מחברת

משפטים

original

Campus

paper ware

5 Subje
noteboo

200 sheets / 5 x 5 ru
400205 14.8 x 21

elgan
משרדי בע"מ, בן הורקנוס 5, לוד
70 גרם, גודל: 21 x 14.8 ס"מ, 200 דפים

קבוצות מספרים

← $\mathbb{R}$ - **מס' ממשיים** - כל מס' שנמצא על ציר המספרים.

← $\mathbb{Q}$ - **מס' רציונליים** -

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} \;\middle|\; m,n \in \mathbb{Z},\ n \neq 0 \right\}$$

מס' שלמים.

← $\mathbb{Z}$ - **מס' שלמים** - מס' שלמים חיוביים, שליליים ו-0.

← $\mathbb{N}$ - **מס' טבעיים** - מס' שלמים וחיוביים.

$$N = \{1, 2, 3, \ldots\}$$

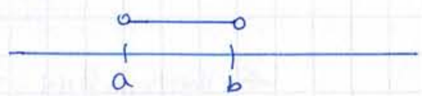
$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

קטעים

$\mathbb{R} = \{-\infty < x < \infty\}$ ← ציר המספרים

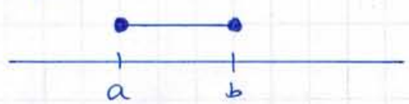
קטע פתוח -

$$(a,b) = \{x \mid a < x < b\}$$



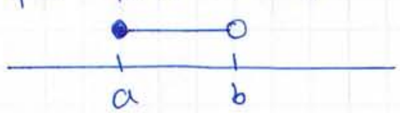
קטע סגור -

$$[a,b] = \{x \mid a \leq x \leq b\}$$



קטע חצי פתוח, חצי סגור -

$$[a,b) = \{x \mid a \leq x < b\}$$



סימונים

סכום סידרה:

$$* \sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$$

n – אינדקס איבר אחרון.
$\sum$ – סיגמה
k=1 – אינדקס איבר ראשון

מכפלה:

$$* \prod_{k=1}^{n} a_k = a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n$$

גרירה:

$* \ A \Rightarrow B$

אם A מתקיים אז B מתקיים

שקילות:

$* \ A \Leftrightarrow B \ \equiv A \Rightarrow B, B \Rightarrow A$

$*$ לכל $= \forall$ קיים $= \exists$ שייך $= \in$

ערך מוחלט

$$|x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

$* \ \left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$

$* \ |x \cdot y| = |x| \cdot |y|$

$* \ |x| = -|x|$

$\rightarrow |x| < a \Rightarrow -a < x < a \quad (a \in \mathbb{R})$

$\rightarrow |x| \geq a \Rightarrow \quad x < -a$ או $x > a \quad (a \in \mathbb{R})$

משפטי אי-שוויון

שוויון המשולש

$\forall x, y \in \mathbb{R}$

$|x+y| \leq |x| + |y|$ מתקיים

שוויון ברנולי

$\forall n \in \mathbb{N}, \ x > -1$

$(1+x)^n \geq 1 + nx$ מתקיים

שוויון ממוצעים

נר $\quad \mathbb{N} \ni x_1, x_2, \ldots, x_n$

$\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$ ← ע חשבוני

$\sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n}$ ← וצע הנדסי

$\frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_n}}$ ← ממוצע הרמוני

קבוצות

סימון: $A \subset B$ A מוכלת ממש ב-B

$A \subseteq B$; A מוכלת או שווה ל-B.

$\forall x \in A \Rightarrow x \in B$ לכל, שייך

$\exists x \in B \Rightarrow x \notin A$ קיים.

$A \subset B$ או $A=B$

$x\in A \Longleftrightarrow x\in B$

$A\cup B=\{x \mid x\in A \text{ או } x\in B\}$ איחוד קב'.

$A\cap B=\{x \mid x\in A \text{ וגם } x\in B\}$ חיתוך קב'.

קב' חסומות ולא חסומות

הגדרה: חסם מלעיל:

קב' של מס' ממשיים K נקראת חסומה מלמעלה אם קיים מספר ממשי M כך שלכל $x\in K$, $x\le M$. ~~המספר~~ המס' M נקרא חסם מלעיל של K.

הגדרה: חסם מלרע:

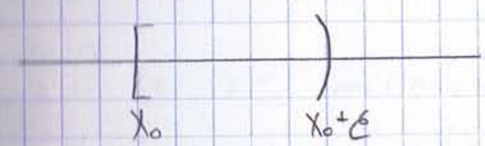
נאמר שקב' K חסומה מלמטה, אם קיים מס' ממשי m, כך שלכל $x\in K$, $x\ge m$, והמס' m נקרא חסם מלרע של K.

←

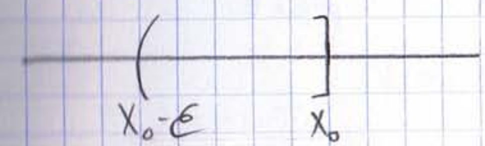
ε-סביבה של נקודה

הגדרה: יהא מס' ממשי x_0 ולכל $\varepsilon>0$ ממשי, הקטע הפתוח $(x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon)$ נקרא ε-סביבה של הנק' x_0 או סביבה של x_0.

← חצי סביבה ימנית: $[x_0, x_0+\varepsilon)$



← חצי סביבה שמאלית: $(x_0-\varepsilon, x_0]$



הערה חשובה

ε - יכולה להשתנות וניתן לחסומה (תכונה מתקיימת עבור חכ-ε)

* הערות:

(1) אם M הוא חסם מלעיל של הקב' K, אזי כל מס' הגדול מ-M יהיה גם הוא חסם מלעיל של K.

(2) אם m הוא חסם מלרע של K, אזי כל מס' הקטן מ-m יהיה גם הוא חסם מלרע של K.

הגדרה: קב' חסומה:

נאמר שהקב' K היא חסומה, אם K חסומה גם מלמעלה וגם מלמטה.

באופן שקול, אם קיים מס' ממשי T כך ש- $|x|\le T$.

הגדרה: סופרימום: S: (1) M חסם מלעיל (2) $\forall \varepsilon>0, \exists x_\varepsilon \in A; x_\varepsilon > M-\varepsilon$

מס' ממשי S יקרא הסופרימום של K (חסם עליון של K) אם הוא החסם המלעיל הקטן ביותר של K.

סימון: $S=\sup K$

← אם המס' S שייך לקב' K אזי הוא נקרא המקסימום של K, $S=\max K$.

הגדרה: אינפימום: I: (1) L חסם מלרע (2) $\forall \varepsilon>0, \exists x_\varepsilon \in A; x_\varepsilon < L+\varepsilon$

מס' ממשי I יקרא האינפימום של K (חסם תחתון של K) אם הוא החסם המלרע הקטן ביותר של K. סימון: $I=\inf K$.

← אם המס' I שייך לקב' K אזי הוא יקרא המינימום של K, $I=\min K$.

אקסיומת השלמות

- לכל קב' לא ריקה של מס' ממשיים החסומה מלמעלה קיים סופרימום.
- לכל קב' לא ריקה של מס' ממשיים החסומה מלמטה קיים אינפימום.

פונקציות

מושגים בסיסיים

הגדרה:

יהיו D, E 2 קב' של מס' ממשיים.

פונק' f מהקב' D לקב' E הינה חוק מוגדר היטב ונתון מראש, עפ"י לכל מס' X ב-D מותאם מס' יחיד y ב-E.

$$f: \underset{\text{תחום}}{D} \to \underset{\text{טווח}}{E}$$

$f(x)=y$

$x\in D,\ y\in E$

איבר בתחום (x) נקרא מקור.

איבר בטווח (y) נקרא תמונה.

תחום הגדרה של פונק'

(א) שברים: מכנה $\neq 0$:

* $y = \dfrac{1}{x^2 - x}$

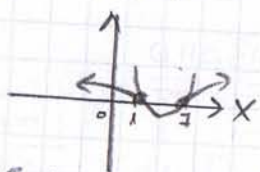
$x^2 - x \neq 0$
$x(x-1) \neq 0$
$x \neq 0 \,,\; x \neq 1$

(ב) שורשים זוגיים: הביטוי בתוך השורש צריך להיות גדול או שווה ל-0.

* $y = \sqrt{x^2 - 8x + 7}$

← באם השורש נמצא במכנה, השורש צריך להיות גדול מ-0 ממש.

$x^2 - 8x + 7 \geq 0$
$x^2 - x - 7x + 7 \geq 0$
$x(x-1) - 7(x-1) \geq 0$
$(x-1)(x-7) \geq 0$
$x = 1 \,,\; x = 7$



$\{x \mid x \leq 1$ או $x \geq 7\}$

(ג) לוג:

$\log_b a$ בסיס>0, בסיס≠1 ; מעריך>0

ת.ה
$\Rightarrow$ לוג) $a > 0$, $1 \neq b > 0$

$\ln x = \log_e x \quad (e = 2.718\ldots)$

ת.ה $a > 0$

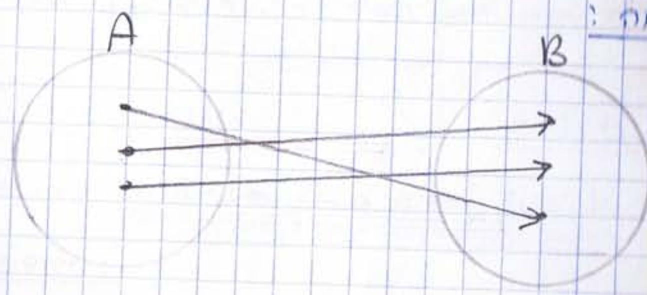
$$\boxed{\begin{gathered}\log_b a = c \\ b^c = a\end{gathered}}$$

ייצוגים לתיאור פונקציה:

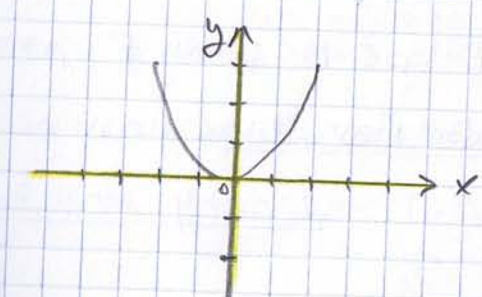
(א) כלל התאמה:

$f(x) = x + 2$
$g(x) = x^2 - 5$

(ב) דיאגרמה:



(ג) גרף של פונק':



(ד) פונק' מפוצלת לפי מקרים:

$$|x| = \begin{cases} x & ; x \geq 0 \\ -x & ; x < 0 \end{cases}$$

דוגמא לפונק' דיריכלה:

$f: \mathbb{R} \to \{0, 1\}$

$$f(x) = \begin{cases} 1 & ; x \in Q \\ 0 & ; x \notin Q \end{cases}$$

הפונק' לוקחת ערכים מכל ציר המספרים ומתאימה להם או 0 או 1.

אם המס' רציונלי הוא 1, ואם הוא לא רציונלי הוא 0 ($\pi, \sqrt{3}, \sqrt{2}$).

ג) פונקציות טריגונומטריות:

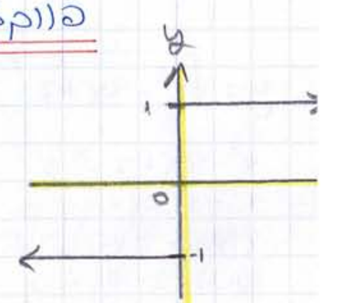
- $\sin x, \cos x$ ⇐ מוגדרות לכל x.
- $\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}$ ⇐ $\cos x\neq 0$

  $x\neq \frac{\pi}{2}+\pi k$
- $\cot x=\frac{\cos x}{\sin x}$ ⇐ $\sin x\neq 0$

  $x\neq \pi k$

פונקציית הסימן

$$y=\operatorname{sign}(x)\begin{cases}1 & ;\ x>0\\ 0 & ;\ x=0\\ -1 & ;\ x<0\end{cases}$$



פונקציית ערך השלם

לא $|x|$!

הגדרה !

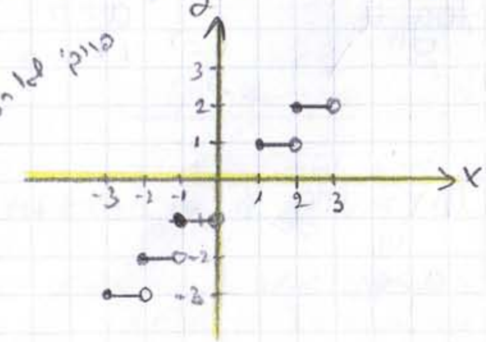
פונק' מתאימה לכל מס' ממשי x, את המס' השלם השווה לו או נמצא מתחתיו וקרוב לו ביותר. סימון: $y=[x]$.

$[3]=3$

$[2.999]=2$

$[-2.999]=-3$

פונק' לא רציפה!



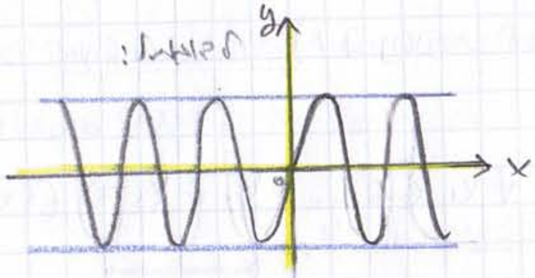
הגדרה:

נאמר ש- $y=f(x)$ חסומה מעל תחום D, אם קיים מס' ממשי M כך ש- $|f(x)|\le M$ לכל $x\in D$.

