29/5/05

לסטודנטים בקורס חדו"א 2

מצורפים 2 המועדים משנה שעברה עם פתרונות חלקיים

המבחן השנה יהיה במתכונת דומה לזה של שנה שעברה

בהצלחה בבחינות

על

29.06.04

אוניברסיטת חיפה

החוג למדעי המחשב

ד"ר יעל זפקוביץ-מלאכי

מבחן סוף סמסטר ב' תשנ"ד (מועד א)

חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 2.

****

הוראות לנבחן

לבחינה זו שני חלקים.

את התשובות לשני החלקים יש לסמן בטופס הבחינה.

א) יש לענות על כל השאלות.

ב) אין להשתמש בכל חומר עזר, ניתן להשתמש במחשבונים.(יש איסור בשימוש במחשבונים עם אופציה גרפית)

ג) משך הבחינה $2\frac{1}{4}$ שעות. אין יציאה במהלך הבחינה.

ד) בדוק שהטופס בידך מכיל 4 עמודים

ה) יש לבדוק כי ענית על כל השאלות בגוף השאלון -מחברת הבחינה משמשת כטיוטא לטבלה ולא תיבדק כלל.

****

<u>חלק ראשון</u>- לפניך תשע טענות. סמן בטבלה האם הטענה נכונה או שאינה נכונה. אין צורך לתקן את הטענות השגויות. (5 נקודות לכל טענה)

1. יהי $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ טור חיובי ו $f(n)$ ערך הפונקציה בנקודה $x=n$. אזי הטור הנתון והאינטגרל $\int^{\infty} f(x)dx$ מתכנסים או מתבדרים ביחד.

זה לא נכון, אין קשר [illegible] ...י המשפט.

2. טור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ יקרא מתכנס בתנאי אם הוא מתבדר אך טור הערכים המוחלטים $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ מתכנס.

הגדרה לא נכונה (... 27 - הגדרה 2).

3. עבור פונקציה במספר משתנים : קיום נגזרות חלקיות בנקודה לא גורר רציפות הפונקציה בנקודה הנ"ל.

נכון - הערה 1 עמ' 170

4. אם פונקציה $z=f(x,y)$ דיפרנציאבילית בנקודה $M_0(x_0,y_0)$ אזי קיימות הנגזרות החלקיות $A=f_x'(x_0,y_0)$ ו $B=f_y'(x_0,y_0)$.

נכון עמ' 173 משפט 1

5. אם פונקציה $z=f(x,y)$ בעלת נגזרות חלקיות $A=f_x'(x_0,y_0)$ ו $B=f_y'(x_0,y_0)$ רציפות בסביבת הנקודה $M_0(x_0,y_0)$ אזי היא דיפרנציאבילית בנקודה זו.

נכון - משפט 3 עמ' 178

אין קשר לרציפות שלהן

6. אם לפונקציה $z=f(x,y)$ יש אקסטרמום בנקודה $M_0(x_0,y_0)$ ובנוסף היא בעלת נגזרות חלקיות מסדר ראשון בנקודה זו, אזי כל הנגזרות הללו שוות לאפס.

נכון - עמ' 233

7. טור מתכנס הוא טור מתכנס בהחלט.

לא נכון $\sum a_n=(-1)^n\cdot\frac{1}{n}$

8. אם בבדיקת נקודה חשודה כקיצון בעזרת הסיאן מאולץ נקבל כי ההסיאן המאולץ חיובי באותה נקודה אזי הנקודה היא נקודת מינימום של הפונקציה באילוץ הנתון.

לא נכון.

9. אם הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס, אזי הטור $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ מתכנס.

לא נכון $\sum a_n=(-1)^n\cdot\frac{1}{n}$ מתכנס בתנאי

$\sum(-1)^n\cdot a_n=\frac{1}{n}$ מתבדר

<u>חלק שני</u>-לפניך תשע טענות. אם הטענה אינה נכונה תקן אותה כך שתהייה נכונה ורשום את תשובתך במקום המתאים בטבלה. (6 נקודות לכל טענה)

10. נתונים שני טורים חיוביים:
$$A=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+e}{3^n}$$
$$B=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4n^2-n+3}{n^3+2-\sin(n!)}$$
אזי שני הטורים מתכנסים לגבולות סופיים .

11. יהי $u=\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2m)$ כאשר m מספר חיובי קבוע ו- $(x,y)\neq(0,0)$

נתון כי $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$ אזי הערך של m שווה ל

12. נסמן ב M את הערך המקסימלי שהפונקציה $f(x,y)=x^2-y^2$ מקבלת עבור נקודות (x,y) המקימות את האילוץ $\frac{1}{2}x^2+y^2=1$ אזי הערך M מתקבל בדיוק בנקודה אחת.

