightarrow$ גם $\sum \frac{1}{n\cdot\ln n}$ מתבדר

טורים כלליים

הגדרה: טור $\sum_{n=1}^\infty a_n$ נקרא טור כללי אם הוא מכיל אינסוף איברים חיוביים ואינסוף איברים שליליים.

דוגמאות: $\sum_{n=1}^\infty \sin n$, $\sum_{n=1}^\infty \cos n$, $\sum_{n=1}^\infty (-1)^n\cdot a_n$

a_n - גדול חיובי/שלילי

גם פה אין כלל ברור לשאלות כאלה.

$\sum (-1)^n\cdot\frac{1}{n\cdot\ln n}$ — טור כללי, מחליף סימן

הגדרה: טור $\sum_{n=1}^\infty a_n$ יקרא טור מחליף סימן אם סימני איבריו מתחלפים לסירוגין.

מקרה כללי וצורה ע"פ הצורה $\sum_{n=1}^\infty (-1)^n\cdot a_n$, $a_n>0$ / $a_n<0$ — a_n - בעל סימן קבוע

רכיב האחראי על החלפת סימן לסירוגין.

משפט (כלל לייבניץ): עבור הטור $\sum_{n=1}^\infty (-1)^n a_n$, $a_n>0$,

אם $\{a_n\}$ סדרה מונוטונית יורדת, והאיבר הכללי שלה שואף לאפס ($\lim_{n\to\infty} a_n = 0$), אזי הטור מתכנס.

(*) $0<S<a_1$, כאשר S מסמן את סכום הטור

(*) $|r_n| < a_{n+1}$ (r_n - השארית של הטור)

טור לייבניץ: $\sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ מתכנס ל- $\ln 2$!

קבע התכנסות / התבדרות:

7

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \cdot \ln n}$$

$$a_n = \left| \frac{(-1)^n}{n \cdot \ln n} \right| = \frac{1}{n \ln n}$$

נבדוק קיום תנאי כלל לייבניץ:

א) נבדוק האם האבר הכללי שואף ל-0.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n \cdot \ln n} = 0$$

ב) נבדוק האם הסדרה היא מונוטונית יורדת:

$$a_{n+1} \le a_n$$

$$\frac{1}{(n+1)\cdot \ln(n+1)} \le \frac{1}{n \cdot \ln n} \quad \checkmark$$

$\Leftarrow$ הטור הנבדק מתכנס.

8

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+1}{n} \qquad , \qquad a_n = \left| (-1)^n \frac{n+1}{n} \right| = \frac{n+1}{n}$$

א) $$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1$$

— אבר כללי אינו שואף לאפס

$\Leftarrow$ הטור מתבדר

מסקנה מכלל לייבניץ: אם אבר כללי לא שואף לאפס

— הטור מתבדר;

אם הסדרה $\{a_n\}$ אינה מונוטונית יורדת -

המשפט לא עובד (צריך לבדוק עפ"י שיטות אחרות)

27.03.05

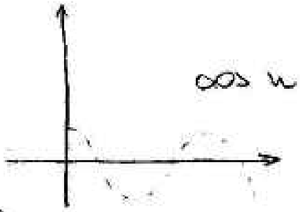
הרצאה VI

טורים כלליים:

התכנסות בתנאי, התכנסות בהחלט, התבדרות. פונקציות במספר משתנים.

טור כללי: טור, שבו ישנם אינסוף איברים חיוביים, ואינסוף איברים שליליים.

דוגמאות:



הגדרה: אומרים שהטור $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ מתכנס בהחלט אם טור הערכים המוחלטים $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ מתכנס.

הגדרה: נאמר שהטור $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ מתכנס בתנאי אם הוא מתכנס, אך טור הערכים המוחלטים מתבדר...

נתון $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ טור כללי

$\sum a_n$ מתבדר

נסתכל על טור הערכים המוחלטים

אם טור הערכים המוחלטים מתבדר - יש לנו לבדוק את הטור המקורי, ואם הטור המקורי מתכנס ⇐ הטור הכללי מתכנס בתנאי

טור הערכים המוחלטים מתכנס

הטור הכללי יקרא מתכנס בהחלט

משפט: טור מתכנס בהחלט הוא טור מתכנס.

הוכחה: אם נתון שהטור מתכנס בהחלט ⇐ טור הערכים המוחלטים מתכנס,
לפי קריטריון קושי: $\forall \varepsilon>0,\ \exists N: \forall n>N,\ \forall p\in\mathbb{N}$:

$$|a_{n+1}|+|a_{n+2}|+\dots+|a_{n+p}|<\varepsilon$$

צ"ל: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ - טור מתכנס.

$$|a_{n+1}+a_{n+2}+\dots+a_{n+p}| \underset{\text{אי שוויון המשולש}}{\le} |a_{n+1}|+|a_{n+2}|+\dots+|a_{n+p}| \underset{\text{לפי טענה הקודמת}}{<} \varepsilon$$

סה"כ קיבלנו, שהטור הכללי מקיים את הגדרת ההתכנסות של קושי

$\Leftarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס!

① קבע התכנסות - בהחלט, בתנאי או התבדרות:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$$

נסתכל על טור הערכים המוחלטים:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^n}{n^2} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

$\Leftarrow$ טור p ; $p=2$; מתכנס

סה"כ: טור הערכים המוחלטים מתכנס $\Leftarrow$ הטור המקורי מתכנס בהחלט

②

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

נסתכל על טור הערכים המוחלטים:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^{n+1}}{n} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \Leftarrow \text{טור מתבדר}$$

בינתיים קיבלנו שטור הערכים המוחלטים מתבדר.

נסתכל על הטור המקורי:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln 2$$

$\Leftarrow$ הטור הנ"ל מתכנס.

$\Leftarrow$ סה"כ: לפי הגדרה, הטור המקורי מתכנס בתנאי.

③

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos n}{n \cdot \ln^2 n}$$

נסתכל על טור הערכים המוחלטים:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left| \frac{\cos n}{n \cdot \ln^2 n} \right| \underset{|\cos n| \le 1}{\le} \sum_{n=2}^{\infty} \left| \frac{1}{n \cdot \ln^2 n} \right| <$$

מבחן ההשוואה הגבולי:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n\cdot \ln^2 n}}{\frac{1}{n}} = \lim \frac{1}{\ln^2 n} = 0$$

לא עוזר כאשר $\lim = 0$

$\sum \frac{1}{n^{\alpha} \ln^{\beta} n} \Leftarrow$ מבחן האינטגרל

$\Leftarrow$ נבדוק לפי מבחן האינטגרל:

נסתכל על $f(x)=\frac{1}{x \cdot \ln^2 x}$ בקטע $[2,\infty)$; $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\ln^2 n}$

תחום הגדרה: $x \neq 0 \wedge \ln x \neq 0 \Rightarrow x \neq 1$

$\Leftarrow$ הפונק' מוגדרת לכל $2 \le x < \infty$

חיובית: $f(x) = \frac{1}{x \ln x}$ חיובית לכל x בקטע $[2,\infty)$

לא עולה: $f(x+1) \le f(x)$

$$\frac{1}{(x+1)(\ln^2(x+1))} \le \frac{1}{x \cdot \ln^2 x}$$

$\Downarrow$

$$\int_{2}^{\infty} \frac{1}{x\ln^2 x}\,dx = \lim_{a\to\infty} \int_{2}^{a} \frac{1}{x\ln^2 x}\,dx = \lim_{a\to\infty} \int \frac{1}{t^2}\,dt =$$

הצבה:

$$\ln x = t$$
$$\frac{1}{x}\,dx = dt$$

$$\int t^{-2}\,dt = \frac{t^{-1}}{-1} = -\frac{1}{t} = -\frac{1}{\ln x}$$

$$\Rightarrow \lim \left(-\frac{1}{\ln x}\right)$$

(4)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n^2+5)+\cos(e^2\cdot n^3)}{n^8+5}$$

נסתכל על טור הערכים המוחלטים:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\sin(n^2+5)+\cos(e^2\cdot n^3)}{n^8+5} \right| \le \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^8+5} \le \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^8} = 2\cdot\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^8}$$

⇐ טור p, $p=8$, מתכנס.

⇐ טור הערכים המוחלטים מתכנס ⇐ הטור המקורי מתכנס בהחלט.

(5)

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+1}{n}$$

נסתכל על האיבר הכללי:

$$\lim_{n\to\infty} (-1)^n \cdot \underbrace{\frac{n+1}{n}}_{1} = \lim_{n\to\infty} (-1)^n \neq 0$$

⇐ הטור הנבדק הזה מתבדר.

(6)

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n}-(-1)^n}$$

נסתכל על טור הערכים המוחלטים:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left| \frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n}-(-1)^n} \right| = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n}-(-1)^n} \sim \ldots$$ ME WET

נפרק את הטור:

$$\frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n}-(-1)^n} = \frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n}-(-1)^n}\cdot\frac{\sqrt[3]{n}+(-1)^n}{\sqrt[3]{n}+(-1)^n} = \frac{(-1)^n[\sqrt[3]{n}+(-1)^n]}{\sqrt[3]{n^2}-1} =$$

$$= \frac{(-1)^n\cdot\sqrt[3]{n}}{\sqrt[3]{n^2}-1} + \frac{1}{\sqrt[3]{n^2}-1}$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n^2}-1} \ge \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{2/3}} \Rightarrow$$ טור p, $p=\frac{2}{3}$, מתבדר

$$\Downarrow$$

⇐ הטור גדול מהטור מתבדר ⇐ הטור מתבדר.