לדוגמא:

$-1\le \sin x\le 1$

$|\sin x|\le 1$



פונקציות טריגונומטריות

משפט:

לכל $0<x<\frac{\pi}{2}$ מתקיים $\sin x<x<\tan x$

ולכל $-\frac{\pi}{2}<x<0$ מתקיים $\tan x<x<\sin x$

פונק' זוגיות ואי זוגיות

פונק' $f(x)$ בעלת תחום הגדרה D סימטרי ביחס לראשית הצירים (כלומר $x\in D \iff -x\in D$):

← תיקרא פונק' זוגית מעל תחום D אם: $\forall x\in D: f(x)=f(-x)$

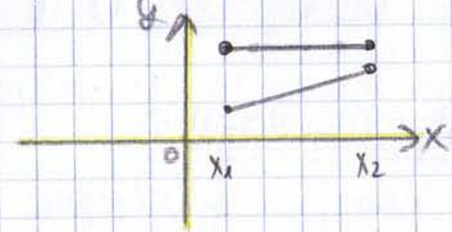
← תיקרא פונק' אי-זוגית מעל תחום D אם: $\forall x\in D: f(x)=-f(-x)$

פונק' מונוטוניות עולות ויורדות

יהי D תחום ההגדרה של פונק' $f(x)$, ויהי $D_0 \subseteq D$ תת תחום של D.

• נאמר ש- $f(x)$ היא מונוטונית עולה (/ מונוטונית לא יורדת) בתחום D_0 אם:

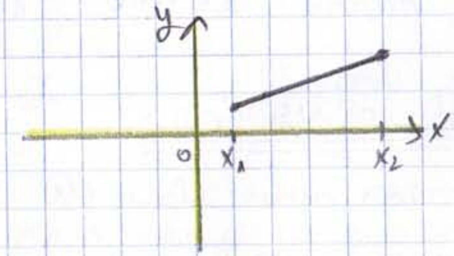
$$\forall x_1, x_2 \in D_0 : x_1 \le x_2 \Rightarrow f(x_1) \le f(x_2)$$



פונקציות עולות ממש. $\Leftarrow$

• נאמר ש- $f(x)$ היא מונוטונית עולה ממש בתחום D_0 אם:

$$\forall x_1, x_2 \in D_0 : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$



פונק' עולה. $\Leftarrow$

• באופן דומה, מונוטונית יורדת:

$$\forall x_1, x_2 \in D_0 : x_1 \le x_2 \Rightarrow f(x_1) \ge f(x_2)$$

• מונוטונית יורדת ממש:

$$\forall x_1, x_2 \in D_0 : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

פונק' הפוכה

$f: A \to B \quad f(x) = x^2$

נגדיר את A ע"י $A = \{x | x \ge 0\}$

על מנת שנוכל להגדיר פונק' הפוכה

$f^{-1}(x) : \mathbb{R} \to A$, $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$

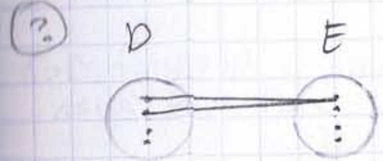
הגדרה: חח"ע:

נאמר שפונק' $f(x): D \to E$ היא חח"ע (חד חד ערכית) אם לכל $y \in E$ קיים לכל היותר x אחד, כך ש- $f(x)$

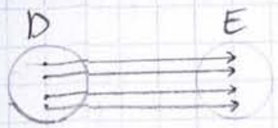
$$\forall x_1, x_2 \in D, f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

לדוגמא:

פונק' שהיא לא חח"ע:



פונק' שהיא חח"ע:



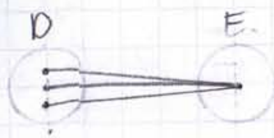
פונק' כי לכל x קיים y אחד ויחיד.
חח"ע כי לכל y קיים לכל היותר x אחד.

הגדרה: פונקציות על:

פונק' $f(x): D \to E$ תיקרא פונק' מ-D על E אם לכל $y \in E$ קיים $x \in D$ כך ש- $y = f(x)$.

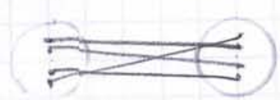
לדוגמא:

פונק' שהיא על:



כי לכל y קיים לכל הפחות x אחד.

פונק' חח"ע ועל:



הערות:

(1) לכל אחת מהפונק' הטריגונומטריות קיימת פונק' הפוכה, אבל אנו חייבים להגדיר לה איזשהו תת תחום (כי היא חייבת להיות חח"ע ועל).

(2) כדי להפוך פונק', היא חייבת להיות תחילה חח"ע ועל!

פונק' טריגונומטריות הפוכות

* $y=\sin x$

$$\begin{cases} -\frac{\pi}{2}\le x\le\frac{\pi}{2} \\ -1\le \sin x\le 1 \end{cases}$$

הפונק' תהיה חח"ע ועל בתחום

* $y=\arcsin x$

$$\begin{cases} -1\le x\le 1 \\ -\frac{\pi}{2}\le \arcsin x\le\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

* $y=\cos x$

$0\le x\le\pi$

$-1\le \cos x\le 1$

* $y=\arccos x$

$-1\le \cancel{x}\le 0$

$0\le \arccos x\le\pi$

* $y=\tan x$

$-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$

* $y=\arctan x$

$-\frac{\pi}{2}<\arctan x<\frac{\pi}{2}.$

סדרות

הגדרה: סידרה:

סידרה של מס' ממשיים היא פונק' $f:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$, לכל $n\in\mathbb{N}$ מתאים מס' ממשי $a_n=f(n)$.

a_n נקרא האיבר ה-n-י של הסידרה (איבר כללי).

הגדרה: סידרה חשבונית:

אם ההפרש בין כל 2 איברים עוקבים בסידרה (המוגדר ע"י a_n-a_{n-1} / $a_{n+1}-a_n$) הוא גודל קבוע (d) הסידרה תיקרא סידרה חשבונית. d יקרא הפרש הסידרה.

$$a_n=a_1+(n-1)d$$

$$S_n=\frac{n}{2}\left[2a_1+(n-1)d\right]$$

$$S_n=\frac{n}{2}(a_1+a_n)$$

הגדרה: סדרה הנדסית:

אם היחס בין כל 2 איברים סמוכים בסדרה הוא קבוע $\left(\frac{a_n}{a_{n-1}} / \frac{a_{n+1}}{a_n}\right)$, המסומן ע"י q, אז הסדרה תיקרא סדרה הנדסית ו-q תיקרא מנת הסדרה.

הגדרה: כלל נסיגה:

סדרות שמוגדרות באופן הבא:

- נתון איבר ראשון (בעיקרון איבר כלשהו)
- נתון קשר בין איבר כללי a_n והאיבר הבא אחריו בסדרה a_{n+1} (קשר בין איבר כללי והאיבר הבא בסדרה).

* החיסרון של סדרת נסיגה כאשר מבקשים לחשב מס' שנמצא במקום גבוה (לדוגמא a_{100}).

משפט:
2 סדרות: $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ ו- $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ יקראו סדרות שוות אם"ם $a_n=b_n$ לכל $n\in\mathbb{N}$

סדרות חסומות ולא חסומות

הגדרה: חסם מלעיל:

נאמר שהסדרה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ חסומה מלמעלה אם קיים מס' M כך שלכל $n\in\mathbb{N}$, $a_n\le M$. M נקרא חסם מלעיל של הסדרה.

הגדרה: חסם מלרע:

נאמר שהסדרה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ חסומה מלמטה אם קיים מס' m כך שלכל $n\in\mathbb{N}$, $a_n\ge m$. m יקרא חסם מלרע של הסדרה.

הגדרה: סדרה חסומה:

נאמר שהסדרה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ חסומה אם היא חסומה מלמעלה וחסומה מלמטה. כלומר, אם קיים מס' T כך שלכל $n\in\mathbb{N}$, $|a_n|\le T$ (ניתן לומר ש-a_n חסומה בערכה המוחלט ע"י T).

סדרות מונוטוניות

הגדרה: מונוטונית עולה:

סידרה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ נקראת מונוטונית עולה אם קיים n_0 כך שלכל $n\in\mathbb{N}$, $a_n \le a_{n+1}$.

הגדרה: מונוטונית עולה ממש:

סידרה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ נקראת מונוטונית עולה ממש אם $n_0\in\mathbb{N}$ כך שלכל $n\ge n_0$, $a_n<a_{n+1}$.

הגדרה: מונוטונית יורדת:

באותו אופן יורדת ⇐ $a_n \ge a_{n+1}$

הגדרה: מונוטונית יורדת ממש:

באותו אופן יורדת ממש ⇐ $a_n>a_{n+1}$

הגדרה: סדרה מונוטונית:

נאמר שסדרה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ הנה מונוטונית אם היא מונוטונית עולה (עולה ממש) או מונוטונית יורדת (יורדת ממש).

גבול של סידרה

הגדרה: גבול של סידרה:

תהי $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ סידרה נתונה. נאמר שהמס' L הנו הגבול של הסידרה אם לכל $\varepsilon>0$ קיים מס' טבעי n_0 כך שלכל $n\ge n_0$ מתקיים $|a_n-L|<\varepsilon$. נסמן: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=L$

← אם לסידרה קיים גבול L, נאמר שהסידרה מתכנסת.

← אם לסידרה אין קיים גבול, נאמר שהסדרה מתבדרת.

$$|a_n-L|<\varepsilon$$
$$-\varepsilon<a_n-L<\varepsilon \quad |+L$$
$$-\varepsilon+L<a_n<\varepsilon+L$$

תרגיל לדוגמא:

- הוכח לפי הגדרת הגבול כי $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+2}{2n-1}=\frac{1}{2}$
- פיתרון:

$\forall\varepsilon>0, \exists n_0\ge n, n\in\mathbb{N} : |a_n-L|<\varepsilon$

$$\left|\frac{n+2}{2n-1}-\frac{1}{2}\right| \overset{?}{<} \varepsilon$$
$$\left|\frac{2n+4+1-2n}{4n-2}\right| \overset{?}{<} \varepsilon$$
$$\frac{5}{4n-2} \overset{?}{<} \varepsilon \quad |\cdot(4n-2)$$
$$5<4n\varepsilon-2\varepsilon$$
$$n>\frac{5+2\varepsilon}{4\varepsilon}$$

לכן n_0 המקיים $n_0\ge n$:

$$n_0>\frac{5+2\varepsilon}{4\varepsilon}$$

הוא ה- $\left[\frac{5+2\varepsilon}{4\varepsilon}\right]+1$.

(השלם הקרוב מימין)

...ת גבול:

$$\exists \epsilon>0, \forall n_0 \in N, \exists n_0 \le N, |L-a_n| \ge \epsilon$$

תכונות של סדרות מתכנסות

...פט:

לסידרה קיים גבול אז הוא יחיד. סדרה אינה יכולה

...תכנס ל-2 גבולות שונים.

...פט:

סדרה מתכנסת היא חסומה.

לא כל סדרה חסומה, מתכנסת. לדוגמא: $a_n=(-1)^n$.

...פט:

... $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ ו- $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרות מתכנסות:

...ן: $\lim a_n=A$, $\lim b_n=B$.

($\lim_{n\to\infty} C\cdot a_n = C\cdot \lim a_n = C\cdot A$ (קבוע C)

($\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)=\lim a_n+\lim b_n=A+B$

($\lim_{n\to\infty}(a_n\cdot b_n)=\lim a_n\cdot \lim b_n = A\cdot B$

($\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\frac{\lim a_n}{\lim b_n}=\frac{A}{B}$ (עבור $B\ne 0, b_n\ne 0$, $n\in \mathbb{N}$)

סיכום תרגולי הרצאה:

← לסידרה $a_n=(-1)^n$ אין גבול

← אם $\lim_{n\to\infty}|a_n|=|L|$ אזי $\lim_{n\to\infty}a_n\ne L$

← סידרה חסומה היא לא דווקא מתכנסת. דוגמא: $a_n=(-1)^n$.

←

←

←

←

משפט:

אם $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ חסומה ו- $\lim_{n\to\infty}a_n=0$ אזי $\{a_n\cdot b_n\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת ו- $\lim_{n\to\infty}(a_n\cdot b_n)=0$.

לדוגמא:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sin(n)}{n}=\underbrace{\lim_{n\to\infty}\sin(n)}_{\text{חסומה}}\cdot\underbrace{\lim\frac{1}{n}}_{\to 0}=0$$

מבחני התכנסות

← מבחן המנה - תהי $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה חיובית ונתון $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=L$.

$L<1$: $\lim_{n\to\infty}a_n=0$, $L>1$: $\lim_{n\to\infty}a_n=\infty$, $L=1$: הסדרה מתכנסת/מתבדרת

← מבחן השורש - תהי $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה חיובית ונתון $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=L$

$L<1$: $\lim_{n\to\infty}a_n=0$: $L>1$: $\lim_{n\to\infty}a_n=\infty$, $L=1$: הסדרה מתכנסת/מתבדרת

כלל הסנדביץ'

אם יהיו $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ ו- $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$,

אם מתקיים: $\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty} c_n=L$

ואם קיים: $n_0\in\mathbb{N}$ כך שלכל $n>n_0$: $a_n\le b_n\le c_n$

אזי: $\lim b_n=L$.

משפט:

סוג של מבחן המנה

תהי $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה של מס' חיוביים.

אם קיים הגבול $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n-1}}$ אז הסדרה $\{\sqrt[n]{a_n}\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת ומתקיים!