13. נתונה הפונקציה $f(x,y)=(1-x)^3+3(1-x)y^2-6(1-x)y$ אזי לפונקציה יש 4 נק' קריטיות שאחת מקסימום מקומי שתיים מינימום מקומי ואחת אוכף

14. הסכום $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\int_0^{x}f(x,y)dydx+\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1}\int_0^{\sqrt{1-x^2}}f(x,y)dydx$ שווה ל $\int_0^{1}\int_y^{\sqrt{1-y^2}}f(x,y)dxdy$

15. נתון כי $z(x,y)=f(x^2+y^2)$ וכן כי לכל נקודה (x,y) מתקיים השוויון הבא $3y\frac{\partial z}{\partial x}=Ax\frac{\partial z}{\partial y}$ אזי הערך של A הוא 2.

16. נתונה הפונקציה $z=2x^4+y^4-x^2-2y^2$ הנקודה $(-\frac{1}{2},1)$ היא נקודת מקסימום מקומי של הפונקציה.

17. נתונה הפונקציה $f(x,y,z)=2x^2+3y^2+z^2$ וכן הנקודה $(2,3,1)$ אזי הכיוון בו קצב שינוי הפונקציה הוא מינימלי בנקודה הנתונה הוא : $(8,18,2)$.

18. הערך של האינטגרל $\iint_D(1-y)dxdy$ כאשר D מוגדר ע"י $x^2+y^2\leq1, x\geq0, y\geq0$

שווה ל: $\frac{\pi}{4}$

תשובות לחלק הראשון והשני

טענה מספר	הטענה נכונה	הטענה אינה נכונה
1		✓
2		✓
3	✓	
4	✓	
5		✓
6	✓	
7		✓
8		✓
9		✓

אין בעיות עבור תנאי במשפט 6
ראה עמ' 27 - הגדרה 2
עמ' 170 - הערה 1
עמ' 173 - משפט 1
עמ' 178 - משפט 3
(חסר תנאי רציפות הפונק')
עמ' 233
$a_n = \sum (-1)^n \cdot \frac{1}{n}$

$a_n = \sum (-1)^n \cdot \frac{1}{n}$

טענה מספר	הטענה נכונה	הטענה אינה נכונה ויש לתקנה באופן הבא
10		הטור A הוא טור ...מתכנס... הטור B הוא טור ...מתבדר...
11	✓	m=
12		הערך M מתקבל בדיוק ב ...2... נקודות.
13		לפונקציה יש ...4... נקודות קריטיות. ...1... הן מקסימום ...1... הן מינימום ...2... הן נקודות אוכף.
14		$\int_{0}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \int_{y}^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)dxdy$
15		A = 3
16		הנקודה $(-\frac{1}{2},1)$ היא נקודת ...מינימום מקומי... של הפונקציה.
17		הכיוון בו קצב שינוי הפונקציה הוא מינימלי בנקודה הנתונה הוא : $(-8, -18, -2)$
18		הערך של האינטגרל הוא ...$\frac{\pi}{4} - \frac{1}{3}$...

20.07.04

אוניברסיטת חיפה
החוג למדעי המחשב
ד"ר יעל זפקוביץ-מלאכי

מבחן סוף סמסטר ב' תשס"ד (מועד ב)
חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 2.

****

הוראות לנבחן
לבחינה זו שני חלקים.
את התשובות לשני החלקים יש לסמן בטופס הבחינה.
א) יש לענות על כל השאלות.
ב) אין להשתמש בכל חומר עזר, ניתן להשתמש במחשבונים.(יש איסור בשימוש במחשבונים עם אופציה גרפית)
ג) משך הבחינה $2\frac{1}{4}$ שעות. אין יציאה במהלך הבחינה.
ד) בדוק שהטופס בידך מכיל 4 עמודים
ה) יש לבדוק כי ענית על כל השאלות בגוף השאלון -מחברת הבחינה משמשת כטיוטא לטבלה ולא תיבדק כלל.

****

חלק ראשון- לפניך תשע טענות. סמן בטבלה האם הטענה נכונה או שאינה נכונה. אין צורך לתקן את הטענות השגויות. (5 נקודות לכל טענה)

1. יהי $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ טור חיובי ו $f(n)$ ערך הפונקציה בנקודה $x = n$. אם הפונקציה $f(x)$ חיובית אזי הטור הנתון והאינטגרל $\int_1^{\infty} f(x)dx$ מתכנסים או מתבדרים ביחד.
2. טור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ יקרא מתכנס בתנאי אם הוא מתכנס אך טור הערכים המוחלטים $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ מתבדר.
3. אם פונקציה $z = f(x,y)$ מוגדרת בסביבת נקודה $M_0(x_0,y_0)$ ובעלת נגזרות חלקיות $A = f_x'(x_0,y_0)$ ו $B = f_y'(x_0,y_0)$ רציפות בסביבת הנקודה $M_0(x_0,y_0)$ אזי היא דיפרנציאבילית בנקודה זו.
4. אם פונקציה $z = f(x,y)$ בעלת נגזרות חלקיות מסדר ראשון בנקודה $M_0(x_0,y_0)$, ובנקודה זו כל הנגזרות הללו שוות לאפס אזי לפונקציה יש אקסטרמום בנקודה $M_0(x_0,y_0)$.
5. עבור פונקציה במספר משתנים : קיום נגזרות חלקיות בנקודה גורר רציפות הפונקציה בנקודה הנ"ל.
6. רציפות הנגזרות החלקיות בנקודה אינו תנאי מספיק לדיפרנציאביליות של הפונקציה באותה נקודה.