נסתכל על:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot \sqrt[3]{n}}{\sqrt[3]{n^2}-1}$$

נבדוק קיום תנאי של לייבניץ:

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{(-1)^n \cdot \sqrt[3]{n}}{\sqrt[3]{n^2}-1} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{n}}{\sqrt[3]{n^2}-1} \to 0$$

האם האיבר הכללי שואף לאפס

(степень "сверху" больше, чем степень "снизу" ⇒ выражение → 0)

$$f(x) = \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^2}-1} = \frac{x^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}-1}$$

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{3}\cdot x^{-\frac{2}{3}}\left(x^{\frac{2}{3}}-1\right) - x^{\frac{1}{3}}\cdot\frac{2}{3}\cdot x^{-\frac{1}{3}}}{\left(x^{\frac{2}{3}}-1\right)^2} = \frac{\frac{1}{3} - \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} - \frac{2}{3}}{\left(x^{\frac{2}{3}}-1\right)^2} = \frac{-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} - \frac{1}{3}}{\left(x^{\frac{2}{3}}-1\right)^2} < 0$$

⇐ טור מתכנס עפ"י לייבניץ.

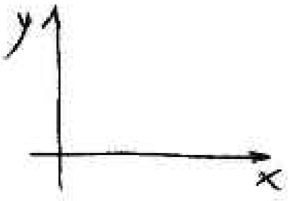
⇐ סה"כ:

פונקציות בכמה משתנים.

עמ' 133-135 – מושגים שקשורים לצורות מרחביות – להכיר.

פרק 10 – קריאה עצמית של מושגים.

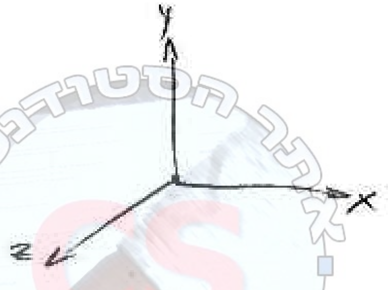
ε סביבה של נק' $M_0 = (x_1^0, x_2^0, x_3^0, \dots, x_k^0)$



פונק' במשתנה יחיד: $y = f(x)$

פונק' בשני משתנים: $z = f(x,y)$,

מתוארת ב-R^3:



פונקציה ב-n משתנים מתוארת ב-R^{n+1}

ε-סביבה קרויה של M_0 — כדור פתוח בעל רדיוס ε שמרכזו בנק' M_0

כלומר כל הנק' $M = (x_1, x_2, \dots, x_k)$ המקיימות: $d(M, M_0) = \sqrt{\sum_{i=1}^{k} (x_i - x_i^0)^2} < \varepsilon$

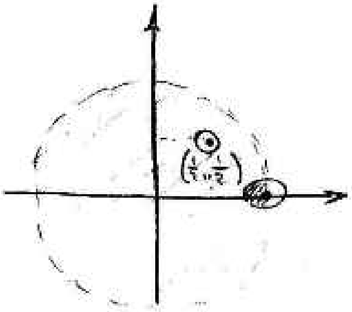
נק' פנימית, קבוצה פתוחה

הנק' M_0 היא נקודה **פנימית** של קבוצה $\{M\}$ אם קיימת ε-סביבה של M_0, שנמצאת כולה ב-$\{M\}$.

קבוצה $\{M\}$ שכל נקודותיה הן נקודות פנימיות נקראת **קבוצה פתוחה**.

מעגל שמרכזו ב (a,b) ורדיוס R. $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$

<u>דוגמא:</u>



נסתכל על הקבוצה: $x^2+y^2<1$

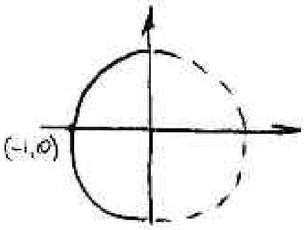
נק' בתוך מעגל שמרכזו בראשית, רדיוס 1, לא כולל נק' שפה

נק' פנימית - $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$

נק' גבולית - $(1,0)$

הנק' M היא נק' **גבולית** של קבוצה $\{M\}$ אם לכל ε-סביבה של נקודה M יש נקודות השייכות לקבוצה $\{M\}$ וגם נק' שאינן בקבוצה.

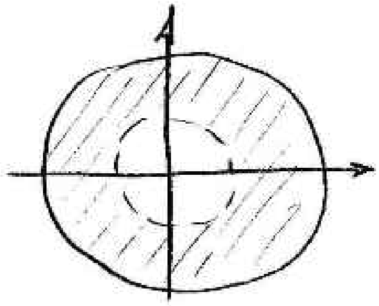
<u>הגדרה:</u> אם לקבוצה פתוחה נוסיף את כל הנקודות הגבוליות שלה - נקבל קבוצה סגורה.



לא קב' פתוחה
ולא קב' סגורה

$1<x^2+y^2\le 4$

לא פתוחה ולא סגורה



$1\le x^2+y^2\le 4$

- קבוצה סגורה

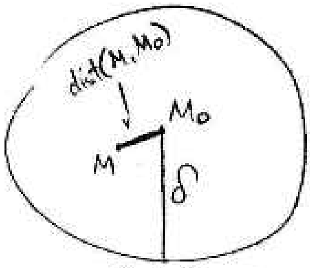
קבוצה D תקרא קבוצה קשירה אם ניתן לחבר כל שתי נק' בקבוצה ע"י קו רציף, שנמצא כולו בתוך הקבוצה.

לא קשירה

קבוצה קשירה וגם פתוחה נקראת תחום

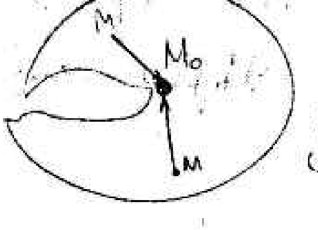
פונקציות במספר משתנים:
גבולות ורציפות

הגדרה: תהי $u=f(M)$ מוגדרת בסביבת הנק' $M_0=(x_1^0,x_2^0,\dots,x_n^0)$, פרט אולי לנק' עצמה. נאמר שהמספר L הוא גבול של הפונקציה $f(M)$ כאשר $M\to M_0$, אם לכל $\varepsilon>0$ קיים $\delta>0$ כך שלכל נק' M המקיימת $0<d(M,M_0)<\delta$ מתקיים $|f(M)-L|<\varepsilon$.
יש לציין שהגבול L אינו תלוי במסלול שדרכו הנק' M שואפת לנק' M_0, מספיק רק נקבל ל-δ סביבה M_0.



הגדרה: (עפ"י היינה): L הוא הגבול של הפונק' $u=f(M)$ כאשר $M\to M_0$, אם לכל סדרת נקודות $\{P_n\}$ המתכנסת ל-M_0 ! $P_n\neq M_0$ שבה הפונקציה מוגדרת סדרת המספרים $f(P_1),f(P_2),\dots,f(P_n),\dots$ מתכנסת ל-L.

הערה: אם קיים גבול ל-$f(M)$ אזי הגבול הוא יחיד ואינו תלוי במסלול שדרכו הנק' M מתקרבת ל-M_0.



הערה 2: אם לפונקציה $f(M)$ מתקבלים גבולות שונים כתוצאה ממסלולים שונים של התקרבות לנק' M_0, אזי אין ל-$f(M)$ גבול כאשר $M\to M_0$.

(1) נתונה הפונק' $f(x,y)=\dfrac{x^3+y^2-xy}{x^2+2y^2}$

נבדוק קיום גבול בסביבת $(0,0)$

נבדוק את הגבול דרך קו כללי שעובר בנק' $(0,0)$ $\Leftarrow$ $y=kx$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^3+y^2-xy}{x^2+2y^2}=\lim_{\substack{y=kx\\(x,y)\to(0,0)}}\frac{x^3+y^2-xy}{x^2+2y^2}=\lim_{x\to0}\frac{x^3+k^2x^2-x^2k}{x^2+2k^2x^2}=$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{x^2(\overset{0}{x}+k^2-k)}{x^2(1+2k^2)}=\frac{k^2-k}{1+2k^2}$$

אם קיבלנו תשובה שתלויה ב-k $\Leftarrow$ אין גבול לפונק' בנק' $(0,0)$

[אם $y=x$ $(k=1)$ $\Leftarrow$ $L=\frac{0}{3}=0$; אם $y=2x$ $(k=2)$ $\Leftarrow$ $L=\frac{2}{9}$]

2) בדוק קיום גבול של הפונק'

$$f(x,y)=\frac{xy^2}{x^2+y^4}$$

נבדוק את הגבול דרך קו ישר כללי שעובר ב $(0,0)$ ⇐ $y=kx$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy^2}{x^2+y^4}=\lim_{\substack{y=kx\\(x,y)\to(0,0)}}\frac{xy^2}{x^2+y^4}=\lim_{x\to 0}\frac{k^2x^3}{x^2+x^4k^4}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{k^2x}{1+k^4x^2}=0$$

נבדוק את הגבול דרך מסלול מהצורה $y=kx^2$ ⇐ משפחה של פרבולות שעוברות ב-$(0,0)$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy^2}{x^2+y^4}=\lim_{\substack{y=kx^2\\(x,y)\to(0,0)}}\frac{k^2x^5}{x^2+k^4x^8}=\lim_{x\to 0}\frac{k^2x^3}{1+k^4x^6}=0$$

מסלול מהצורה: $x=y^2$:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy^2}{x^2+y^4}=\lim_{\substack{x=y^2\\(x,y)\to(0,0)}}\frac{y^4}{y^4+y^4}=\frac{1}{2}$$

שני מסלולים שונים נותנים ערכים שונים ⇐ אין גבול!

ספר: עמוד 151 ← משפט 1 - חוקי גבולות.

3)

$$\lim_{(x,y)\to(1,2)}\frac{x^2+y^2}{3x+4y-xy}=\frac{5}{3+8-2}=\frac{5}{9}$$

הפונ' אינה בעייתית ← מציבים ערכים

טכניקה לחישוב גבול:

משפט הסנדוויץ': אם $h(M)\le f(M)\le g(M)$ ומקיים: $\lim_{M\to M_0}(h(M))=\lim_{M\to M_0}(g(M))=L$ ⇐ אזי $\lim_{M\to M_0}f(M)=L$.