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim\frac{a_n}{a_{n-1}}$$

דוגמא:

$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n!}}=?$ נגדיר: $a_n=\frac{1}{n!}$.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n!}\cdot(n-1)!=\lim\frac{\cancel{(n-1)!}}{n\cdot\cancel{(n-1)!}}=$$

$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0.$ מכיון שקיים הגבול! ⟶ עפ"י המשפט הנתון

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n!}}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n-1}}=0.$$

גבולות חשובים:

(א) אם $c>0$, $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{c}=1$

(ב) $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$

(ג) תהי $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה של מס' חיוביים המקיימת $|a_n|\le n$ אזי: $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=1$

התכנסות של סדרה לאינסוף:

← נאמר שהסדרה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת ל-∞ (ושואפת ל-∞) אם לכל מס' ממשי M, כמעט כל איברי הסדרה גדולים מ-M. סימון: $\lim_{n\to\infty}a_n=\infty$

← נאמר שהסדרה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת ל-$(-\infty)$ אם לכל מס' ממשי L, כמעט כל איברי הסדרה קטנים מ-L. סימון: $\lim_{n\to\infty}a_n=-\infty$.

הגדרה:

נאמר שהסדרה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת במובן הרחב, אם היא מתכנסת במובן הרגיל או מתכנסת ל-∞/ל-$-\infty$.

דוגמא: $\lim_{n\to\infty}2^n=\infty$ מתכנסת במובן הרחב.

מתכנסת = מתכנסת במובן הצ

משפט:

יהי $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרת מס' כך ש- $\lim_{n\to\infty} a_n=0$ ו- $a_n\neq 0$ לכל n, אזי: $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{|a_n|}=\infty$

גבול של סדרות מונוטוניות

משפט:

סדרה מונוטונית וחסומה היא סדרה מתכנסת.

משפט:

סדרה מונוטונית עולה מתכנסת לסופרימום שלה.

משפט/מסקנה:

סדרה מונוטונית יורדת מתכנסת לאינפימום שלה.

משפט:

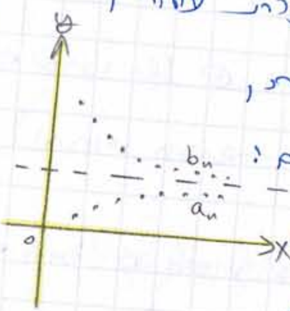
סדרה שהיא מונוטונית היא מתכנסת במובן הרחב.

מסקנות מהמשפט:

← סדרה שהיא מונוטונית עולה ולא חסומה, זה אומר שהיא מתכנסת במובן הרחב ל- ∞.

← סדרה שהיא מונוטונית יורדת ולא חסומה, מתכנסת במובן הרחב ל- $-\infty$.

משפט:



אם $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה מונוטונית עולה,
ו- $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה מונוטונית יורדת,
ונניח שמתקיימים התנאים הבאים:

א) לכל $n\in\mathbb{N}$, $a_n<b_n$

ב) $\lim_{n\to\infty}(b_n-a_n)=0$

אזי 2 הסדרות מתכנסות לאותו גבול!

המספר e

הגדרה:

המס' e מופיע בתחומים רבים של המתמטיקה,
נקבע הבסיס של הלוגריתמים הטבעי (log).

מקובל להציג את e כגבול של הסדרה $a_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

כך ש: $$\boxed{\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e}$$

ערכו של e הינו: $e\cong 2.71828...$

תחום ההגדרה שלו הינו: $\{2<e<3\}$

המס' e מופיע בנוסחאות חישוב ריבית דריבית
הכלכלה ובנוסחאות דעיכה רדיואקטיבית בפיזיקה
ונוסחאות גידול אוכ' בביולוגיה. כמו כן: $\ln x=\log_e x$.

ההוכחה לאי רציונליות של e התגלתה ע"י לאונרד אוילר
בשנת 1737. בשנת 1873 הוכיח צ'ארלס הרמיט כי e
אינו מס' אלגברי כלומר, e אינו שורש של פולינום שמקדמיו
רציונליים. עדיין לא ידוע אם המס' e^e, 2^e הם אלגבריים.

משפט:

תהי $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה המקיימת:

$$\forall n\in\mathbb{N},\ \underbrace{a_n\neq 0}_{\text{I תנאי}},\ \underbrace{\lim_{n\to\infty}a_n=\infty}_{\text{II תנאי}}$$

אזי:

$$\lim\left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n}=e$$

$$\lim\left(1-\frac{1}{a_n}\right)^{a_n}=\frac{1}{e}$$

משפט:

תהי $\{a_n\}$ סדרה המקיימת:

$$\forall x\in\mathbb{R},\ \forall n\in\mathbb{N},\ a_n\neq 0,\ \lim_{n\to\infty}a_n=\infty$$

אזי:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{a_n}\right)^{a_n}=e^x$$

תתי סדרות

גדרה:

הי $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ סידרה נתונה ותהי $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ סידרה

נוטונית עולה של מס' טבעיים.

 לכל $k\in\mathbb{N}$ נגדיר $b_k=a_{n_k}$

 נקבל סידרה חדשה $\{b_k\}_{k=1}^{\infty}$ שתקרא

ת-סידרה של $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

וגמא!

(א) $a_n=\frac{1}{n} \Rightarrow a_n=\{1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\frac{1}{5},\dots\}$

$b_k=\frac{1}{k^2} \Rightarrow b_n=\{1,\frac{1}{4},\frac{1}{9},\dots\}$

אז, $\{b_k\}_{k=1}^{\infty}$ הינה תת סידרה של $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

(ב) $a_n=(-1)^n$

$a_{2n}=(-1)^{2n}=1$ ← תת סידרה האיברים במקומות הזוגיים

$a_{2n-1}=(-1)^{2n-1}=-1$

תת סידרה האיברים במקומות האי-זוגיים.

משפט:

אם הסידרה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת (כולל במובן הרחב) אזי כל תת-סידרה שלה מתכנסת לאותו גבול.

משפט:

אם לסידרה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ קיימות 2 תתי סדרות המתכנסות (גם במובן הרחב) לגבולות שונים, אזי $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ אינה מתכנסת.

← אם מצאתי 2 תתי סדרות המתכנסות לגבולות דומים/שונים, אין לי שום דבר בטוח אז אי אפשר להגיד על הסידרה כי היא מתכנסת.

← אף פעם לא נוכל להגיד כי בדקנו את כל תתי הסדרות של סידרה.

גבולות חלקיים

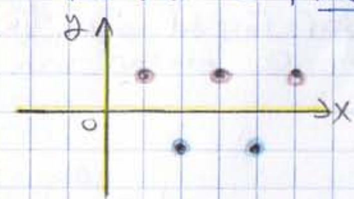
הגדרה:

מס' ממשי a נקרא גבול חלקי של סדרה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ אם קיימת תת-סדרה שמתכנסת ל-a.

← גם פה ניתן להרחיב את מושג ההתכנסות של תת-סדרה ולדבר על תת-סדרה מתכנסת במובן הרחב; תת סדרה שמתכנסת לגבול סופי a, או מתכנסת ל-∞ או ל-$(-\infty)$.

משפט בולצאנו-ויירשטרס

לכל סדרה חסומה, יש תת-סדרה מתכנסת:



מסקנות מהמשפט:

← לכל סדרה חסומה יש לפחות גבול חלקי אחד.

← לכל סדרה יש תת סדרה מתכנסת במובן הרחב.

← לכן, לכל סדרה יש גבול חלקי ותת סדרה שמתכנסת במובן הרחב.

קריטריון קושי להתכנסות סדרות

ניסוח א':

סדרת מס' ממשיים $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת אמ"ם לכל $\varepsilon>0$ קיים מס' טבעי n_0 כך שלכל $m,n>n_0$ מתקיים:

$$|a_m-a_n|<\varepsilon$$

ניסוח ב' (יותר שימושי):

סדרת מס' ממשיים $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת אמ"ם לכל $\varepsilon>0$, קיים מס טבעי n_0, כך שלכל $n>n_0$, קיים מס טבעי p כך ש- $|a_{n+p}-a_n|<\varepsilon$

הערות חשובות:

← החיסרון של הקריטריון הזה שהוא לא אומר לנו מה הגבול. הוא עונה רק על השאלה האם הסדרה מתכנסת.

← היתרון של הקריטריון זה שהוא לא צריך שיהיה לנו הגבול.

← p - גודל זז.

← צ"ל שקיים איזשהו p ! ושהמרחק בין 2 איברים בסדרה בגודל מסויים קטן מ-ε, החל מאיבר מסויים

כאשר הסידרה לא מתכנסת:

ניתן להשתמש בקריטריון קושי על מנת להוכיח שלסידרה אין גבול. והניסוח יהיה כך:

סידרה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ אינה מתכנסת אמ"מ קיים $\varepsilon > 0$, כך שלכל מס' טבעי n_0, $n \geq n_0$ וקיים מס' טבעי p כך ש- $|a_{n+p} - a_n| \geq \varepsilon$.

הערה לא קשורה:

מכפלה של 2 מס' עוקבים נקראת טור טלסקופי.

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

היתרון של היינה הוא בשפת גבול!

הגדרת הגבול עפ"י היינה

גבול בנק' a:

תהי $f(x)$ פונק' מוגדרת בסביבת הנק' $x=a$, פרט אולי לנק' a עצמה.

מס' ממשי L יקרא הגבול של הפונק' $f(x)$, כאשר x שואף לנק' a, אם לכל סידרה $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ שמתכנסת לגבול a ו- $x_n \neq a$ הסידרה $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת לגבול L.

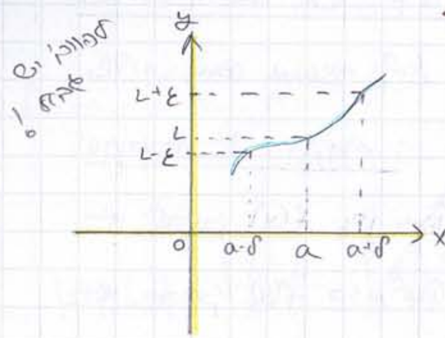
סימון: $\lim_{x \to a} f(x) = L$.

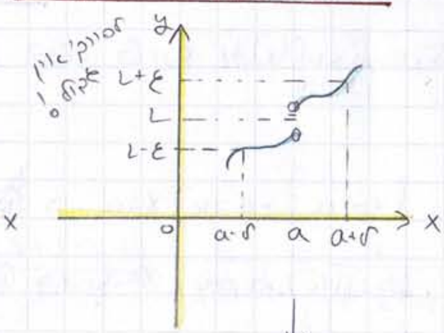
גבול עבור $x \to \infty$ / $x \to -\infty$:

← תהי $f(x)$ פונק' מוגדרת בחצי הישר הימני (a, ∞), מס' ממשי L יקרא הגבול של $f(x)$ כאשר $x \to \infty$, אם לכל סידרה $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ השואפת ל-∞, הסידרה $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת לגבול L. סימון: $\lim_{x \to \infty} f(x) = L$.

← תהי $f(x)$ פונק' מוגדרת בחצי הישר השמאלי $(-\infty, \beta)$. מס' ממשי L יקרא הגבול של $f(x)$ כאשר $x \to -\infty$, אם לכל סידרה $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ השואפת ל-$-\infty$, הסידרה $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת לגבול L. סימון: $\lim_{x \to -\infty} f(x) = L$.

הגדרת גבול לפי קושי





$$\lim_{x\to 3^+} O = \frac{1}{\oplus} = \infty$$

$$\lim_{x\to 3^-} O = \frac{1}{\ominus} = -\infty$$

הגדרה: עבור $x\to a$:

תהי $f(x)$ פונק' מוגדרת בסביבת $x=a$, פרט אולי לעצמה (a),

המס' ממשי L יקרא גבול של $f(x)$ כאשר $x\to a$ ונכתוב

אם לכל $\varepsilon>0$, קיים $\delta>0$ כך שלכל x המקיים $x\neq a$

מתקיים: $0<|x-a|<\delta$ $\quad |f(x)-L|<\varepsilon$

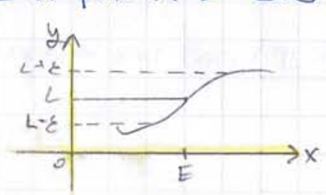
והסימונים לוגיים:

$$\lim_{x\to a} f(x) \longleftrightarrow \forall\varepsilon>0, \exists\delta>0; \forall x: 0<|x-a|<\delta \Rightarrow |f(x)-L|<\varepsilon$$

הגדרה: עבור $x\to\infty$:

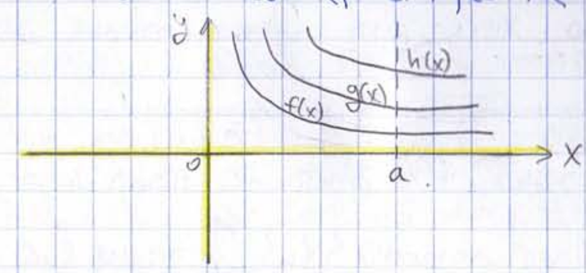
נאמר כי המס' הממשי L הוא הגבול של הפונק' $f(x)$ כאשר $x\to\infty$

אם לכל $\varepsilon>0$ קיים E, כך שלכל $x>E$ מתקיים: $|f(x)-L|<\varepsilon$



...לל הסנדביץ'

...פונק' גם כן (הפונק') בשאיפה של $n\to a$:



...שפט:

...י $f(x)$ ו-$g(x)$ פונק' מוגדרות בסביבת הנק' a,

...ט אולי ל-a עצמה, אם $f(x)$ חסומה בסביבה

ואם $\lim_{x\to a} g(x)=0$ אזי, $\lim_{x\to a} f(x)\cdot g(x)=0$.

...שפט:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1.$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}=1$$

...שפט:

...קיים לפונק' $f(x)$ גבול $\lim_{x\to a} f(x)$ אז הגבול יחיד.

שלילת הגבול עפ"י קושי:

שלילת גבול מעניין לפי קושי: המספר $\lim_{x\to a} f(x)\neq L$ יכול

להתקיים ב-2 מקרים:

← מקרה: $f(x)$ אין גבול ב- $x=a$ (או ב- $x\to a$).

← מקרה: $f(x)$ קיים גבול ב- $x=a$, אך הגבול אינו L.