הטענות הבאות (טענות מספר 7-8-9 מתיחסות לטורים $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ו $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$

שידוע ששניהם מתכנסים לגבולות סופיים :

.7 הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ בהכרח מתכנס.

.8 $\lim_{n\longrightarrow\infty} na_n = 0$

.9 הטור $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$ בהכרח מתכנס.

<u>חלק שני</u>-לפניך תשע טענות. אם הטענה אינה נכונה תקן אותה כך שתהייה נכונה ורשום את תשובתך במקום המתאים בטבלה. (6 נקודות לכל טענה)

.10 נתונים שני טורים:

$$A = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cdot \sin^4 n}{n^4 + 1}$$

$$B = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{7n^2 + 1}{n^2 + 100n}$$

אזי הטור B מתכנס לגבול סופי והטור A מתבדר .

.11 נתונה הפונקציה $f(x, y) = \ln(x^2 + ay^2)$, כאשר $a > 0$ ונתון כי: $f''_{xx}(x, y) + f''_{yy}(x, y) = 0$ אזי הערך של a שווה ל : 3.

.12 נתונה הפונקציה $f(x, y) = -x^3 - 3xy^2 + 6xy$ אזי לפונקציה יש:
4 נק' קריטיות שאחת מקסימום מקומי שתיים מינימום מקומי ואחת אוכף.

.13 אחרי שינוי סדר האינטגרציה באינטגרל $\int_{3}^{\ldots}\int_{\frac{9}{x}}^{10-x} f(x, y)dydx$ נקבל

$$\int_{3}^{7}\int_{\frac{9}{y}}^{y} f(x, y)dxdy + \int_{7}^{9}\int_{\frac{9}{y}}^{10} f(x, y)dxdy$$

.14 נתונה $f(u)$ גזירה לכל u ושונה מאפס. נגדיר $z = \dfrac{y}{f(x^2 + y^2)}$ אזי הערך

של הביטוי $\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial y}$ שווה ל: $\frac{z^2}{y}$.

.15 נתונה הפונקציה $z = x^2y^2 - x \cdot y^3 - 3y - 1$ אזי הערך של הנגזרת המכוונת המקסימלית של הפונקציה בנקודה $(2,1)$ הוא: $-\sqrt{10}$.

.16 הערך של האינטגרל $\iint_D e^{xy}dxdy$ כאשר D מוגדר ע"י

$y = 2x^2, y = x^2, y = \frac{3}{x}, y = \frac{5}{x}$ שווה ל: $\frac{1}{3}e^2 \ln 2$

17. נתונים הגבולות

$$A = \lim_{(x,y) \longrightarrow (0,0)} \frac{xy^2}{x^2 + y^4}$$

$$B = \lim_{(x,y) \longrightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2}$$

אזי הגבולות A ו B מתכנסים לגבולות סופיים.

18. נתון: $f(x,y)$ בעלת נגזרות חלקיות רציפות לכל (u,v) ונתון כי $\frac{\partial f}{\partial u}_{(3,1)} = 3$

וכן $\frac{\partial f}{\partial v}_{(3,1)} = -2$. נגדיר פונקציה מורכבת $g(x,y) = f(u(x,y), v(x,y))$

כאשר $u = 2x + y^2$ ו $v = 3x - 2y$

אזי $\frac{\partial g}{\partial x}_{(1,1)} + \frac{\partial g}{\partial y}_{(1,1)} = 0$

בהצלחה!

[illegible]

תשובות לחלק הראשון והשני

טענה מספר	הטענה נכונה	הטענה אינה נכונה
1		✓
2	✓	
3	✓	
4		✓
5		✓
6		✓
7		✓
8		✓
9	✓	~~✓~~

טענה מספר	הטענה נכונה	הטענה אינה נכונה ויש לתקנה באופן הבא
10		הטור A הוא טור ...מתכנס... הטור B הוא טור ...מתבדר...
11		a= 1
12		לפונקציה יש ...4...נקודות קריטיות. ...1...הן מקסימום ...1... הן מינימום ...2...הן נקודות אוכף.
13		$\int_{7}^{9}\int_{9/y}^{10-y} f(x,y)dxdy + \int_{3}^{7}\int_{9/y}^{3} f(x,y)dxdy$
14		ערך הביטוי שווה ל ...$\frac{2}{y^2}$...
15		הערך שווה ל...$\sqrt{10}$...
16		הערך של האינטגרל שווה ל... $\frac{1}{3}(e^5-e^3)\ln 2$
17		הגבול A לא קיים. \הגבול A קיים ושווה ל...... הגבול B לא קיים. \הגבול B קיים ושווה ל......
18		$\frac{\partial g}{\partial x}_{(1,1)} + \frac{\partial g}{\partial y}_{(1,1)} = 10$