שימוש בגבולות ידועים:

$$\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}=1$$

$$\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^t=e$$

4) חשב:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2y}{x^2+y^4}$$

בדיקת מסלולים:

$y=kx$:

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\y=kx}}\frac{x^2y}{x^2+y^4}=\lim_{x\to 0}\frac{kx^3}{x^2+k^4x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{kx}{1+k^4x^2}=0$$

פרבולה $y=kx^2$:

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\y=kx^2}}\frac{kx^4}{x^2+k^4x^8}=\lim_{x\to 0}\frac{kx^2}{1+k^4x^6}=0$$

⇓

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x=ky^2}} \frac{x^2y}{x^2+y^4} = \lim_{y\to 0} \frac{ky^5}{k^2y^4+y^4} = \lim_{y\to 0}\frac{ky}{k^2+1} = 0 \qquad ;\ x=ky^2$$

נוכיח כי קיים גבול והוא: 0 :

$$0 \le \left| \frac{x^2y}{x^2+y^4} \right| \le \left| \frac{x^2y}{x^2} \right| = |y| \xrightarrow[y\to 0]{} 0$$

הקטנו מכנה ⇐ הגדלנו שבר

$$\Downarrow$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^2+y^4} = 0$$

(2) הוכח שהגבול קיים – ומצא את הגבול:

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{x^3+y^3+z^3}{x^2+y^2+z^2}$$

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{x^3+y^3+z^3}{x^2+y^2+z^2} = \lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \left(\frac{x^3}{x^2+y^2+z^2} + \frac{y^3}{x^2+y^2+z^2} + \frac{z^3}{x^2+y^2+z^2} \right) =$$

$$\begin{cases} 0 \le \left| \dfrac{x^3}{x^2+y^2+z^2} \right| \le \left| \dfrac{x^3}{x^2} \right| = |x| \xrightarrow[x\to 0]{} 0 \\[2ex] 0 \le \left| \dfrac{y^3}{x^2+y^2+z^2} \right| \le \left| \dfrac{y^3}{y^2} \right| = |y| \xrightarrow[y\to 0]{} 0 \\[2ex] 0 \le \left| \dfrac{z^3}{x^2+y^2+z^2} \right| \le \left| \dfrac{z^3}{z^2} \right| = |z| \xrightarrow[z\to 0]{} 0 \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$0 \le \left| \frac{x^3+y^3+z^3}{x^2+y^2+z^2} \right| \le 0$$

$$\Leftarrow \quad \lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{x^3+y^3+z^3}{x^2+y^2+z^2} = 0$$

(6) חשב את הגבול (אם קיים):

$$\lim_{(x,y)\to(1,0)} \left(y \cdot \sin\frac{1}{x-1} \right)$$

$$0 \xleftarrow{y\to 0} -y \le \left| y \cdot \sin\frac{1}{x-1} \right| \le y \xrightarrow{y\to 0} 0$$

$$-1 \le \sin\frac{1}{x-1} \qquad 1 \ge \sin\frac{1}{x-1}$$

⇐ לפי משפט הסנדוויץ':

$$\lim_{(x,y)\to(1,0)} \left(y \cdot \sin\frac{1}{x-1} \right) = 0$$

⑦ חשב את הגבול (במקרה שקיים)

$$L = \lim_{(x,y,z)\to(0,1,2)} \frac{\sin[x(y^2+z^2)]}{xy^2} \quad / \times \quad \frac{x(y^2+z^2)}{x(y^2+z^2)}$$

$$= \lim_{(x,y,z)\to(0,1,2)} \frac{\sin[x(y^2+z^2)]}{x(y^2+z^2)} \cdot \lim_{(x,y,z)\to(0,1,2)} \frac{\cancel{x}(y^2+z^2)}{\cancel{x}y^2} = 1\cdot 5 = 5$$

$$\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t} = 1 \qquad\qquad \lim \frac{1+4}{1} = 5$$

הגדרה: תהי $u=f(M)=f(x_1,x_2,\dots,x_k)$ מוגדרת בתחום D.

הפונק' $u=f(M)$ היא רציפה בנק' $M_0\in D$

אם $\lim\limits_{M\to M_0} f(M) = f(M_0)$

⑧ לאיזה ערך של A הפונק' הבאה רציפה בנק' $(0,0,0)$?

$$f(x,y,z)=\begin{cases}\dfrac{x^3+y^3+z^3}{x^2+y^2+z^2} & (x,y,z)\neq(0,0,0)\\ A & (x,y,z)=(0,0,0)\end{cases}$$

$$L=\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)}\frac{x^3+y^3+z^3}{x^2+y^2+z^2}=0$$ ⇐ לפי תרגיל קודם — הוכחנו

⇐ $A=0$

⑨ האם הפונק' הנ"ל רציפה ב- R^2 ?

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2} & (x,y)\to(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}=1$$

$$f(0,0)\neq\lim_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y) \Rightarrow$$ הפונק' אינה רציפה.

כדי שהפונק' תהיה רציפה נגדיר מחדש: $f(0,0)=1$

ספר: עמוד 162: סעיף 2 ← תכונות של פונק' רציפות

משפטים: 3-6 (ללא הוכחה)

10.04.05

הרצאה VIII

נגזרות חלקיות דיפרנציאביליות

כלל השרשרת

הגדרה: תהי $f(x,y)$ פונק' של 2 משתנים ותהי (x_0,y_0) נק' בתחום ההגדרה של f. אזי הנגזרת החלקית של f ביחס למשתנה x בנק' (x_0,y_0) מוגדרת

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = f'_x(x_0,y_0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h,y_0)-f(x_0,y_0)}{h}$$

בדומה: באותו אופן נגדיר נגזרת חלקית של f ביחס למשתנה y בנק' (x_0,y_0):

$$(x_0,y_0) = f'_y(x_0,y_0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0,y_0+h)-f(x_0,y_0)}{h}$$

* באותו אופן ניתן להגדיר נגזרת לפי כ"א מהמשתנים עבור פונק' ב-n משתנים: $f(x_1,x_2,\dots,x_n)$

1) גזור כ"א מהפונק' הבאות לפי כ"א מהמשתנים:

$$,z) = x^2+2xy+\frac{y}{z}$$

$$= 2x+2y+0$$

$$= 2x+\frac{1}{z}$$

$$= y\cdot\left(\frac{-1}{z^2}\right)$$

2)

$$y,z) = x\cdot e^{yz}+\ln(xyz)$$

חשב נגזרות חלקיות בנק' $(e,1,1)$

$$= 1\cdot e^{yz}+\frac{yz}{xyz} = e^{yz}+\frac{1}{x} \qquad \frac{\partial f}{\partial x}(e,1,1) = e^1+\frac{1}{e} =$$

(3) חשב נגזרות חלקיות של:

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^3}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

נפריד את התרגיל לשני סוגים של נק':

עבור נק' $(x,y)\neq(0,0)$:

$$\frac{Df}{Dx}=f'_x=\frac{3x^2(x^2+y^2)-x^3\cdot 2x}{(x^2+y^2)^2}=\frac{x^4+3x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{Df}{Dy}=f'_y=\frac{0-x^3(0+2y)}{(x^2+y^2)^2}=\frac{-2yx^3}{(x^2+y^2)^2}$$

עבור הנק' $(x,y)=(0,0)$:

יש לחשב נגזרות לפי הגדרה:

$$f'_x(0,0)=\lim_{h\to0}\frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{\frac{h^3}{h^2+0^2}-0}{h}=$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{h}{h}=1$$

$$f'_y(0,0)=\lim_{h\to0}\frac{f(0,0+h)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{f(0,h)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{0-0}{h}=0$$

עבור פונק' במספר משתנים:

* פונק' יכולה להיות לא רציפה בנק' (x_0,y_0) אבל היא $\exists$ גזירה חלקית באותה הנקודה.
* מהעובדה שלפונקציה קיימות נגזרות חלקיות אין לנו נובעת (בד"כ) רציפות הפונקציה במספר משתנים באותה נקודה.

לשים ♡ שזה בשונה מפונק' במשתנה יחיד – שם פונק' גזירה היא בהכרח רציפה.

(4) נק' 170 ; דוגמא 3:

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

$$f'_x(0,0)=\lim_{h\to0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{\frac{h\cdot0}{h^2+0^2}-0}{h}=0$$

$$f'_y(0,0)=\lim_{h\to0}\frac{f(0,h)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{\frac{0\cdot h}{0^2+h^2}-0}{h}=0$$

דוגמא לפונק' גזירה לפי x ב-(0,0) ולפי y ב-(0,0)! (3.)(בדוק)

אבל לא רציפה ב-(0,0)

נגזרת מורכבת – כלל שרשרת

אם $z=f(x,y)$ פונק' בשני משתנים, בעלת נגזרות חלקיות רציפות

המקיימות: $\frac{\partial f}{\partial x}(-3,6)=2$; $\frac{\partial f}{\partial y}(-3,6)=1$

$-3=s^2-t^2$ $\quad x=-3$

$6=3s^2t$ $\quad y=6$

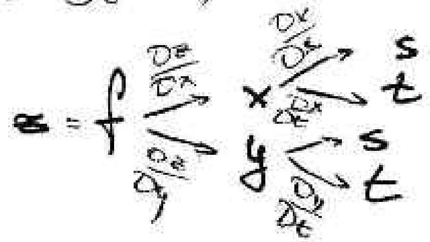
$\Downarrow$

$s=1,\ t=2$

נתון: $x=s^2-t^2$

$y=3s^2t$

חשב פונק' את $\frac{\partial z}{\partial t}(1,2)$; $\frac{\partial z}{\partial s}(1,2)$ $(s,t)=(1,2)$



$$\frac{\partial z}{\partial s}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial s}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial s}=$$

$$=2\cdot 2s+1\cdot 6st\underset{s=1,t=2}{=}4+12=16$$

$$\frac{\partial z}{\partial t}=\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial t}=$$

$$=2\cdot(-2t)+1\cdot 3s^2\underset{s=1,t=2}{=}-8+3=-5$$

2 נתון:

$W=\sin x+F(\sin y-\sin x)$

חשב את ערך הביטוי: $\cos x\cdot\frac{\partial w}{\partial y}+\cos y\,\frac{\partial w}{\partial x}-\cos x\cos y$