במילים, השלילה:

$$\exists \varepsilon_0>0,\ \forall \delta>0;\ \exists x:\ 0<|x-a|<\delta \Rightarrow |f(x)-L|\geq\varepsilon_0$$

כלומר, שמצאנו שיש ε_0 מסוים שבו לכל $\delta>0$ מתקיים $|f(x)-L|\geq\varepsilon_0$ אזי שללנו את הגבול L.

דוגמא, שלילת גבול:

הוכח כי $\lim_{x\to 2}\frac{x+2}{x+3}\neq 1$ עפ"י הגדרת קושי.

פתרון: ניקח $\varepsilon=\frac{1}{10}$, ונוכיח כי לכל $\delta>0$ קיים x בסביבה של a ($a=2$) $\Leftarrow (2-\delta, 2+\delta)$ שמקיים $\left|\frac{x+2}{x+3}-1\right|\geq\frac{1}{10}$.

מכיוון שצריך שלכל $\delta>0$ נבדוק את הגבול ע"י בחירת δ מסויימת למשל $\delta=3$ ונבדוק: $\delta\geq3$ ו- $0<\delta<3$,

מקרה $\delta\geq3$: אזי הסביבה: $(-1,5)$ ($2-\delta$, $2+\delta$). ניקח את 5 ו-1-

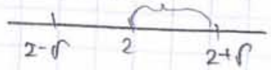
$$|f(x)-L|=\left|\frac{x+2}{x+3}-1\right|=\left|\frac{7}{8}-1\right|=\frac{1}{8}>\frac{1}{10}\ \checkmark$$

(אם היינו מקבלים סימן הפוך היינו מקטינים את ה-ε שבחרנו).

←

כאשר $0<\delta\leq3$:

צריך למצוא x מסוים תלוי δ שיכסה את התחום $0<\delta\leq3$. האם אפשר לקחת את ה



אם ניקח $x=2+\frac{\delta}{2}$:

$$|f(x)-L|=\left|\frac{x+2}{x+3}-1\right|=\left|\frac{x+2-x-3}{x+3}\right|=\frac{1}{|x+3|}\underset{x=2+\frac{\delta}{2}}{=}\frac{1}{\left|2+\frac{\delta}{2}+3\right|}=$$

$$=\frac{1}{\left|5+\frac{\delta}{2}\right|}=\frac{2}{|10+\delta|}\underset{0<\delta\leq3}{=}\frac{2}{10+\delta}\overset{?}{>}\frac{1}{10}$$

$$0<\delta\leq3 \quad /+10$$

$$10<\delta+10\leq13 \quad /$$ הפוך מונה ומכנה והסימן מתהפך

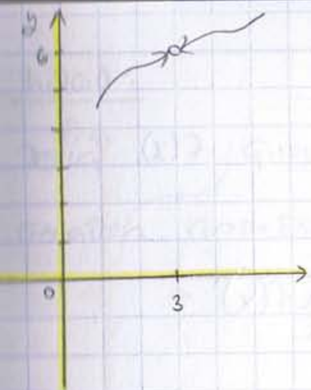
$$\frac{1}{10}>\frac{1}{\delta+10}\geq\frac{1}{13} \quad /\cdot 2$$

$$\frac{2}{10}>\frac{2}{\delta+10}\geq\frac{2}{13}>\left(\frac{2}{20}=\frac{1}{10}\right)$$

$$\Downarrow$$

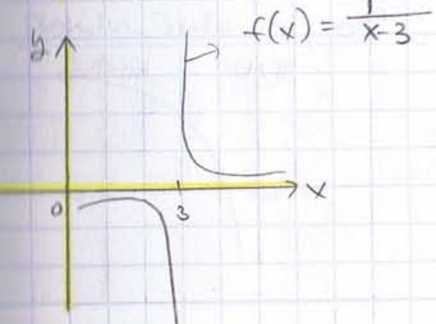
$$\frac{2}{\delta+10}>\frac{1}{10}$$

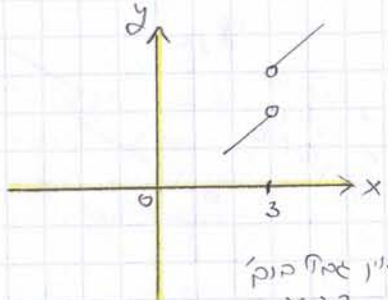
ניסינו את ה-δ (כאשר $\delta>0$) האפשריים והתקיים $|f(x)-L|\geq\varepsilon$ אזי L נשלל כגבול. ■



גבולות חד-צדדיים

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{\cancel{(x-3)}(x+3)}{\cancel{x-3}}=6.$$





אין גבול בנק' $x\to 3$

יהי $f(x)$ פונק' המוגדרת בסביבה ימנית של הנק' a
ז"א, קיים $r>a$ כך ש-$f(x)$ מוגדרת בקטע (a,r)
מס' ממשי L יקרא הגבול הימני של $f(x)$ כאשר $x\to a$
מימין, אם לכל $\varepsilon>0$, קיים $\delta>0$, כך שמתקיים:

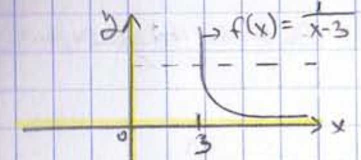
$$\forall x: a<x<a+\delta \Rightarrow |f(x)-L|<\varepsilon$$

סימון: $\lim_{x\to a^+}f(x)=L$

באותו אופן, אם נבחר סביבה שמאלית (r,a). מס' ממשי
יקרא גבול שמאלי של $f(x)$ בנק' a אם לכל $\varepsilon>0$ קיים $\delta>0$
כך שמתקיים: $\forall x: a-\delta<x<a \Rightarrow |f(x)-L|<\varepsilon$

סימון: $\lim_{x\to a^-}f(x)=L$

גבול של פונק' במובן הרחב עפ"י קושי (שאיפה של הפונק' ל-∞ כש-$x\to a$):



יהי $f(x)$ פונק' המוגדרת בסביבת $x\to a$, פרט אולי
ל-a עצמה. נאמר כי הגבול של $f(x)$ כש-$x\to a$
הוא ∞, אם לכל מס' ממשי $M>0$ (גדול ככל שיהיה),
קיים $\delta>0$ כך, שלכל x המקיים $0<|x-a|<\delta$ מתקיים
$f(x)>M$.

ובסימונים לוגיים:

$$\lim_{x\to a}f(x)=\infty \longleftrightarrow \forall M>0, \exists\delta>0, \forall x: 0<|x-a|<\delta \Rightarrow f(x)>M$$

דוגמא:

הוכח עפ"י הגדרת קושי: $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}=\infty$.

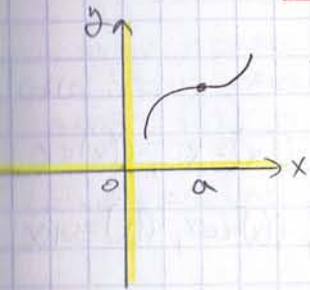
יהי $M>0$, צ"ל כי קיים $\delta>0$, כך שלכל x המקיים $0<|x-0|<\delta$
אזי מתקיים $\frac{1}{x^2}>M \Leftarrow x^2<\frac{1}{M} \Leftarrow x^2-\frac{1}{M}<0 \Leftarrow$

$$\left(x-\frac{1}{\sqrt{M}}\right)\left(x+\frac{1}{\sqrt{M}}\right)<0 \Leftarrow -\frac{1}{\sqrt{M}}<x<\frac{1}{\sqrt{M}} \Leftrightarrow |x|<\frac{1}{\sqrt{M}}$$

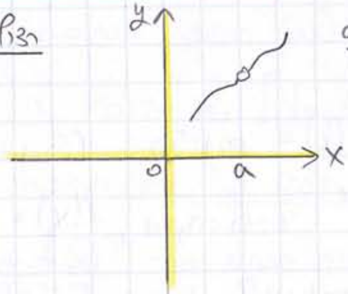
אנו בדרכנו למצוא δ שמקיימת את התנאים ואנו יודעים
כי $0<|x|<\delta$. כך שאם נבחר את $\delta=\frac{1}{\sqrt{M}}$ ברור שלכל
$0<|x|<\delta$ מתקיים $f(x)>M$.

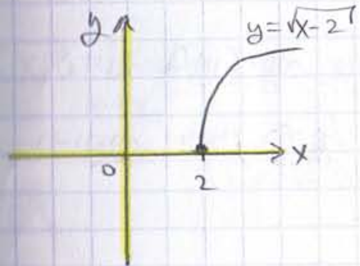
רציפות של פונקציה

רציף ב-a



לא רציף ב-a





ת.ה: $x \geq 2$
הפונק' לא רציפה ב-2
כי לא ניתן להגיע עד לגבול
משמאל לנק'.

הגדרה:

תהי $f(x)$ פונק' מוגדרת בסביבה מסויימת של הנק' $x=x_0$. נאמר כי $f(x)$ רציפה בנק' $x=x_0$ אם מתקיימים 2 התנאים הבאים:

(א) קיים גבול בנק' $\lim_{x\to x_0} f(x)$

(ב) הגבול שווה לערך הפונק' בנק' x_0 $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$

דרך אחרת ← קיים גבול מימין וקיים גבול משמאל, קיים ערך פונק' בנק' וכל השלושה שווים!

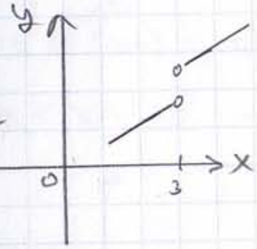
משפט:

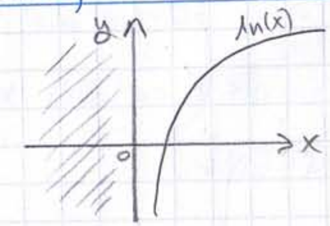
לפונק' $f(x)$ קיים גבול בנק' $x=a$, אם"ם קיימים הגבולות החד-צדדיים ומתקיים:

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x) = L = \lim_{x\to a} f(x)$$

דוגמאות למצב שאין גבול:

יש גבולות חד צדדיים אך אין גבול





דוגמא!

האם קיים $\lim_{x\to 0} \frac{|x|}{x}$?

גבול מצד ימין:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{x} = 1$$

גבול מצד שמאל:

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{|x|}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{-x}{x} = -1$$

⇐ לא קיים גבול בנק' $x\to 0$!

פונקציות אלמנטריות

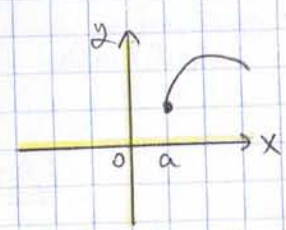
פונק' שתמיד רציפות.

$f(x)=c$, $f(x)=x$, באופן כללי פולינום = $f(x)$

$f(x)=\sin x$, $f(x)=\cos x$, $f(x)=a^x$, מקרה פרטי: $f(x)=e^x$

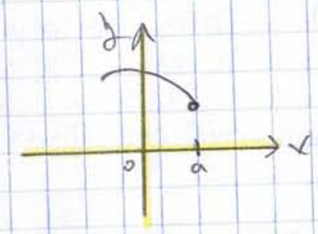
- פעולות חיבור חיסור וכפל; על פונק' אלמנטריות ונקבל פונק' אלמנטרית.

רציפות מימין בנק':



רציפות מימין - גבול מימין = ערך הפונק' בנק' $a \neq$ גבול משמאל (או שלא קיים גבול משמאל).

רציפות משמאל בנק':



רציפות משמאל - גבול משמאל = ערך הפונק' בנק' $a \neq$ גבול מימין (או שלא קיים גבול מימין).

הגדרה פורמלית:

תהי $f(x)$ פונק' מוגדרת בחצי סביבה ימנית $[x_0, r)$ של הנק' x_0. נאמר כי $f(x)$ רציפה מימין בנק' x_0 אם מתקיימים 2 התנאים הבאים:

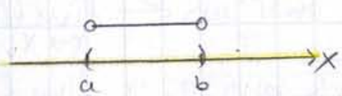
(א) קיים גבול ימני $\lim_{x\to x_0^+} f(x)$

(ב) הגבול הימני שווה לערך הפונק' בנק' $\lim_{x\to x_0^+} f(x) =$

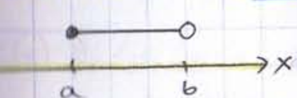
(כנ"ל גם לגבי רציפות משמאל בנק'!).

רציפות בקטע

- נאמר שהפונק' $f(x)$ רציפה בקטע (a,b) אם היא רציפה בכל X $a<x<b$



- נאמר שהפונק' $f(x)$ רציפה בקטע $[a,b)$ אם היא רציפה לכל $a<x<b$ וכן רציפה מימין בנק' a.



- נאמר שהפונק' $f(x)$ רציפה בקטע $(a,b]$ אם היא רציפה לכל $a<x<b$ וכן רציפה משמאל בנק' b.

- נאמר שהפונק' $f(x)$ רציפה בקטע $[a,b]$ אם היא רציפה לכל $a<x<b$ וכן רציפה מימין בנק' a ורציפה משמאל בנק' b.

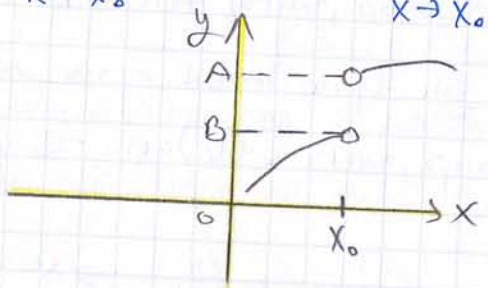
אי רציפות מסוג I :

נק' x_0 תיקרא נק' אי-רציפות מסוג ראשון של הפונק' $f(x)$ אם:

א. $f(x)$ מוגדרת בסביבת x_0, פרט אולי ל-x_0 עצמה.

ב. הגבולות החד צדדיים קיימים, סופיים ושונים זה מזה.

$$\left(\lim_{x\to x_0} f(x) = A\right) \neq \left(\lim_{x\to x_0} f(x) = B\right)$$



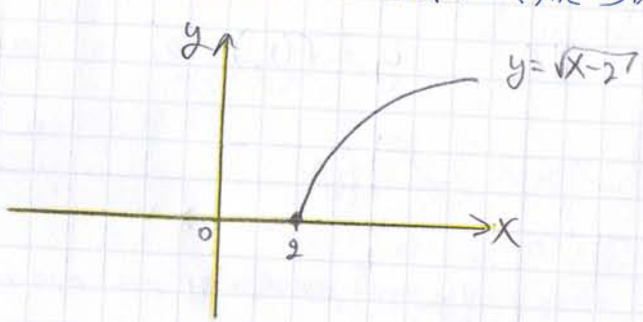
אי רציפות מסוג II :

הגדרה א': כל אי רציפות שאינה סליקה ואינה מסוג I.

הגדרה ב': x_0 תיקרא נק' אי-רציפות מסוג שני של $f(x)$ אם:

א. $f(x)$ מוגדרת בסביבת x_0, פרט אולי ל-x_0 עצמה.

ב. לפחות אחד מהגבולות החד-צדדיים אינו קיים (או במובן ה



משפט:

...ות $f(x)$ רציפה בנק' $x=a$ ואם ידוע ש- $a=\lim_{x\to x_0} g(x)$

אזי:

$$\lim_{x\to x_0} f(g(x)) = f\left(\lim_{x\to x_0} g(x)\right) = f(a)$$

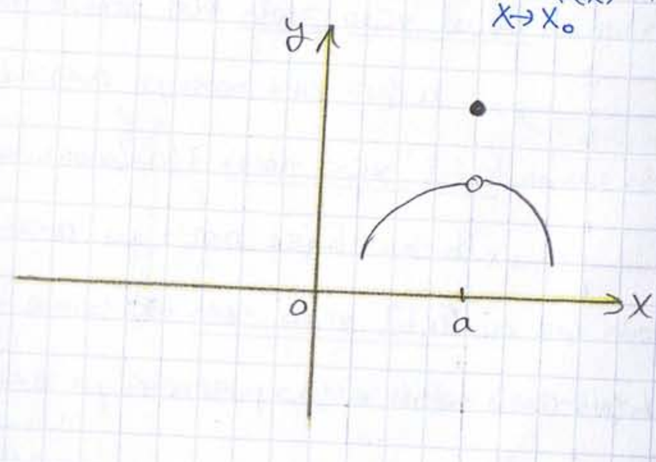
מיון נק' אי-רציפות

...י רציפות סליקה-

...הי $f(x)$ פונק' מוגדרת בסביבת נק' x_0, פרט אולי ל-x_0 ...צמה. נאמר ש-x_0 הינו נק' אי-רציפות סליקה אם:

א. קיים הגבול $\lim_{x\to x_0} f(x)$ ← כלו' הגבול קיים גבול מימין ומשמאל.

ב. $\lim_{x\to x_0} f(x) \neq f(x_0)$ או שהפונק' אינה מוגדרת ב-x_0.

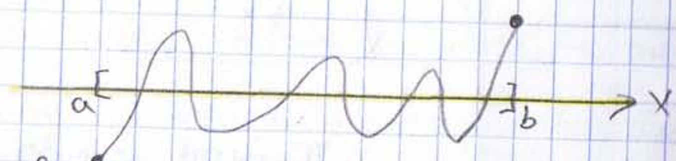


תכונות של פונק' רציפות

הרכבה של 2 פונק' רציפות נותנת פונק' רציפה. למשל: $(e^x)^2$.

משפט:

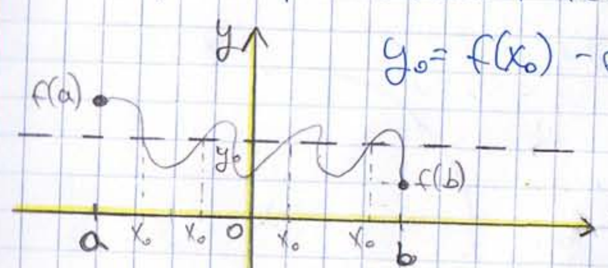
תהי $f(x)$ פונק' רציפה בקטע סגור $[a,b]$. אם $f(a)\cdot f(b)<0$ (כלומר, בקצות הקטע הפונק' מקבלת ערכים מנוגדי סימן) אזי קיימת נק' c כך ש- $f(c)=0$. כלומר, קיים פתרון למשוואה.



לפחות פעם אחת נצטרך לחתוך הציר!

משפט: ערך הביניים של קושי:

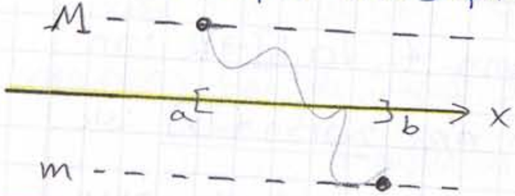
תהי $f(x)$ פונק' רציפה בקטע $[a,b]$, ויהי y_0 מס' כלשהו הנמצא בין $f(a)$ ו- $f(b)$ אזי קיימת נק' $a<x_0<b$ כך ש- $y_0=f(x_0)$



לפחות פעם אחת נצטרך לחתוך את y_0!

המשפט ה-I של ויירשטראס:

תהי $f(x)$ פונק' רציפה בקטע סופי סגור $[a,b]$ אזי $f(x)$ חסומה בקטע M.



המשפט ה-II של ויירשטראס:

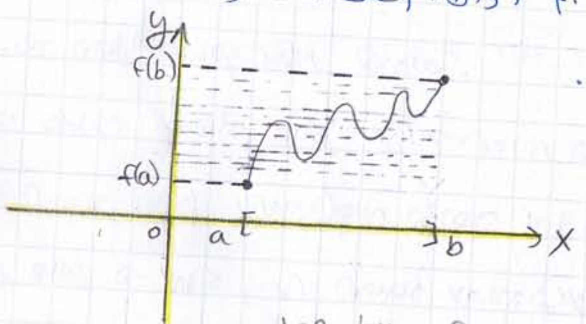
תהי $f(x)$ רציפה בקטע סופי סגור $[a,b]$, אז $f(x)$ מקבלת בקטע הזה את המינימום שלה ואת המקסימום שלה.

כלומר, קיימת נק' $\underline{x}$ בקטע כך ש- $f(\underline{x})\le f(x)$ לכל $a\le x\le b$.

קיימת נק' $\bar{x}$ בקטע כך ש- $f(\bar{x})\ge f(x)$ לכל $a\le x\le b$.

מסקנה מהמשפט:

אם $f:[a,b]\to R$ רציפה, אז התמונה של $f(x)$ היא קטע סגור.



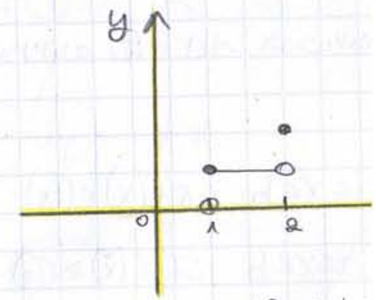
כל נק' מקבלת ערך של הפונק' שכן היא רציפה!

פונק' הפוכות

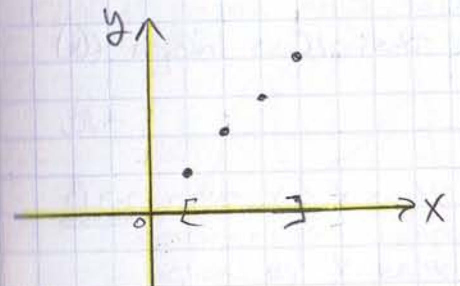
משפט:
תהי $f:[a,b]\to R$ פונק' מונוטונית.
אזי $f(x)$ רציפה אמ"מ התמונה שלה היא קטע סגור. ← רציפות בציר ה-y.

← פונק' מונוטונית רציפה ← התמונה שלה היא קטע סגור.

← פונק' מונוטונית, שהתמונה שלה היא קטע סגור ← הפונק' רציפה.



פונק' מונוטונית בקטע סגור, שאינה רציפה!



פונק' מונוטונית בקטע סגור, שאינה רציפה!

קשר בין פונק' הפוכות:

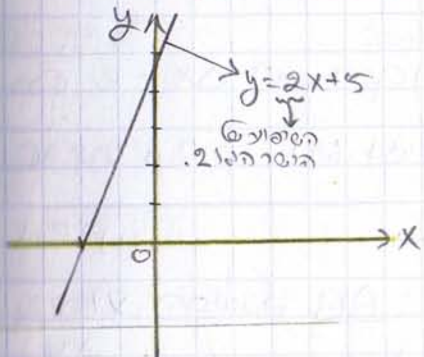
הקשר הוא להפוך את ערכים.

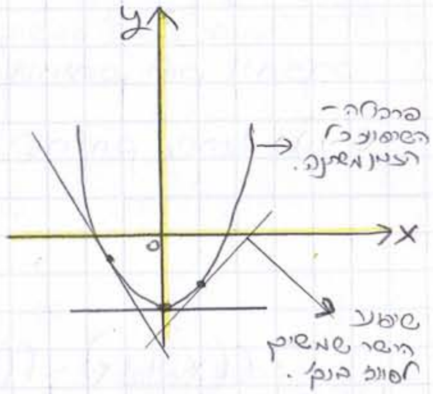
כדי שאפשר להפוך פונק' עליה להיות פונק' -על וחח"ע.

כדי להפוך פונק' עליה להיות רציפה לכן, כדי להפוך את פונק' ה-אמוס, עלי להגדיר עבורה קטע מסוים רק בו.

משפט:
אם $f(x)$ פונק' רציפה ומונוטונית עולה ממש (או יורדת ממש) בקטע $[a,b]$ אזי הפונקציה ההפוכה לה רציפה ומונוטונית.

נגזרות של פונקציה





- אם ישר יורד ← הנגזרת שלילית.
- אם ישר עולה ← הנגזרת חיובית.
- אם ישר מקביל לציר ה-X ← הנגזרת היא 0.

משוואת ישר משיק

הגדרה:

הישר המשיק לגרף של $y=f(x)$ בנק' x_0 (אם הוא קיים)
הוא הישר המתקבל כגבול של הישרים L, כאשר הנק' P שואפת
לנק' P_0. באופן שקול, הישר L_0 לגרף הפונק' בנק' x_0
הוא הגבול של ישר L כאשר $\Delta x \to 0$.

לדוגמא:

* $y=x^2$ — חשב את מש' המשיק לפונק' כאשר $x=3$.

$(3,9)$

$y'=2x.$

$M = y'(3)=6.$ משיק (שיפוע המשיק)

נזכיר במשוואת הישר: $y-y_1=m(x-x_1)$

$y-9=6(x-3)$

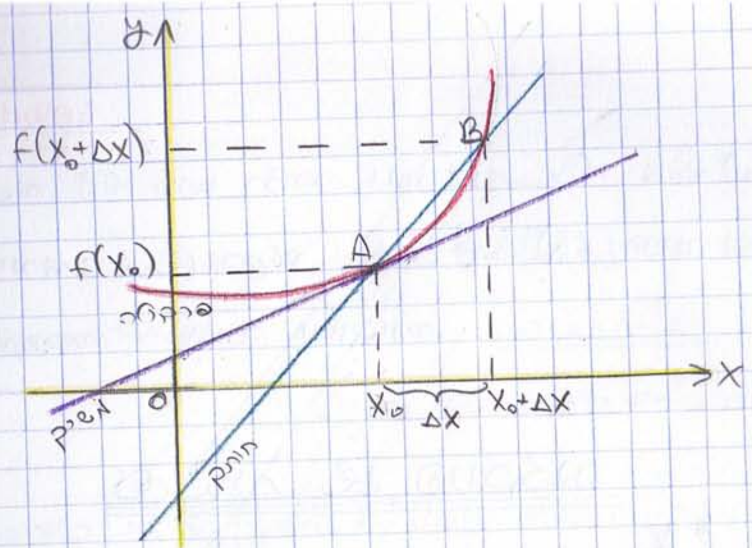
$y=6x-9.$

הקשר הוא כזה:

(1) קיום נגזרת בנק' ⟸ קיום משוואת משיק לפונק' בנק' זו.

(2) אי קיום נגזרת בנק' ⟸ צריך לבדוק את הפונק'.

←



ככל ש-Δx קטן ויקטן, החותך יקטן ויתקרב
להיות משיק. ואז נגיע לחותך שהוא "כמעט"
משיק.

שיפוע החותך AB: ($a=\frac{\Delta y}{\Delta x}$ שיפוע ישר)

$$m=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{x_0+\Delta x-x_0}$$

$$m=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

הגדרת הנגזרת:

- $f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ עפ"י ההגדרה בכיתה

$\Updownarrow$ שקול

- $f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ עפ"י ההגדרה שבספר

הקשר בין רציפות וגזירות

משפט עזר:
תהי $f(x)$ פונק' המוגדרת בסביבה מסויימת של הנק' $x=x_0$.
אזי $f(x)$ גזירה בנק' x_0 אמ"ם קיים מס קבוע A וקיימת פונק' $\alpha(\Delta x)$ המקיימת $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\alpha(\Delta x)=0$ כך ש-

$$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=A\cdot\Delta x+\alpha(\Delta x)\cdot\Delta x.$$

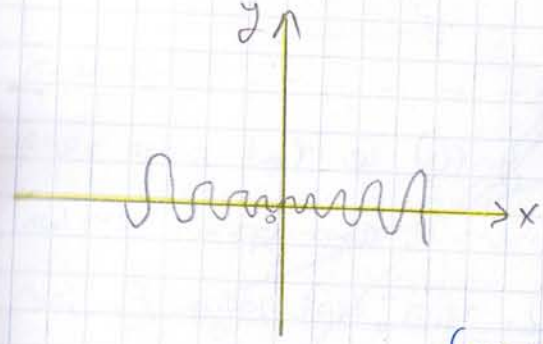
משפט:
אם פונק' $f(x)$ גזירה בנק' x_0 אז היא רציפה בנק' x_0.