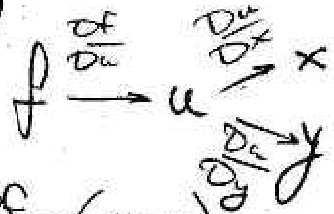
$\Leftarrow$ $w=\sin x+f(u)$

כאשר $u=\sin y-\sin x$

$f(x,y,z)$ – פונק' ב-3 משתנים

$f(x^2+y^2+z^2)$ – פונק' משתנה יחיד

$f(u)=g(x^2+y^2+z^2)$ כאשר



$$\frac{\partial w}{\partial x}=\cos x+\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}=\cos x+\frac{\partial f}{\partial u}\cdot(-\cos x)$$

$$\frac{\partial w}{\partial y}=0+\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\cos y$$

דיפרנציאביליות
גרדיאנט + נגזרת מכוונת

דיפרנציאביליות

עבור הפונק' $z=f(x,y)$ נגדיר תוספת כללית של הפונק' בנק' $M_0=(x_0,y_0)$ (כאשר Δx יסמן תוספת ל-x; Δy יסמן תוספת ל-y):

$$\Delta z = f(x_0+\Delta x,\ y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0)$$

הגדרה: הפונק' $z=f(x,y)$ תקרא דיפרנציאבילית בנק' (x_0,y_0) אם

$$\Delta z = A\cdot\Delta x + B\cdot\Delta y + \underbrace{\alpha(\Delta x,\Delta y)\cdot\Delta x}_{} + \underbrace{\beta(\Delta x,\Delta y)\cdot\Delta y}_{}$$

פונק' במשתנים $\Delta x, \Delta y$

כאשר A ו-B הם מספרים קבועים ו-

$$\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} \alpha(\Delta x,\Delta y)=0 \quad ו- \quad \lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} \beta(\Delta x,\Delta y)=0$$

הגדרה שקולה: הפונק' $z=f(x,y)$ דיפרנציאבילית בנק' (x_0,y_0)... אם ניתן להציג את Δz כך:

$$\Delta z = A\cdot\Delta x + B\cdot\Delta y + \varepsilon\rho$$

כאשר A ו-B מספרים קבועים ו- $\lim_{\rho=0}\varepsilon=0$;

$$\rho=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2} \quad ; \quad \varepsilon=\varepsilon(\Delta x,\Delta y)$$

תנאי הכרחי לדיפרנציאביליות

משפט 1: אם $z=f(x,y)$ דיפרנציאבילית בנק' $M_0(x_0,y_0)$, אזי קיימות הנגזרות החלקיות:

$$f'_y(x_0,y_0)=B \quad ; \quad f'_x(x_0,y_0)=A$$

הקשר בין דיפרנציאביליות ורציפות

משפט 2:

(*) אם $z=f(x,y)$ דיפרנציאבילית בנק' $M_0=(x_0,y_0)$ – אזי היא רציפה באותה הנקודה.

הערה: הכיוון ההפוך של המשפט אינו נכון !!!

$\Downarrow$

הערה: אם פונק' לא רציפה בנק' אזי היא לא דיפרנציאבילית באותה הנקודה

⟵ דיפרנציאביליות היא תכונה יותר "חזקה" מרציפות.

① בדוק דיפרנציאביליות של הפונק':

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

א) נבדוק רציפות ב-$(0,0)$:

$y=x$:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy}{x^2+y^2}=\lim_{x\to0}\frac{x^2}{2x^2}=\frac{1}{2}$$

גבול $\neq$ ערך הפונק' בנקודה $\Leftarrow$ הפונק' לא רציפה ב-$(0,0)$

תנאי מספיק לדיפרנציאביליות

משפט 3: אם הפונק' $z=f(x,y)$ מוגדרת בנק' $M_0(x_0,y_0)$, ויש לה נגזרות חלקיות $f'_x(x_0,y_0)$, $f'_y(x_0,y_0)$ רציפות בסביבת אותה הנקודה $\Leftarrow$ אזי היא דיפרנציאבילית ב-M_0

הערה: רציפות הנגזרות החלקיות הוא תנאי מספיק לדיפרנציאביליות. לשים ♡ שהמשמעות היא: שאם שהנגזרות החלקיות אינן רציפות ב-(x_0,y_0), אבל למרות זאת הפונק' תהיה דיפרנציאבילית

נגזרת מכוונת

המשמעות הגאומטרית של נגזרת מכוונת היא בדיקת קצב שינוי הפונק' בכיוון הנתון.

הגדרה: יהי $\vec{u}=\alpha i+\beta j$ וקטור יחידה (כלומר וקטור באורך 1, $\sqrt{\alpha^2+\beta^2}=1$). אזי נגזרת המכוונת של הפונק' $z=f(x,y)$ בנק' (x_0,y_0) בכיוון הוקטור $\vec{u}$ מוגדרת להיות הגבול הבא (אם הוא קיים במובן הצר):

$$\frac{Df}{D\vec{u}}(x_0,y_0)=\lim_{h\to0^+}\frac{f(x_0+\alpha h,y_0+\beta h)-f(x_0,y_0)}{h}$$

עם כיוון הוקטור

לחישוב נגזרת מכוונת ניתן להשתמש במשפט הבא:

משפט: אם $z=f(x,y)$ דיפרנציאבילית בסביבת הנק' $M_0(x_0,y_0)$ ← אזי קיימת נגזרת מכוונת בנק' (x_0,y_0) בכיוון וקטור יחידה $\vec{u}=\alpha i+\beta j$ $\left(|u|=\sqrt{\alpha^2+\beta^2}=1\right)$ והיא מוגדרת לפי הנוסחה:

$$\frac{Df}{D\vec{u}}_{(x_0,y_0)}=\underbrace{f'_x(x_0,y_0)}_{\text{ערך של הנגזרת לפי x בנק' }(x_0,y_0)}\cdot\alpha+f'_y(x_0,y_0)\cdot\beta$$

α – הרכיב הראשון של הוקטור המנורמל $\vec{u}$

ג) חשב נגזרת מכוונת של הפונק':

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^2}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0; & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

בכיוון וקטור יחידה כללי $\vec{u}=\alpha i+\beta j$ $\left(\sqrt{\alpha^2+\beta^2}=1=|u|\right)$ בנקודה $(0,0)$.

פתרון:

$$\frac{Df}{D\vec{u}}_{(0,0)}=\lim_{h\to0^+}\frac{\overbrace{f(0+\alpha h,0+\beta h)}^{f(\alpha h,\beta h)}-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to0^+}\frac{\frac{(\alpha h)^2\cdot\beta h}{(\alpha h)^4+(\beta h)^2}-0}{h}=$$

$$=\lim_{h\to0^+}\frac{\frac{h^3\alpha^2\beta}{h^2[\alpha^4h^2+\beta^2]}}{h}=\lim_{h\to0^+}\frac{h^3\alpha^2\beta}{h^3[\alpha^4h^2+\beta^2]}=\lim_{h\to0^+}\frac{\alpha^2\beta}{\alpha^4h^2+\beta^2}=\begin{cases}0\\ \frac{\alpha^2}{\beta}\end{cases}\ (*)$$

נבדוק את חישוב של הגבול לפי הערכים האפשריים של β:

a) $\beta=0 \Rightarrow \frac{0}{\alpha^4h^2+0}=0$

b) $\beta\neq0 \Rightarrow \lim_{h\to0^+}\frac{\alpha^2\beta}{\alpha^4\underbrace{h^2}_{0}+\beta^2}=\lim\frac{\alpha^2\beta}{\beta^2}=\lim\frac{\alpha^2}{\beta}$

עבור זאת בנק' (M3) נגזרת מכוונת בכיוון וקטור $\vec{u}=3i+4j$

$\|\vec{u}\|=\sqrt{9+16}=5$

מנורמל $\hat{u}=\frac{3}{5}i+\frac{4}{5}j \Longrightarrow \alpha=\frac{3}{5}\ ;\ \beta=\frac{4}{5}$

לפי שורה ה-(*) בתשובה הקודמת:

$$\frac{Df}{D\vec{u}}=\frac{\left(\frac{3}{5}\right)^2}{\frac{4}{5}}=\frac{9}{25}\cdot\frac{5}{4}=\frac{9}{20}$$

8.05.05

הרצאה XI

נוסחת טיילור

אקסטרמום: אקסטרמום מקומי

אקסטרמום מוחלט.

נוסחת טיילור

עבור פונק' $f(x,y)$

אם $f(x,y)$ פונק' ש"כ למחלקה C^{n+1},

המוגדרת בסביבת הנק' $M_0(x_0,y_0)$

$$f(x,y) = f(x_0,y_0) + \frac{1}{1!}\left[f'_{x(x_0,y_0)}(x-x_0) + f'_{y(x_0,y_0)}(y-y_0)\right] +$$
$$+ \frac{1}{2!}\left[f''_{xx(x_0,y_0)}(x-x_0)^2 + 2f''_{xy}(x-x_0)(y-y_0) + f''_{yy(x_0,y_0)}(y-y_0)^2\right] +$$
$$+ \frac{1}{3!}\left[f'''_{xxx(x_0,y_0)}(x-x_0)^3 + 3f'''_{xxy}(x-x_0)^2(y-y_0) + 3f'''_{xyy}(y-y_0)^2(x-x_0) + f'''_{yyy(x_0,y_0)}(y-y_0)^3\right] + R_n$$

$f'''_{xxy} = f'''_{xyx} = f'''_{yxx}$ $\qquad$ $f'''_{yyx} = f'''_{yxy} = f'''_{xyy}$