* האם הכיוון השני (ההפוך) נכון?
לא! פונק' רציפה בנק' אינה בהכרח גזירה:
להלן דוגמאות נגדיות: $f(x)=\sqrt[3]{x^2}$, $f(x)=|x|$, ...

* אם לא ידוע לגבי פונק' נתונה רציפות בנק' x_0 ומבקשים לחשב נגז
בנק' x_0:
דרך א': נבדוק רציפות ב-x_0. → לא רציפה ← לא גזירה
→ רציפה ← נגזור עפ"י (נוסחא
דרך ב': נגזור עפ"י הגדרה, חשוב לב שחייב להיות לפונק' ערך בנק' הבעייתית.

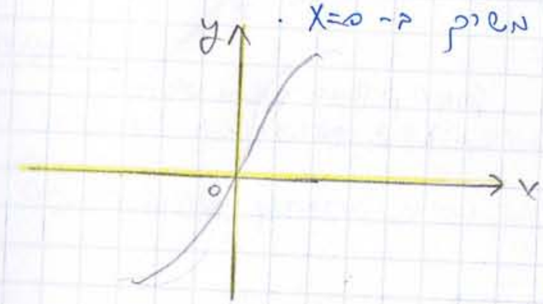
מקרים פרטיים:

$$y=\begin{cases} x\cdot\sin\frac{1}{x} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$$



רציפה ב-$x=0$.
לא גזירה ב- $x=0$
כי לא קיים הגבול של הג' הנגזרת.

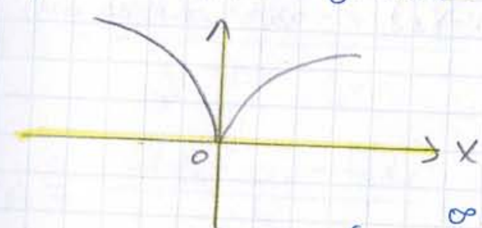
המקרה הזה אין ישר משיק ב- $x=0$.



$y=\sqrt[3]{x}$

- רציפה ב- $x=0$
- אינה גזירה ב- $x=0$

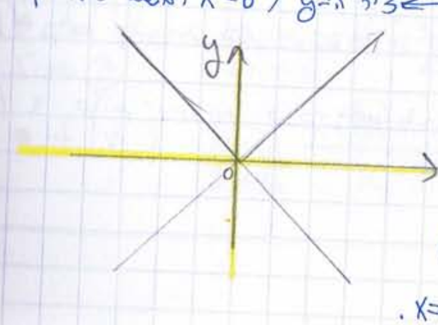
המקרה הזה קיים ישר משיק ← ציר ה-y / $x=0$ (משוואת משיק).



$y=\sqrt[3]{x^2}$

- רציפה ב- $x=0$.
- אינה גזירה (נגזרת מימין $=\infty$, נגזרת משמאל $=-\infty$) ב- $x=0$.

המקרה הזה קיים ישר משיק ← ציר ה-y / $x=0$ (משוואת משיק).



4) $y=|x|$

- רציפה ב- $x=0$.
- לא גזירה ב- $x=0$ (נ. מימין $=1$, נ. משמאל $=-1$)

המקרה הזה לא קיים ישר משיק ב- $x=0$.

נגזרות של פונק' סתומות

פונק' מפורשת היא פונק' מהצורה:

(1) $y=f(x)$

(2) $5y+20x=15 \Rightarrow y=-4x+3$.

(כלומר y-ים באגף אחד ו-x-ים באגף השני).

פונק' סתומה:

היא פונק' שאנו לא יכולים לבודד אותה לצורה מפורשת.

דוגמא:

(1) $y^3+y^2+5x=0$

(2) $\sin y+\cos x+e^{xy}+\ln(5y)=8$.

* בפונק' סתומה למרות שאני לא יכול לפרש את הפונק' אני כן יכול להגיע לנגזרת בצורה מפורשת.

דוגמא:

$x^2+5y^2+3xy=8$

(פונק' סתומה כי יש שני y בהצבות שונות).

$2x+10yy'+3\cdot 1\cdot y+3x\cdot 1\cdot y'=0$

$y'(10y+3x)=-2x-3y$

$$y'=\frac{-2x-3y}{10y+3x}.$$

נגזרות של פונק' טריגונומטריות הפוכות

* $y=\arcsin(u) \Rightarrow y'=\frac{u'(x)}{1-[u(x)]^2}$
* $y=\arccos(u) \Rightarrow y'=\frac{-u'(x)}{1-[u(x)]^2}$
* $y=\arctan(u(x)) \Rightarrow y'=\frac{u'(x)}{1+[u(x)]^2}$
* $y=\text{arccot}(u(x)) \Rightarrow y'=\frac{-u'(x)}{1+[u(x)]^2}$

גיעו לאחת הנוסחאות תוך שימוש במשפט הזה:

משפט:

י $y=f(x)$ פונק' הפיכה ורציפה בסביבת הנק' x_0.

ם $f(x)$ גזירה בנק' x_0 ואם $f'(x_0)\neq 0$

= גם הפונק' ההפוכה שה $x=g(y)$ גזירה

נק' $y_0=f(x_0)$ ומתקיים:

$$g'(x_0)=\frac{1}{f'(x_0)}$$

נגזרות חד-צדדיות

הגדרה:

- תהי $f(x)$ מוגדרת בסביבה ימנית של הנק' $X=X_0$.
  הגבול $\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$, אם קיים, נקרא נגזרת ימנית של $f(x)$ בנק' x_0. ונסמן: $f'_+(x_0)$

- תהי $f(x)$ מוגדרת בסביבה שמאלית של הנק' $X=X_0$.
  הגבול $\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$, אם קיים, נקרא נגזרת שמאלית של $f(x)$ בנק' x_0. ונסמן: $f'_-(x_0)$

משפט:

תהי $f(x)$ פונק' מוגדרת בסביבה מסויימת של הנק' x_0 אזי $f(x)$ גזירה בנק' x_0 אמ"מ קיימות הנגזרות החד-צדדיות בנק' x_0 והן שוות $f'_+(x_0)=f'_-(x_0)=f'(x_0)$
(או אם קיימת הנגזרת).

הערה חשובה:

$$f(x)=\begin{cases}x^2 & x\geq 1\\ 2x+3 & x<1\end{cases}$$

תחילה חייבים לבדוק רציפות. למשל הנגזרות החד צדדיות של ה קיימות ושוות ל-2 אולם ה עצמה, אינה גזירה (כיוון שהיא לא רציפה).

נגזרת של פונק' מהצורה $y=f(x)^{g(x)}$

$$y=x^{\sin x}$$

פונק' ← ; פונק'

$\neq$ $y=x^n \Rightarrow y'=n\cdot x^{n-1}$

$\neq$ $y=a^x \Rightarrow y'=a^x\cdot\ln a$

I. מוסיפים ln לשני האגפים:

$$\ln y=\ln x^{\sin x}$$

II. שימוש בחוקי לוגים:

$$\ln y=\sin x\cdot\ln x$$

III. גוזרים בפונק' סתומה:

$$\frac{y'}{y}=\cos x\cdot\ln x+(\sin x)\cdot\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$y'=y\left(\cos x\cdot\ln x+\frac{1}{x}\cdot\sin x\right)$$

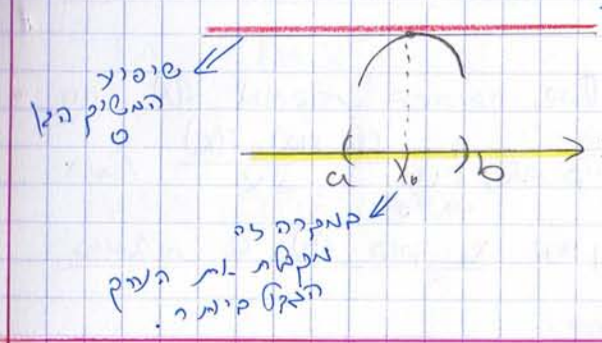
IV. נציב חזרה את ה-y:

$$y'=x^{\sin x}\cdot\left(\cos x\cdot\ln x+\frac{1}{x}\cdot\sin x\right).$$

משפט פרמה

תהי $f(x)$ מוגדרת בקטע פתוח (a,b) וגזירה בנק' x_0 פנימית. אם $f(x)$ מקבלת בנק' x_0 את ערכה הגדול ביותר או הקטן ביותר אזי: $f'(x_0)=0$.

משמעות גאומטרית:



משפט רול

תהי $f(x)$ פונק' מוגדרת בקטע $[a,b]$ המקיימת את התנאים:

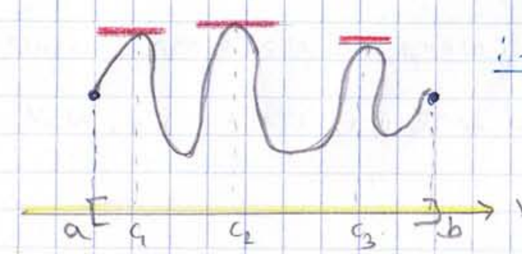
(א) $f(x)$ רציפה בקטע הסגור $[a,b]$.

(ב) $f(x)$ גזירה בקטע הפתוח (a,b)

(ג) $f(a)=f(b)$

אז קיימת נק' c (לפחות אחת) $(a<c<b)$ כך ש- $f'(c)=0$.

משמעות גאומטרית:



שימושים במשפט רול!

הוכחת יחידות פיתרון של משוואה!

נתון,

$$(*)\quad x^{2003}+2003x=2003$$

הוכח כי למשוואה יש בדיוק פיתרון אחד.

פיתרון:

I. שלב א': נוכיח כי יש לפחות פיתרון אחד:

$$f(x)=x^{2003}+2003x-2003$$

* $f(x)$ רציפה (פולינום).
* $f(0)<0$, $f(1)>0$ $\Leftarrow$ לפי משפט ערך הביניים מכיוון ש- $f(x)$ רציפה ומתקיים $f(0)$ ו- $f(1)$ שוני סימן, אז קיימת נק' t, $0<t<1$ שבה $f(t)=0$.

$\Downarrow$

יש לפחות פיתרון 1.

II. הוכחת יחידות פיתרון:

* נניח בשלילה שקיימים 2 פיתרונות (a ו- b): $f(a)=f(b)=0$ (I)
* $f(x)$ רציפה (פולינום). (II)
* $f(x)$ גזירה: (III) $f'(x)=2003x^{2002}+2003$ (הנגזרת היא פולינום).

$\Leftarrow$ (I)(II)(III) לפי משפט רול, קיימת נק' c, $a<c<b$, שבה $f'(c)=0$.

$\Leftarrow$ $2003c^{2002}+2003=0$

$c^{2002}=-1$

לא ייתכן! סתירה להנחה שקיימים 2 פתרונות.

נגדיר:

$f(x)=\arctan x$ בקטע $[0,x]$ (כי $x>0$).

I ⇐ הפונק' רציפה: לכל x.

II ⇐ הפונק' גזירה:

$$f'(x)=\frac{1}{1+x^2}$$

הנגזרת מוגדרת לכל x.

⇓

הפונק' גזירה לכל x.

I II ⇐ לפי משפט לגרנז' נובע כי קיימת נק' c, $0<c<x$ כך ש:

$$f'(c)=\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$$

$$\frac{1}{1+c^2}=\frac{\arctan x-\arctan 0}{x}$$

נבדוק את c:

$0<c<x \quad |()^2$ (חיובי)

$0<c^2<x^2 \quad |+1$

$1<c^2+1<x^2+1$

$1>\frac{1}{c^2+1}>\frac{1}{x^2+1}$

$$1>\frac{\arctan x-\arctan 0}{x}>\frac{1}{1+x^2} \quad |\cdot x \ (x>0)$$

$$x>\boxed{\arctan x>\frac{x}{1+x^2}}$$

משפט לגראנז'

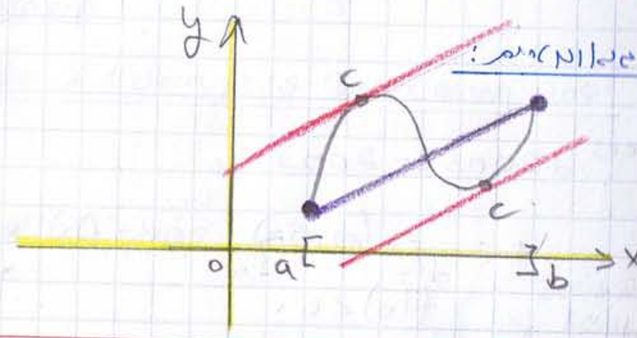
יהי $f(x)$ רציפה ב- $[a,b]$ וגזירה ב- (a,b)

אזי קיימת נק' c כך ש- $a<c<b$ כך ש-

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

→ ... הישר העובר בנק' ... והמקביל למשיק ... הנק' c.

משמעות גאומטרית:



שימושים במשפט לגרנז'!

הוכח ע"י שימוש במשפט לגרנז' את אי השוויון:

(*) $\boxed{\frac{x}{1+x^2}<\arctan x}$

$\forall x>0.$

פתרון:

$$\frac{x}{1+x^2}<\arctan x-0.$$

$$\frac{x}{1+x^2}<\underbrace{\arctan x-\arctan 0}_{f(b)-f(a)}$$

← ... לתבנית שהיא רציפה וגזירה וכל מה ש... להשתמש בלגראנז').

משפט הערך הממוצע של קושי

יהיו $f(x)$ ו-$g(x)$ 2 פונק' רציפות בקטע הסגור $[a,b]$ וגזירות בקטע הפתוח (a,b).

ובנוסף $g'(x)\neq 0$ לכל $a<x<b$, אזי קיים נק' c $a<c<b$ כך ש-

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

(שימושים ⇐ קומה מעל למשפט לגרנג'!)

כלל לופיטל

אם $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} \to \frac{0}{0}$ או $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ אזי ניתן לחשב:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

x_0 יכולה להיות מהצורה $x\to a$, $x\to a^+$, $x\to a^-$, $x\to\infty$, $x\to-\infty$

הרחבה I:

אם $\lim_{x\to x_0} f(x)\cdot g(x) \to 0\cdot(\pm\infty)$

אזי במקרה זה אנו נגדיר שבר שקול:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}} = \frac{\infty}{\infty}.$$

אם מהצורה של $\frac{0}{0}$ או $\frac{\infty}{\infty}$ אז

מותר לי להשתמש בלופיטל.

הרחבה II:

אם $\lim_{x\to x_0} f(x)^{g(x)} \to 1^{\infty},\ 0^{0},\ \infty^{0}$

אז במקרה זה נגדיר את הצורה השקולה:

$$\lim[e^{\ln f(x)}]^{g(x)} \underset{\text{לפי חוקי חזקות}}{=} \lim_{x\to x_0} e^{\ln f(x)\cdot g(x)} = e^{\lim_{x\to x_0}(g(x)\cdot \ln f(x))}.$$

שימוש בחקירת פונקציות

(א) תח"ה:

בשברים, בשורש זוגי, ב- $\log$, ב- $\ln$ ובפונק' טריג'

(ב) נח' עם הצירים:

נק' חיתוך עם ציר x ⇐ מציבים $y=0$ ופותרים.

" עם ציר y ⇐ מציבים $x=0$ ופותרים.

(ג) נק' קיצון מקומי + תחומי עליה וירידה:

משפט 1:

תהי $f(x)$ פונק' גזירה בקטע (a,b) אזי $f(x)$ פונק' קבועה בקטע אם"ם $f'(x)=0$ לכל x ב-(a,b).

משפט 2:

יהיו $f(x)$ ו-$g(x)$ פונק' גזירות ב- (a,b). אם $f'(x)=g'(x)$ לכל x בקטע (a,b) אזי קיים קבוע c כך ש- $g(x)=f(x)+c$ לכל $a<x<b$.

משפט 3:

תהי $f(x)$ גזירה בקטע (a,b) אזי:

(1) $f(x)$ מונוטונית עולה אם"ם $f'(x)\geq 0$ לכל $a<x<b$.

(2) $f(x)$ מונוטונית יורדת אם"ם $f'(x)\leq 0$ לכל $a<x<b$.

דוגמא לכך שלופיטל לא עוזר:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \overset{L}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{1}{\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{x} =$$

($\frac{\infty}{\infty}$ לופיטל) ($\frac{\infty}{\infty}$ לופיטל)

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}}{1} = \lim_{x\to\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

נכנסנו ללולאה!

הדרך הנכונה:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \lim_{x\to\infty}\sqrt{\frac{x^2}{x^2+1}} = 1.$$

להכניס את x הכוונה לשורש (מותר כי $x>0$ כשואפים ל- $+\infty$).

כאשר $x\to-\infty$:

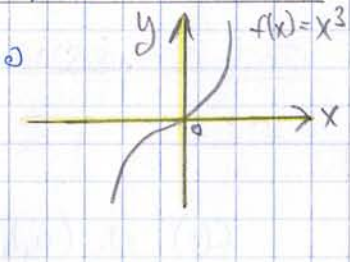
$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \lim_{x\to-\infty} -\sqrt{\frac{x^2}{x^2+1}} = -1.$$

משפט 4:

(א) אם $f'(x)>0$ לכל x בקטע (a,b) אזי $f(x)$ פונק' מונוטונית עולה ממש ב-(a,b).

(ב) אם $f'(x)<0$ לכל x בקטע (a,b) אזי $f(x)$ פונק' מונוטונית יורדת ממש ב-(a,b).

חד כיווני. לא! דוגמא נגדית:



$f'(x)=3x^2$ → פונק' עולה ממש.
$f'(0)=0$
הנגזרת לא גדולה מ-0.

מבחן נגזרת I:

תהי x_0 נק' קריטית של $f(x)$.

נק' קריטית:
נק' בה הנגזרת מתאפסת או שהפונק' אינה גזירה באותה נק'.

ונניח כי $f(x)$ רציפה בנק' x_0 וגזירה בסביבת הנק' x_0, פרט אולי ל-x_0 עצמה.

מציבים את סביבת הנק' בנגזרת

(א) אם

x	O	x_0	O
$f'(x)$	+		−
$f(x)$	↗		↘

אזי ב-x_0 יש נק' מקסימום מקומית.

(ב) אם

x	O	x_0	O
$f'(x)$	−		+
$f(x)$	↘		↗

אזי ב-x_0 יש נק' מינימום מקומית.

(ג) אם

x	O	x_0	O
$f'(x)$	+		+
$f(x)$	↗		↗

x	O	x_0	O
$f'(x)$	−		−
$f(x)$	↘		↘

אזי ב-x_0 אין נק' מינימום מקומית ואין נק' מקסימום מקומית.

שיטה נוספת: מבחן נגזרת II:

תהי x_0 נק' קריטית של $f(x)$, ונניח כי $f(x)$ גזירה פע[...] בנק' x_0.

(א) אם $f''(x)>0$ אזי בנק' x_0 יש נק' מינימום מקומית [...]

(ב) אם $f''(x)<0$ אז ב-x_0 יש נק' מקסימום מקומית של [...]

(ג) אם $f''(x)=0$ אזי לא ניתן תשובה לגבי x_0 האם ה[...] מינימום/~~מקסימום~~ מקומי, בעזרת שיטה זו.

(ד) מינימום ומקסימום מוחלט:

הגדרה:

תהי $f(x)$ מוגדרת בתחום D.

← נק' $x_0 \in D$ תיקרא נק' מקסימום מוחלט של $f(x)$ בתחום D, אם לכל $x \in D$ מתקיים $f(x) \le f(x_0)$

← הנק' תיקרא נק' מינימום מוחלט של $f(x)$ בתחום D, אם לכל $x \in D$ מתקיים $f(x) \ge f(x_0)$

בקטע $[a,b]$: B היא נק' MAX מקומית שהיא גם MAX מוחלט. A היא נק' מינ' מקומית שהיא גם מינ' מוחלט.

בקטע $[c,d]$:

היא נק' MAX מוחלט.

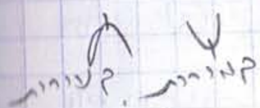
d היא נק' מינ' מוחלט.

משפט:

תהי $f(x)$ פונק' רציפה בקטע סגור $[a,b]$, אזי ל- $f(x)$ יש לפחות נק' מינ' מוחלט אחת ונק' MAX מוחלט אחת בתוך הקטע.

אם x_0 נק' מינ'/MAX מוחלט היא חייבת להיות נק' קריטית של $f(x)$ או אחת מקצוות הקטע.

(ה) תחומי קמירות וקעירות ונק' פיתול:

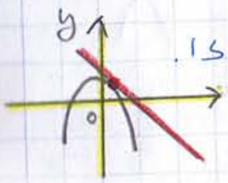


הגדרה:

תהי $f(x)$ פונק' גזירה בנק' x_0.

← $f(x)$ קמורה (קמורה כלפי מטה) בנק' x_0 אם קיימת סביבה של הנק' x_0 אשר בה הגרף של הפונק' נמצא מעל הישר המשיק לגרף בנק' זו.

← $f(x)$ קעורה (קמורה כלפי מעלה) בנק' x_0 אם קיימת סביבה של הנק' x_0 אשר בה הגרף של הפונק' נמצא מתחת לישר המשיק לפונק' בנק' זו.



משפט:

תהי $f(x)$ גזירה פעמיים בקטע (a,b).

(א) אם לכל x בקטע, $f''(x)>0$ אזי $f(x)$ קמורה בקטע (a,b). $\cup$

(ב) אם לכל x בקטע, $f''(x)<0$ אזי $f(x)$ קעורה בקטע (a,b). $\cap$

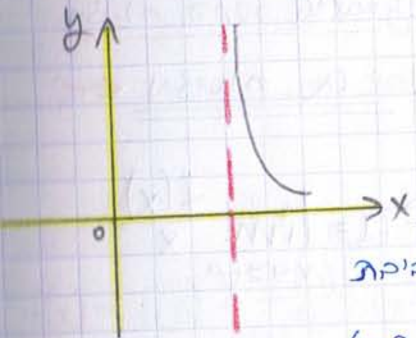
משפט:

תהי $f(x)$ פונק' גזירה פעמיים בסביבת הנק' x_0.
אם הנגזרת השנייה מחליפה ב-x_0 את סימנה אזי x_0 היא נק' פיתול של $f(x)$.

טבלת הנגזרת השנייה:

x	x_0^-	x_0	x_0^+	x_1	x_1^+
y''	$+$		$-$		$-$
y	$\cup$		$\cap$		$\cap$
		נק' פיתול!		לא נק' פיתול!	

(1) אסימפטוטות:

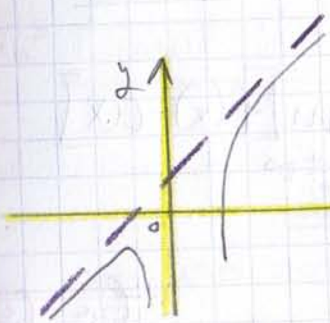


אסימפטוטה אנכית:

הגדרה:

תהי $f(x)$ פונק' מוגדרת בסביבת ימנית או שמאלית של $x=a$, פרט אולי ל-$x=a$ עצמה. אם לפחות אחד מהגבולות החד-צדדיים קיים במובן הרחב ושווה ל-$\pm\infty$, אזי נאמר ש- $x=a$ הינה אסימפטוטה אנכית של הגרף.

אסימפטוטה משופעת:



הגדרה:

(א) הישר $y=ax+b$ נקרא אסימפטוטה משופעת של $f(x)$ ב- $x\to\infty$ אם:

$$\lim_{x\to\infty}[f(x)-(ax+b)]\to 0$$

(ב) הישר $y=ax+b$ נקרא אסימפטוטה משופעת של $f(x)$ ב- $x\to-\infty$ אם:

$$\lim_{x\to-\infty}[f(x)-(ax+b)]\to 0.$$

←

טור טיילור

תהי $f(x)$ פונק' גזירה $(n+1)$ פעמים בסביבת הנק' $x=a$.

ותהי x נק' כלשהי בסביבה זו. אזי:

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}\cdot(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3+\dots$$
$$\dots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\underbrace{R_n}_{\text{השארית/השגיאה של לגראנז'}}$$

וזה אומר שהתקרבתי/נתתי איזשהו פולינום שהוא קרוב מאוד לפונק' המקורית אבל תמיד יש איזושהי שגיאה/שארית וזה נקרא R_n.

$$R_n=\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}\cdot(x-a)^{n+1}$$

כאשר c נק' בין x ל-a.

מקרה פרטי - טור מקלורין

זהו מקרה פרטי של טור טיילור עבור $a=0$.

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}\cdot x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\dots+$$
$$\dots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\underbrace{\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}x^{n+1}}$$

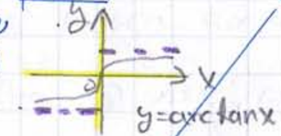
כאשר c נק' בין x ל-0.

מציאת הישר $y=ax+b$:

← מציאת a:

$$a=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}$$

- $\boxed{\pm\infty}$ אין אס' משופעת.
- $\boxed{a=0}$ כנראה מקרה פרטי של אס' אופקית (אם b סופי).



- $\boxed{else}$ אס' משופעת (בהנחה ש-b סופי).

← מציאת b:

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}[f(x)-ax]$$

- $\pm\infty$ אין אס' משופעת.
- else יש אס' משופעת.

(ג) גרף:

משרטטים ציר מספרים עם כל התחומים שמצאנו עד כה ומעריכים גרף פונק' כלשהו, מדוייק ככל האפשר.

טבלת האינטגרלים (עמ' 233 בספר)

	האינטגרל הלא מסויים	$F(x)$
1	$\int x^n\,dx \quad (n\neq -1)$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}+C \quad (n\neq -1)$
	← הנגזרת הפנימית היא גודל קבוע	
2	$\int \frac{1}{x}\,dx$	$\ln\lvert x\rvert+C$
3	$\int \sin x\,dx$ *גם אם כפול הנגזרת הפנימית	$-\cos x+C$
4	$\int \cos x\,dx$ *גם אם כפול הנגזרת הפנימית	$\sin x+C$
5	$\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx$	$\tan x+C$
6	$\int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx$	$-\cot x+C$
7	$\int a^x\,dx$	$\frac{a^x}{\ln a}+C$
8	$\int e^x\,dx$	e^x+C
9	$\int \frac{1}{x^2+a^2}\,dx \quad (a>0)$	$\frac{1}{a}\cdot\arctan\frac{x}{a}+C \quad (a>0)$
	← חשוב!!!	
10	$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} \quad (a>0)$	$\arcsin\frac{x}{a}+C \quad (a>0)$

תכונות של אינטגרלים ←

* $\int a f(x)\,dx = a\cdot\int f(x)\,dx$

* $\int [f(x)\pm g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx$

האינטגרל הלא מסויים

פונק' קדומות ואינטגרלים מיידיים:

$\int x\,dx \leftarrow$ x שתגזר בגזירה לפי

$\int x\,dy \leftarrow$ y שיתגזר בגזירה לפי

$$\int 2x\,dx = \underbrace{x^2+C}_{\text{הפונק' הקדומה } F(x)+C}$$

הגדרה:

ונק' $F(x)$ (בדר"כ אות גדולה) תיקרא <u>פונק' קדומה</u>

שפונק' $f(x)$ בתחום D אם לכל x בתחום D

מתקיים: $F'(x)=f(x)$

הגדרה:

הי $f(x)$ פונק' בעלת פונק' קדומה $F(x)$,

ואז G הפונק' הקדומות $F(x)+C$ של הפונק'

$f(x)$ נקרא <u>האינטגרל הלא מסויים של $f(x)$</u>,

ומסומן ע"י: $\int f(x)\,dx = F(x)+C$

* שיטות אינטגרציה!