$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

(1) חשבו פיתוח טור טיילור עבור $f(x,y) = x^3+y^3+2x^2-4y^2+x-1$

עד סדר $n=3$, ללא איבר שארית, בסביבת הנק' $(1,2)$

$f(1,2) = 1+8+2-16+1-1 = -5$

$f'_x = 3x^2+4x+1 \xrightarrow{(1,2)} 8 = f'_x(1,2)$

$f'_y = 3y^2-8y \xrightarrow{(1,2)} f'_y(1,2) = -4$

$f''_{xx} = 6x+4 \xrightarrow{(1,2)} 10$

$f''_{yy} = 6y-8 \longrightarrow 4$

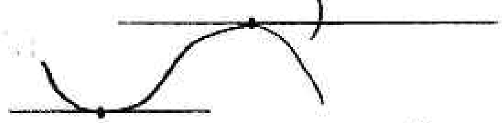
$f''_{xy} = f''_{yx} = 0$

$f'''_{xxx} = 6$; $f'''_{xxy} = f'''_{xyx} = f'''_{yxx} = 0$, $f'''_{yyx} = \dots = 0$; $f'''_{yyy} = 6$

$$f(x,y)=5+[8(x-1)-4(y-8)]+\frac{1}{2!}[10(x-1)^2+4(y-2)^2]+\frac{1}{3!}[6(x-1)^3+6(y-8)^3]$$

אקסטרמום מקומי (תנאי הכרחי לקיומו):

פונק' במשתנה יחיד:



א) נק' קריטיות (נק' חשודות כקיצון):

נקודות שמאפסות נגזרת + נק' שהנגזרת אינה מוגדרת

ב) מיון נק' קריטיות:

שיטת נגזרת שניה:

$f''(x_0)>0 \Rightarrow$ x_0 נק' min

$f''(x_0)=0 \Rightarrow$ לא ניתן לדעת

$f''(x_0)<0 \Rightarrow$ x_0 נק' max

איך מוצאים נקודת קיצון מקומי:

א) נק' קריטיות (נק' חשודות כקיצון)

גוזרים פונק' לפי כ"א מהמשתנים

משווים נגזרות חלקיות ל-0 ופותרים

+

נק' שבהן הנגזרת לא מוגדרת

ב) מיון נק' קריטיות:

בונים מטריצה של נגזרות מסדר שני, ובודקים האם זו תבנית מוגדרת חיובית או שלילית

$$f(x,y):\quad \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix} \qquad\qquad f(x,y,z):\quad \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} & f_{xz} \\ f_{yx} & f_{yy} & f_{yz} \\ f_{zx} & f_{zy} & f_{zz} \end{vmatrix}$$

אם כל המינורים הראשיים בנק' שחישבנו - הם חיוביים $\Leftarrow$ הנקודה הזו נקודת מינימום מקומי.

דוגמא: $f(x,y)$: המינורים הראשיים: $f''_{xx}>0$, $\begin{vmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy} \end{vmatrix}>0$

אם מטריצת ההסיאן מוגדרת שלילית בנקודה [illegible]
אזי הנקודה היא נק' max מקומי.

תנאים:

$$\begin{vmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy} \end{vmatrix} > 0 \quad ; \quad f''_{xx} < 0$$

אם מטריצה אחרת – לא ניתן לומר דבר על הנק'
הקודם / הקריטית ;

אם $\begin{vmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy} \end{vmatrix} < 0$ – נק' אוכף [illegible]
(נק' שהיא [illegible] [illegible])

הגדרה: תהי $u=f(x_1,x_2,\dots,x_n)$ אז נקודת מקסימום מקומי
ממנה M_0, אם קיימת סביבה של M_0 [illegible] $f(M)\le f(M_0)$
כך שלכל נק' M בסביבה זו מתקיים $f(M)<f(M_0)$

משפט: (תנאי הכרחי לקיום אקסטרמום)
אם לפונ' $u=f(x_1,x_2,\dots,x_n)$ יש אקסטרמום מקומי בנק' M_0,
וקיימות לה נגזרות חלקיות מסדר ראשון בנק' M_0, אזי
כל הנגזרות החלקיות שוות ל-0
הערה: (לא תנאי מספיק) [illegible]

לא כל נקודה שבה הנגזרות החלקיות שוות ל-0 היא נק' אקסטרמום!
כלומר [illegible], שאם כל הנגזרות החלקיות שוות ל-0
אז [illegible] נק' קריטית.
דוגמה:

$f(x,y)=xy$

$f'_x=y=0$; $f'_y=x=0$ – הנגזרות החלקיות מתאפסות ב-$(0,0)$
אבל בסביבה ε של $(0,0)$ יש נקודות בהן [illegible]
$f(x,y)>0$ [illegible] $f(0,0)=0$

הגדרה: הנק' M_0 תקרא נק' קריטית (חשודה בקיצון) בה אקסטרמום לוקלי.

מציאת נק' קריטיות

(*) נקודות בהן נגזרות מסדר ראשון מתאפסות

או

(*) נק' בהן הנגזרות מסדר ראשון לא קיימות (לא מוגדרות בנק')

משפט:

תהי M_0 נק' קריטית לפונק' $u=f(x_1,x_2,\dots,x_n)$,

ונניח ש- $u=f(M)$ שייכת למחלקה C^2,

אזי התבנית הריבועית $d^2u(M_0)$ [נבדוק מינורים ראשיים במטריצת הסיאן]

א) אם התבנית הריבועית חיובית ב-M_0 $\Leftarrow$ נק' min מקומי.

ב) אם התבנית הריבועית שלילית ב-M_0 $\Leftarrow$ נק' max מקומי.

(3) מצא נק' קיצון מקומי של: $f(x,y)=x^2-xy+y^2$

נמצא נק' קריטיות:

א) נק' שמאפסות נגזרות חלקיות:

$$\left.\begin{array}{l} f'_x=2x-y=0 \\ f'_y=-x+2y=0 \end{array}\right\} \quad (0,0)$$

ב) נק' שבהן הנגזרת לא מוגדרת: אין

מיון: בניית הסיאן:

$$\begin{vmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 3>0$$

$$f''_{xx}=2>0$$

$$\Downarrow$$

בנק' $(0,0)$ יש מינימום מקומי.

4

$$f(x,y,z) = 3x + 2y - z - x^2 - 3y^2 - z^2$$

א מציאת נק' קיצון

$$\left.\begin{array}{l} f'_x = 3 - 2x = 0 \\ f'_y = 2 - 6y = 0 \\ f'_z = -1 - 2z = 0 \end{array}\right\}$$

הנק' היא הפתרון למערכת: $\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{2}\right)$

ב מיון

$$\begin{vmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = -24 < 0$$

$$f_{xx} = -2$$

מינור מסדר $|2\times 2| = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -6 \end{vmatrix} = 12 > 0$

מינור מסדר $|3\times 3| = \begin{vmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = -24 < 0$

$\Leftarrow$ מוגדרת שלילית $\Leftarrow$ נק' Max מקומי!

15.05.05

הרצאה XIV

מציאת נקודות אקסטרמום של פונקציה

א. בתחום חסום וסגור

שיטת הצבה ; שיטת כופלי לגרנג'

ב. באילוץ

מציאת אקסטרמום מוחלט (בתחום חסום וסגור / גלובלי)

נתונה פונק' $f(x,y)$ ותחום חסום וסגור D.
מחפשים את הערך המקסימלי והערך המינימלי,
ש-$f(x,y)$ מקבלת בכל תחום D.

על פי משפט ווירשטראס, פונק' רציפה בתחום חסום וסגור D
מקבלת גם ערך מינימלי וגם ערך מקסימלי בתחום,
והוא יכול להתקבל בנקודות פנימיות של התחום, בנקודות על שפת התחום,
נק' חוד (נק' מפגש של שפות)

איך מוצאים נק' קיצון מוחלט:

(א) מוצאים נק' קריטיות פנימיות:
גוזרים את הפונק', משווים נגזרות חלקיות ל-0
+ נק' שבהן הנגזרת לא מוגדרת.
* לשים ♡, שאנחנו מתייחסים רק לנק' בתחום D.

(ב) מציאת נק' קריטיות על השפות:
עבור כל שפה יש למצוא נק' קריטיות בנפרד.
שיטת הצבה: מבודדים את אחד מהמשתנים, מציבים בפונק' הראשית,
מקבלים פונק' במשתנה יחיד, גוזרים, משווים נגזרת ל-0
ומוצאים נקודה חשודה על השפה.

*
שיטת כופלי לגרנג':

(ג) נק' חוד:
!!

(ד) לוקחים את התשובות מסעיפים א ... +ג ומציבים בפונק' המקורית

— הערך הגבוה ביותר שהפונק' מקבלת בתחום $\bar{D}$ ← ערך מקסימלי בתחום $\bar{D}$

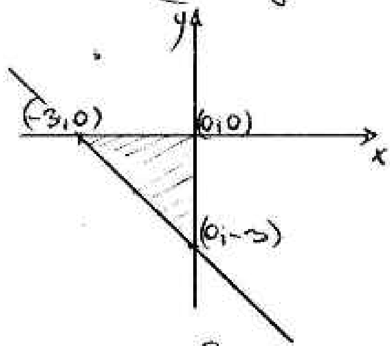
— הערך הנמוך ביותר שהפונק' מקבלת בתחום $\bar{D}$ ← ערך מינימלי בתחום $\bar{D}$

(1)

מצא ערך מקסימלי ומינימלי שהפונק' מקבלת בתחום $\bar{D}$ המוגדר ע"י: $f(x,y)=x^2+y^2-xy+x+y$

$$\bar{D}=\{(x,y) \mid x+y\ge -3;\ x\le 0;\ y\le 0\}$$

$y=-x-3$



א. נק' פנימיות: גוזרים נגזרות מסדר ראשון ומשווים ל-0.

$f'_x=2x-y+1=0 \Rightarrow 2x+1=y$

$f'_y=2y-x+1=0 \Rightarrow$

$2(2x+1)-x+1=0$

$4x+2-x+1=0$

$3x+3=0 \Rightarrow \boxed{x=-1}$

$-2+1=y \Rightarrow \boxed{y=-1} \Rightarrow (-1;-1)$

ב. נק' על השפה: על השפה $y=0$:

נציב את השפה בפונק' המקורית:

$f(x,y)=f(x,0)=x^2+x$

גוזרים ומשווים נגזרת ל-0:

$f'_x=2x+1 \Rightarrow x=-\frac{1}{2} \Rightarrow \left(-\frac{1}{2};0\right)$

על השפה $x=0$:

$f(x,y)=f(0,y)=y^2+y$

$f'_y=2y+1 \Rightarrow y=-\frac{1}{2} \Rightarrow \left(0,-\frac{1}{2}\right)$

על השפה $y=-3-x$:

$f(x,y)=f(x,-x-3)=x^2+(-x-3)^2+x(-x-3)+\cancel{x}-\cancel{x}-3=$

$=x^2+\cancel{x^2}+6x+9-\cancel{x^2}+3x-3=x^2+9x+6$

$f'=6x+9=0 \Rightarrow x=-1\frac{1}{2};\ y=-3+1\frac{1}{2}=-1\frac{1}{2} \Rightarrow \left(-\frac{3}{2};-\frac{3}{2}\right)$

ג) נקודות החוץ: $(0;0);\ (-3;0);\ (0;-3)$

נק' חשודה	$(-1;-1)$	$(0;-\frac{1}{2})$	$(-\frac{1}{2};0)$	$(-\frac{3}{2};-\frac{3}{2})$	$(0;0)$	$(0;-3)$	$(-3;0)$
ערך הפונק'	-1	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{3}{4}$	0	6	6

ערך מקסימלי: $f(x,y)=6$ – מקבלים בנק' $(-3;0)$ ו $(0;-3)$

ערך מינימלי: $f(x,y)=-1$ – מקבלים בנק' $(-1;-1)$

שיטת כופלי לגרנג'

בהינתן פונק' $f(x,y)$ ואילוץ המוגדר ע"י $g(x,y)$ –
נבנה פונקצ"ית לגרנג'

$$L(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda\cdot g(x,y)$$

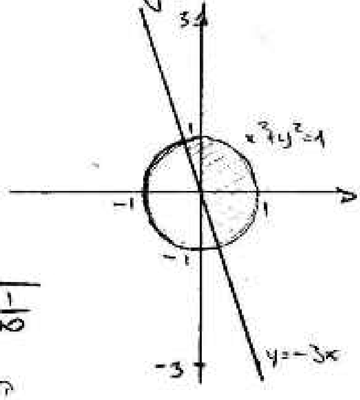
כופל לגרנג'

מחפשים נקודות חשודות לקיצון של L:

$$\begin{cases} L'_x=0 \\ L'_y=0 \\ L'_\lambda=0 \Rightarrow g(x,y)=0 \end{cases}$$

2) מצוא ערך הגדול ביותר וקטן ביותר של $f(x,y)=x^2+y^2-12x+16y$

בתחום: $D=\{(x,y) \mid x^2+y^2\le 1;\ 3x\ge -y\}$



ג מציאת חוץ:

$$\begin{cases} y=-3x \\ x^2+y^2=1 \end{cases}$$

$9x^2+x^2=1 \Rightarrow x^2=\frac{1}{10} \Rightarrow x=\pm\sqrt{\frac{1}{10}}$

הצבת ערך x למערכת: ...

$\cancel{(\sqrt{\frac{1}{10}};\ 3\sqrt{\frac{1}{10}})};$

$(\sqrt{\frac{1}{10}};\ -3\sqrt{\frac{1}{10}}),\quad (-\sqrt{\frac{1}{10}};\ 3\sqrt{\frac{1}{10}});\quad \cancel{(-\sqrt{\frac{1}{10}};\ -3\sqrt{\frac{1}{10}})}$

לא מתאימים, כי עבורם נקבל $y=3x$ אבל $\boxed{y=-3x}$

ב מציאת נקודות חשודות פנימיות:

$$\left.\begin{aligned} f'_x=2x-12=0 &\Rightarrow x=6 \\ f'_y=2y+16=0 &\Rightarrow y=8 \end{aligned}\right\}\quad (6;-8)$$

לא בתחום

⇓

ב מציאת נקודות חשודות על השפה: על השפה $x^2+y^2=1$:

(לפי שיטת כופלי לגרנג'):

$$f(x,y)=x^2+y^2-12x+16y$$
$$g(x,y)=x^2+y^2-1$$

בונה פונקצ"ית לגרנג': $L(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda\cdot g(x,y)$

$$L(x,y,\lambda)=x^2+y^2-12x+16y+\lambda\cdot(x^2+y^2-1)$$

$$\begin{cases} L'_x=2x-12+2\lambda x=0 \Rightarrow \lambda=\frac{6-x}{x} \\ L'_y=2y+16+2\lambda y=0 \Rightarrow \lambda=\frac{-8-y}{y} \\ L'_\lambda=g(x,y)=x^2+y^2-1=0 \end{cases}$$

$$\frac{6-x}{x}=\frac{-8-y}{y} \Rightarrow 6y-\cancel{xy}=-8x-\cancel{xy}$$

$$\begin{cases} 6y+8x=0 \\ x^2+y^2-1=0 \end{cases} \qquad y=-\frac{8x}{6}=-\frac{4x}{3}$$

$$x^2+\frac{16}{9}x^2-1=0 \qquad /\times 9$$

$$9x^2+16x^2=9 \Rightarrow 25x^2=9 \quad x^2=\frac{9}{25} \rightarrow \boxed{x=\pm\frac{3}{5}}$$

$$y=-\frac{4}{3}\cdot\left(\pm\frac{3}{5}\right)=\pm\frac{4}{5} \Rightarrow \cancel{\left(-\frac{3}{5},\frac{4}{5}\right)} \cap \left(\frac{3}{5};-\frac{4}{5}\right)$$

נציב ב: $(3x\geq -y)$;

$-\frac{9}{5} \cancel{\geq} -\frac{4}{5} \Rightarrow \left(-\frac{3}{5};\frac{4}{5}\right)$ - לא מתקיימת

$\frac{9}{5}\geq\frac{4}{5} \Rightarrow \left(\frac{3}{5};-\frac{4}{5}\right)$ - מתקיימת ✓

על השפה: $y=-3x$;

$$f(x,y)=x^2+9x^2-12x-48x=10x^2-60x$$

$$f'_x=20x-60=0 \Rightarrow x=3 \Rightarrow \cancel{(3,-9)}$$

נק' חשודה $\left(\frac{3}{5};-\frac{4}{5}\right)$ $\left(\sqrt{\frac{1}{10}};-3\sqrt{\frac{1}{10}}\right)$ $\left(-\sqrt{\frac{1}{10}};3\sqrt{\frac{1}{10}}\right)$

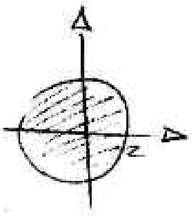
ערך הפונק'

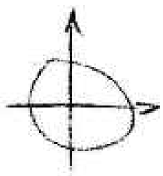
אקסטרמום באילוץ
שיטת הלשון מאוונג
אינטגרלים כפולים

22.05.05
הרצאה XIII

(1) נתונה הפונק':
$$f(x,y) = x^2+y^2+2x-2y$$
חשב ערך מינימלי ומקסימלי עבור נקודות התחום

ג $x^2+y^2 \le 4$





ב $x^2+y^2=4$

א

1) נקודות פנימיות (מאפסות נגזרת, נמצאות בתחום)

$$f'_x = 2x+2 = 0 \Rightarrow x=-1$$
$$f'_y = 2y-2=0 \Rightarrow y=1$$
$\Rightarrow$ נק' פנימית: $\boxed{(-1,1)}$

2) נק' על השפה

$$g(x,y) = x^2+y^2-4$$
$$L(x,y,\lambda) = x^2+y^2+2x-2y+\lambda(x^2+y^2-4)$$
(עם שיטת כופלי לגרנז')

$$\begin{cases} L'_x = 2x+2+2\lambda x = 0 \\ L'_y = 2y-2+2\lambda y = 0 \\ x^2+y^2=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = \frac{-x-1}{x} \\ \lambda = \frac{1-y}{y} \end{cases} \rightarrow$$

$$-\frac{x-1}{x} = \frac{1-y}{y}$$
$$x - xy = -xy - y$$
$$x = -y$$

$$\begin{cases} x=-y \\ x^2+y^2=4 \end{cases} \rightarrow y^2+y^2=4$$
$$y^2 = 2 \Rightarrow y = \pm\sqrt{2}, \quad x = \pm\sqrt{2}$$

$$\Leftarrow \boxed{(-\sqrt{2},\sqrt{2}),\ (\sqrt{2},-\sqrt{2})}$$

$f(-1,1) = -2 \leftarrow$ ערך מינימלי של f בתחום הנתון
$f(-\sqrt{2},\sqrt{2}) = 4-4\sqrt{2}$
$f(\sqrt{2},-\sqrt{2}) = 4+4\sqrt{2} \longleftarrow$ ערך מקסימלי של f

ב' (מדובר בעצם על הנקודות של השפה) ⇐

$(\sqrt{2},-\sqrt{2}) = 4+4\sqrt{2} \longleftarrow$ max ערך

$(-\sqrt{2},\sqrt{2}) = 4-4\sqrt{2} \longleftarrow$ min ערך

ג) מצא נקודות אקסטרמום של: $f(x,y)=x^2+y^2$

המקיימות את האילוץ: $\underbrace{x+y=1}_{y=-x+1}$

(לא נוכל להשתמש במשפט ויירשטראס בגלל שלא מדובר על תחום חסום וסגור...)

נפתור בשיטת ההצבה:

$$f(x,y)=f(x,-x+1)=x^2+(1-x)^2=2x^2-2x+1$$

$$f'_x=4x-2=0 \rightarrow x=\frac{1}{2}$$

נציב במשוואה של האילוץ: $x+y=1 \Rightarrow y=\frac{1}{2}$

$\Leftarrow \left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$

$$f\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$$

$f''_x=4>0 \rightarrow$ נק' min

שיטת הסיאן מאולץ

בונים $\tilde{H}$ הסיאן מאולץ המוגדר ע"י

$$\tilde{H}=\begin{vmatrix} 0 & g'_x & g'_y \\ g'_x & L''_{xx} & L''_{xy} \\ g'_y & L''_{yx} & L''_{yy} \end{vmatrix}$$

כאשר $g(x,y)$ פונק' אילוץ, L - פונק' לגרנג'

☆ אם הנק' חשודה $\tilde{H}>0 \leftarrow$ נק' max

$\tilde{H}<0 \leftarrow$ נק' min

נפתור את התרגיל בשיטת הסיאן מאולץ:

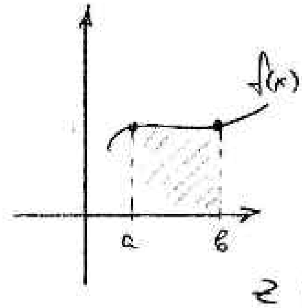
$$L=x^2+y^2+\lambda(x+y-1)$$

$$\begin{cases} L'_x=2x+\lambda \\ L'_y=2y+\lambda \\ x+y-1=0 \end{cases}$$

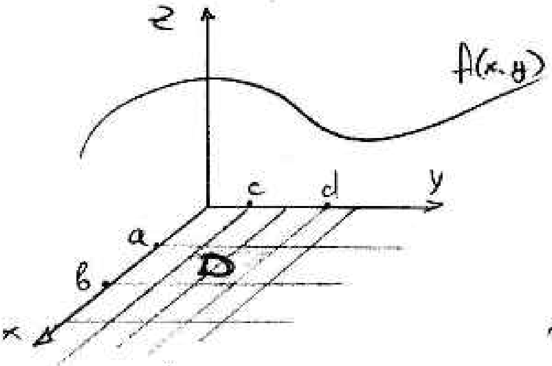
$$\tilde{H}=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}=0-4=-4<0$$

⇐ נק' min

אינטגרלים כפולים



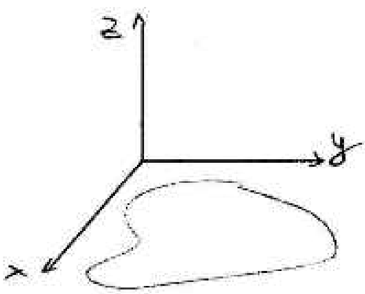
$$\int_a^b f(x)\,dx$$



$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = V$$

נפח הצורה, שבסיסה המתחם הוא D, חסומה מלמעלה ע"י $f(x,y)$
(כאשר $f(x,y)$ נמצאת מעל מישור (x,y)),
והמקצועות הצדדיים ניצבים למישור (x,y)

ניתן לחשב באמצעות אינטגרל כפול את שטח D (מצב) במישור (x,y)

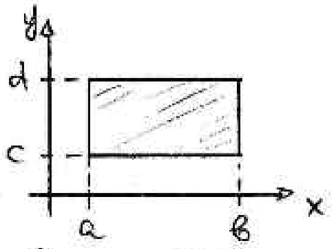


$$S = \iint_D 1\,dx\,dy$$

$$\tfrac{1}{2}y \le x \le y^2$$
$$1 \le y \le 3$$

פתרון מעשי של אינטגרלים כפולים

א) עפ"י סוג התחום:

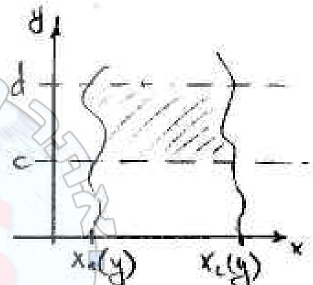


① תחום פשוט לשני = מלבן

$$a \le x \le b$$
$$c \le y \le d$$

$$\int_c^d\int_a^b f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b\int_c^d f(x,y)\,dy\,dx$$

② תחום פשוט אופקית

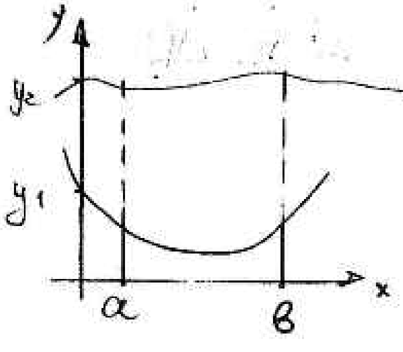


$$x_1 \le x \le x_2$$
$$c \le y \le d$$

$$\int_c^d\int_{x_1}^{x_2} f(x,y)\,dx\,dy$$

⇓

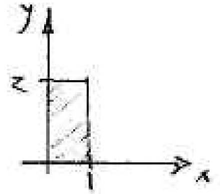
② תחום פשוט אנכי:

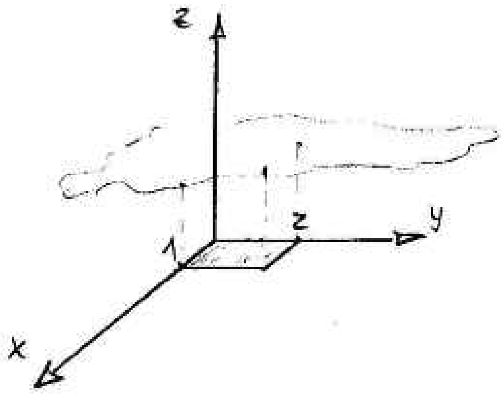


$$y_1 \le y \le y_2$$
$$a \le x \le b$$
$$\int_a^b \int_{y_1}^{y_2} f(x,y)\,dy\,dx$$

③ חשב את הנפח שמעל התחום D החסום ע"י הישרים $x=0$, $x=1$, $y=0$, $y=2$, והפונק' $f(x,y)=x^2+yx$, ומקצועות הצדדים של הצורה הזו ניצבים למישור (x,y)

$$0 \le x \le 1$$
$$0 \le y \le 2$$



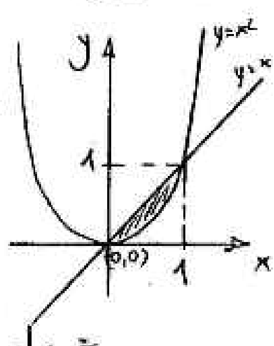


$$\int_0^2\int_0^1 (x^2+yx)\,dx\,dy = \int_0^2 \frac{x^3}{3}+y\frac{x^2}{2}\Big]_0^1 dy =$$
$$= \int_0^2 \left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2}y\right)-0\,dy = \int_0^2 \left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2}y\right)dy =$$
$$= \frac{1}{3}y+\frac{1}{2}\cdot\frac{y^2}{2}\Big]_0^2 = \frac{2}{3}+1-0 = 1\frac{2}{3}$$ (יחידות נפח)

④ חשב $\iint_D (x^2+y^2)\,dx\,dy$ כאשר D התחום החסום ע"י $y=x$, $y=x^2$

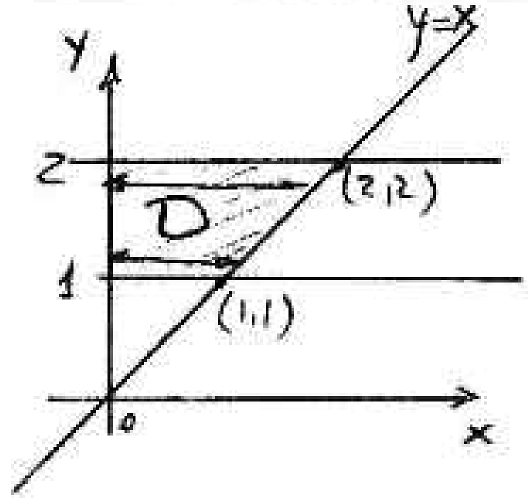
מתחילים בציור שלו – מספרי

$$x^2 \le y \le x$$
$$0 \le x \le 1$$



$$\int_0^1\int_{x^2}^{x} (x^2+y^2)\,dy\,dx = \int_0^1 x^2\cdot y+\frac{y^3}{3}\Big]_{x^2}^{x} dx =$$
$$= \int_0^1 \left(x^3+\frac{x^3}{3}\right)-\left(x^4+\frac{x^6}{3}\right)dx = \int_0^1 \left(\frac{4}{3}x^3-x^4-\frac{1}{3}x^6\right)dx =$$
$$= \frac{4}{3}\cdot\frac{x^4}{4}-\frac{x^5}{5}-\frac{1}{3}\cdot\frac{x^7}{7}\Big]_0^1 = \left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}-\frac{1}{21}\right)-0$$

5 חשב $\iint_D x^2y^2\,dxdy$



אונלפ:

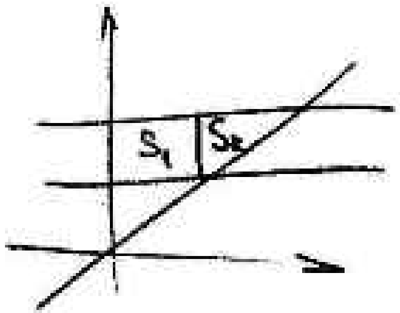
$0 \le x \le y$

$1 \le y \le 2$

$$\int_1^2 \int_0^y x^2y^2\,dx\,dy = \dots$$

אופציה אחרת: (יותר עבודה)

לחלק ל-2 תחומים:



S_1 (מלבן) $x < y \le 2$

S_2 (משולש) $1 \le x \le 2$

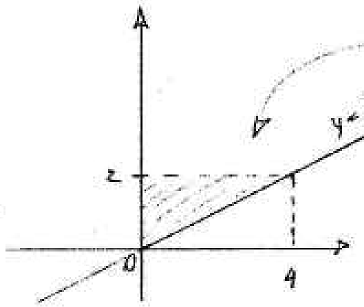
29.05.05
הרצאה עז

אינטגרלים כפולים:
שינוי סדר אינטגרציה
החלפת משתנים. משפט Green היעקוביאן.
החלפה לקואורדינטות פולריות
החלפה לישר.

שינוי סדר אינטגרציה.

(1)

$$\int_0^4\int_{\frac{x}{2}}^{2} e^{y^2}\,dy\,dx =$$



תחום הנתון:

$\frac{x}{2}\le y\le 2$

$0\le x\le 4$

$$\int e^{y^2}dy = ?$$

$y^2=t$

$2y\,dy=dt$

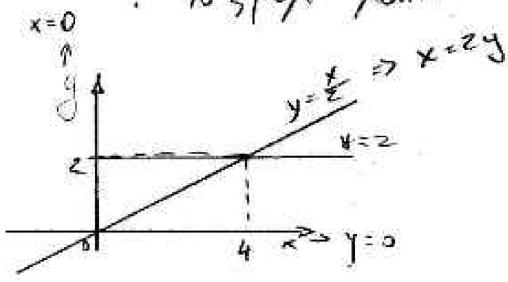
$dy=\frac{dt}{2y}$

לא הולך

$$\int e^{y^2}dx = e^{y^2}\cdot x$$

"החלפת תפקידים":

$$\int_0^2\int_0^{2y} e^{y^2}\,dx\,dy =$$



תחום:

$0\le y\le 2$

$0\le x\le 2y$

$$=\int_0^2 e^{y^2}\cdot x\Big|_0^{2y}dy = \int_0^2 e^{y^2}\cdot 2y - \cancel{e^{y^2}\cdot 0}\,dy = \int_0^2 e^{y^2}\cdot 2y\,dy = \quad y^2=t$$

$$=\int e^t\,dt = e^t = e^{y^2}\Big|_0^2 = e^{2^2}-e^0 = e^4-1$$

שינוי סדר אינטגרציה:

בהינתן סדר אינטגרציה בתרגיל כאשר בסדר הנתון בשאלה לא ניתן (או מסובך מאוד) לחשב אינטגרל, אבל לפי סדר אינטגרציה הפוך ניתן בקלות לחשב אינטגרל - נפתור את התרגיל ע"י שינוי סדר אינטגרציה.

תחום נתון בשאלה ← משרטטים את התחום בשאלה → "החלפת תפקידים"

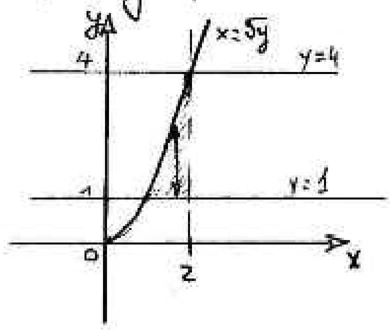
(2)

$$\int_1^4\int_{\sqrt{y}}^2 \sin\left(\frac{x^3}{3}-x\right)dxdy = \ldots$$

תחום הנתון:

$\sqrt{y} \le x \le 2$

$1 \le y \le 4$



"החלפת תפקידים":

$1 \le x \le 2$

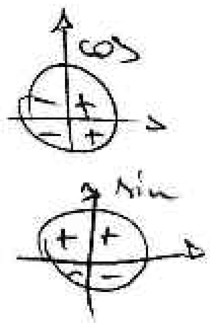
$1 \le y \le x^2$

$$\int_1^2\int_1^{x^2} \sin\left(\frac{x^3}{3}-x\right)dydx = \int_1^2 \sin\left(\frac{x^3}{3}-x\right)\cdot y\Big]_1^{x^2} dx =$$

$$= \int_1^2 \left[\sin\left(\frac{x^3}{3}-x\right)\cdot x^2 - \sin\left(\frac{x^3}{3}-x\right)\cdot 1\right]dx =$$

$$= \int_1^2 \left(\sin\left(\frac{x^3}{3}-x\right)\cdot\left[x^2-1\right]\right)dx\Big]_1^2 = -\cos\left(\frac{x^3}{3}-2\right)+\cos\left(\frac{1}{3}-1\right) =$$

$$= -\cos\frac{2}{3} + \underbrace{\cos\left(-\frac{2}{3}\right)}_{\cos\frac{2}{3}} = \underline{\underline{0}}$$



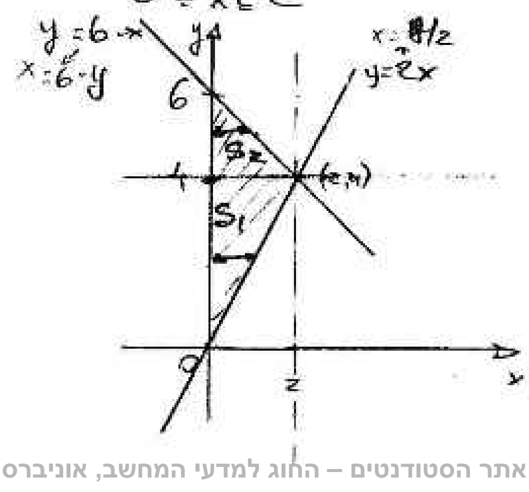
(3) שנה את סדר האינטגרציה:

$$\int_0^2 dx\int_{2x}^{6-x} f(x,y)\,dy = \int_0^2\int_{2x}^{6-x} f(x,y)\,dydx = \ldots$$

בתחום הנתון:

$2x \le y \le 6-x$

$0 \le x \le 2$



"החלפת תפקידים":

S_1

$0 \le x \le \frac{y}{2}$

$0 \le y \le 4$

S_2

$4 \le y \le 6$

$0 \le x \le 6-y$

$$\ldots = \int_0^4\int_0^{\frac{y}{2}} f(x,y)\,dxdy + \int_4^6\int_0^{6-y} f(x,y)\,dxdy$$

החלפת משתנים

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{D^*} f(u,v)\cdot|J|\,du\,dv$$ (4)

כאשר D - הוא תחום חסום וסגור,
מובן ע"י הנק' במשתנים x,y.
D^* - הוא תחום במשתנים u,v.

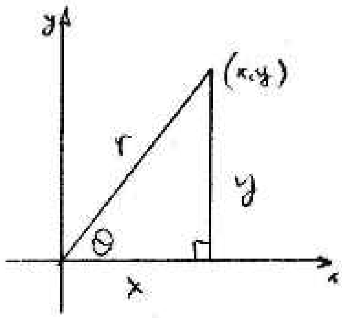
J - הדטרמיננטה המקשרת בין הצירה לפי משתנים ישנים והצירה לפי משתנים חדשים

"ישנים": x,y
"חדשים": u,v

$$J = \begin{vmatrix} \frac{dx}{du} & \frac{dx}{dv} \\ \frac{dy}{du} & \frac{dy}{dv} \end{vmatrix} = \frac{1}{\begin{vmatrix} \frac{du}{dx} & \frac{du}{dy} \\ \frac{dv}{dx} & \frac{dv}{dy} \end{vmatrix}}$$

מצב העקבון:

א) החלפה לקואורדינטות פולריות



r - מרחק הנק' מראשית הצירים
θ - הזווית הנוצרת בין r והכיוון החיובי של ציר x.
החלפה פולרית:

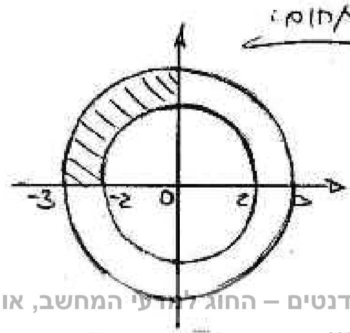
$x = r\cdot\cos\theta$
$y = r\cdot\sin\theta$
$J = r$
$x^2+y^2=r^2$

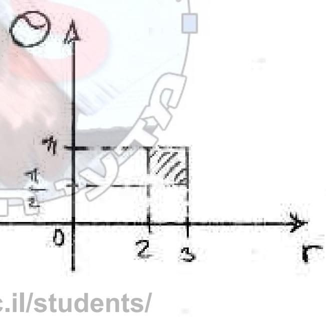
$$J = \begin{vmatrix} \frac{dx}{dr} & \frac{dx}{d\theta} \\ \frac{dy}{dr} & \frac{dy}{d\theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -(r\cdot\sin\theta) \\ \sin\theta & r\cdot\cos\theta \end{vmatrix} = r\cdot\cos^2\theta + r\sin^2\theta = r$$

(2) חשב: $\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy$,

כאשר D התחום החסום ע"י $x^2+y^2=4$, $x^2+y^2=9$, $y\geq 0$, $x\leq 0$

תחום:





$\Leftarrow$ $2\leq r\leq 3$, $\frac{\pi}{2}\leq\theta\leq\pi$

$\Downarrow$

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\int_{2}^{3} \underbrace{\sqrt{r^2}}_{\text{הפונקציה}} \cdot \underbrace{r}_{\text{יעקוביאן}} \, dr\, d\theta = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{r^3}{3}\Big]_2^3 d\theta = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \left(9 - 2\tfrac{2}{3}\right) d\theta =$$

$$= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} 6\tfrac{1}{3}\, d\theta = 6\tfrac{1}{3}\,\theta \Big]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = 6\tfrac{1}{3}\pi - 3\tfrac{1}{6}\pi = 3\tfrac{1}{6}\pi$$

6

$$\int_0^2\int_0^{\sqrt{4-y^2}} e^{\sqrt{x^2+y^2}}\, dx\, dy =$$

:גבולות

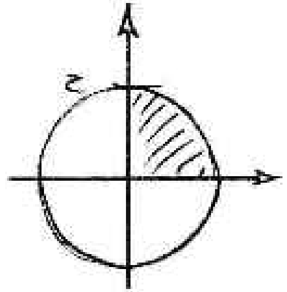
$$0 \le y \le 2$$

$$0 \le x \le \sqrt{4-y^2}$$

$$x = \sqrt{4-y^2}$$

$$x^2 = 4 - y^2$$

$$x^2 + y^2 = 4$$



$$0 \le r \le 2$$

$$0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^2 \underbrace{e^r}_{f} \cdot \underbrace{r}_{J}\, dr\, d\theta =$$

$$\int u \cdot v' = u \cdot v - \int u' \cdot v$$

$$\int e^r r\, dr = r \cdot e^r - \int e^r\, dr = r \cdot e^r - e^r$$

$$u = r$$

$$u' = 1$$

$$v = e^r, \quad v' = e^r$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} r e^r - e^r \Big]_0^2 d\theta =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2e^2 - e^2 - (0 - e^0)\, d\theta =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (e^2+1)\, d\theta = (e^2+1)\theta \Big]_0^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= (e^2+1)\frac{\pi}{2}$$