I. אינטגרציה ע"י הצבה:

$$(*)\quad \int \frac{\ln x}{x}\,dx = \int t\,dt = \frac{t^2}{2}+c = \frac{1}{2}\ln^2 x + c.$$

נציב: $t=\ln x$

נגזור: $1\cdot dt = \frac{1}{x}dx$

$$dt = \frac{dx}{x}$$

II. אינטגרציה בחלקים:

$$\int u'(x)\cdot v(x)\,dx = u(x)\cdot v(x) - \int u(x)\cdot v'(x)\,dx$$

$$(*)\quad \int \ln x\,dx = x\cdot\ln x - \int x\cdot\frac{1}{x}\,dx = x\ln x - x + c.$$

$v=\ln x$ $\quad u=x$

$v'=\frac{1}{x}$ $\quad u'=1$

** מציאת C:

I. מחשבים את האינטגרל, מקבלים שאוסף הפונק' הקדומות האפשרי.

$$\int f(x)\,dx = F(x)+c$$

II. נציב נק' שמקיימת את הפונק' הקדומה ונמצא את הפונק' הספציפית שעוברת דרך אותה נק'.

ומכאן, נמצא את C.

II. אינטגרציה ש ביטויים מהצורה $\frac{P(x)}{Q(x)}$

א. מקרה פרטי:

$$\boxed{\int \frac{f'(x)}{f(x)} = \ln|f(x)| + C}$$

$$(*)\ \int \frac{2x^2}{x^3+7}\,dx = \frac{2}{3}\cdot\int \frac{\frac{3}{2}\cdot 2x^2}{x^3+7} =$$

$$\frac{2}{3}\cdot\int \frac{3x^2}{x^3+7} = \frac{2}{3}\cdot \ln|x^3+7| + C.$$

ב. פיתרון ע"י נוסחאות אינטגרלים ש פונק' טריגונומטריות

תזכורת:

$$\boxed{a>0\quad \int \frac{1}{x^2+a^2}\,dx = \frac{1}{a}\cdot \arctan\frac{x}{a} + C}$$

$$(*)\ \int \frac{20}{x^2-x+1}\,dx = 20\cdot\int \frac{1}{(x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}} =$$

$$(x-\tfrac{1}{2}) = t$$
$$dx = dt$$

$$20\cdot\int \frac{1}{t^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}\,dt = 20\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2t}{\sqrt{3}} + C =$$

$$\frac{40}{3}\arctan\frac{2(x-\frac{1}{2})}{\sqrt{3}} + C.$$

ג. חלוקת התרגיל לשברים חלקיים:

I. השיטה עובדת רק בתרגילים בהם ניתן לפרק את המכנה לגורמים.

II. בפירוק לגורמים, המונה הוא מחזקה אחת פחות מאשר הביטוי הבסיסי שנמצא במכנה.
(ביטוי בסיסי = הביטוי בתוך הסוגריים שנמצא במכנה).

III. בפירוק מכנה מהצורה $[f(x)]^m$ נפרק ע"י:

$$\frac{\quad}{[f(x)]^m} = \frac{\quad}{f(x)} + \frac{\quad}{[f(x)]^2} + \dots + \frac{\quad}{[f(x)]^m}$$

$$(*) \int \frac{1}{x^3+x}\,dx = \int \frac{1}{x(x^2+1)}\,dx$$

$$\frac{1}{x(x^2+1)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1}$$

ישנן 2 שיטות למציאת A,B,C:
1. השוואת מקדמים
2. הצבת X חופשי.

$$1 = A(x^2+1) + x(Bx+C)$$

$x=0 \Rightarrow \underline{A=1}$.

$x=1 \Rightarrow \underline{1 = 2+B+C}$.

$x=2 \Rightarrow 1 = 5+2(B+C)$

$-4 = 4B+2C$

$\underline{2B+C=-2}$.

$$\begin{cases} 2B+C=-2 \\ B+C=-1 \end{cases}$$

$B=-1 \quad C=0$

$$= \int \frac{1}{x}\,dx + \int \frac{-x}{x^2+1}\,dx = \ln|x| - \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+1}\,dx =$$

[illegible]

$$= \ln|x| - \frac{1}{2}\cdot \ln|x^2+1| + C = \ln\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} + C.$$

ד. חלוקת פולינום, כאשר המונה מחזקה גבוהה/שווה לחזקת המכנה.

$$(*) \int \frac{x^4}{x^2+1}\,dx =$$

$x^2-1 \quad (1)$

$x^4 \;\big|\; x^2+1$

$-\;x^4+x^2$

$= -x^2$

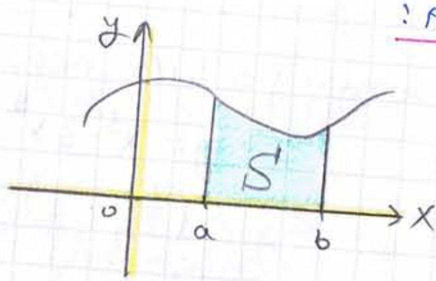
$-x^2-1$

$= 1$

$$= \int \left(x^2-1+\frac{1}{x^2+1}\right)dx = \frac{x^3}{3} - x + \arctan x + C.$$

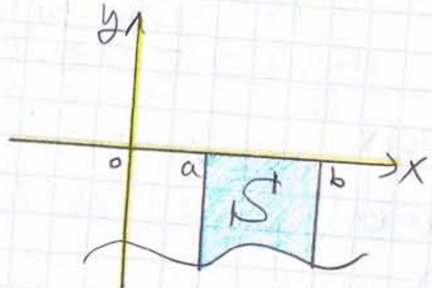
מקרים פרטיים:

(1)



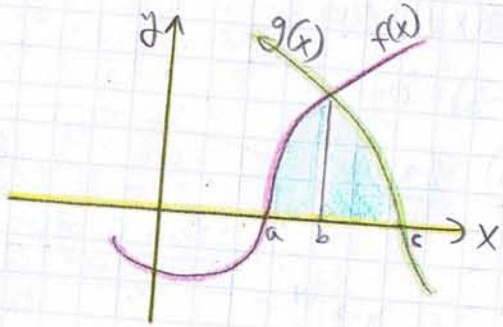
$$S=\int_a^b f(x)\,dx$$

(2)



$$S'=\int_a^b (0-f(x))\,dx$$

(3)



$$S'=\int_a^b f(x)\,dx+\int_b^c g(x)\,dx$$

האינטגרל המסוים

$\int_a^b$ ← גבולות האינטגרציה

נוסחת ניוטון-לייבניץ:

יהי $f(x)$ פונק' רציפה בקטע $[a,b]$

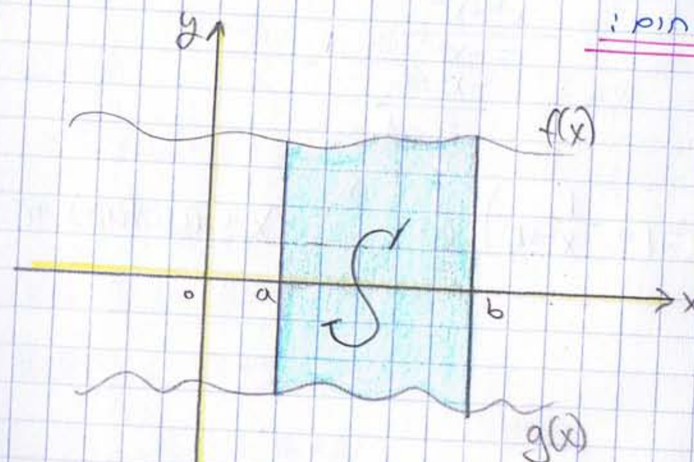
ואם $F(x)$ היא הפונק' הקדומה של $f(x)$ אז:

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx=F(b)-F(a)}$$

* המקרים הבאים יהיו לנו תרגילים שבמסגרתם הפונק' הן רציפות. כך שלא צריך לבדוק בעייתיות.

$$\boxed{\int_b^a f(x)\,dx=-\int_a^b f(x)\,dx}$$

חישוב שטחים:



$$S'=\int_a^b [f(x)-g(x)]\,dx$$

(*) **תרגיל:**

מצא שטח כלוא בין הגרפים של הפונק':

$$y = x^2-3x \quad ; \quad y = x^3-3x^2$$

ערך בין 0-ל1 $\leftarrow \left(\frac{1}{2}, -\frac{5}{4}\right) \quad < \quad \left(\frac{1}{2}, -\frac{5}{8}\right)$ (*)

ערך בין 1-ל3 $\leftarrow (2,-2) \quad > \quad (2,-4)$

מה קורה בין נק' המפגש.

פתרון:

I. נמצא נק' מפגש:

$$x^3-3x^2 = x^2-3x$$

$$x^3-4x^2+3x=0$$

$$x(x^2-4x+3)=0$$

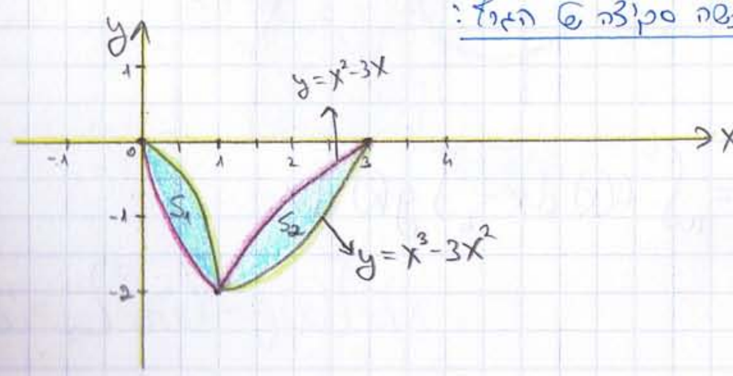
$$x(x^2-x-3x+3)=0$$

$$x\left(x(x-1)-3(x-1)\right)=0$$

$$x(x-1)(x-3)=0.$$

$(0,0) \quad (1,-2) \quad (3,0)$

II נעשה סקיצה של הגרף:



III. נחשב את השטחים:

$$_1= \int_0^1 \left(x^3-3x^2-(x^2-3x)\right)dx =$$

$$= \int_0^1 \left(x^3-4x^2+3x\right)dx =$$

$$\frac{x^4}{4} - \frac{4x^3}{3} + \frac{3x^2}{2}\Big]_0^1 =$$

$$\frac{1}{4} - \frac{4}{3} + \frac{3}{2} - 0 = \frac{3-16+18}{12} = \frac{5}{12}.$$

$$= \int_1^3 \left(x^2-3x-(x^3-3x^2)\right)dx =$$

$$= \int_1^3 \left(-x^3+4x^2-3x\right)dx = \frac{-x^4}{4} + \frac{4x^3}{3} - \frac{3x^2}{2}\Big]_1^3 =$$

$$= \frac{-3^4}{4} + \frac{4\cdot 3^{\cancel{3}\,2}}{\cancel{3}} - \frac{3\cdot 3^2}{2} - \left(-\frac{1}{4} + \frac{4}{3} - \frac{3}{2}\right) =$$

$$= -\frac{81}{4} + 36 - \frac{27}{2} - \frac{\overbrace{-3+16-18}^{-5}}{12} =$$

$$= \frac{-243+432-162+5}{12} = \frac{\cancel{32}^{\,8}}{{}_3\cancel{12}} = \frac{8}{3} = 2\frac{2}{3}.$$

$$S_1 = \int_{2\frac{1}{2}}^{7} (2x-5)^{\frac{1}{2}}\,dx - 3\overset{3}{\triangledown} =$$

$$= \frac{(2x-5)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{\cancel{2}}\cdot\cancel{2}}\Bigg]_{2\frac{1}{2}}^{7} - \frac{3\cdot 3}{2} =$$

$$= \frac{(2\cdot 7-5)^{\frac{3}{2}}}{3} - 0 - \frac{9}{2} = \frac{9^{\frac{3}{2}}}{3} - \frac{9}{2} =$$

$$= \frac{(3^{\cancel{2}})^{\frac{3}{\cancel{2}}}}{3} - \frac{9}{2} = 3^2 - \frac{9}{2} = 9 - \frac{9}{2} = \frac{9}{2} = 4\tfrac{1}{2}.$$

$$= \int_{2\frac{1}{2}}^{3} 0-\left(-\sqrt{2x-5}\right)dx + 1\overset{1}{\triangledown} =$$

$$\frac{(2x-5)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{\cancel{2}}\cdot\cancel{2}}\Bigg]_{2\frac{1}{2}}^{3} + \frac{1\cdot 1}{2} = \frac{(2\cdot 3-5)^{\frac{3}{2}}}{3} - 0 + \frac{1}{2} =$$

$$= \overset{2/}{\frac{1}{3}} + \overset{3/}{\frac{1}{2}} = \frac{5}{6}$$

$$S = 4\tfrac{1}{2} + \frac{5}{6} = \frac{9}{2} + \frac{5}{6} = \frac{27+5}{6} = \frac{32}{6} = \frac{16}{3} = 5\tfrac{1}{3}.$$

x	$x-4$
0	-4
1	-3
4	0

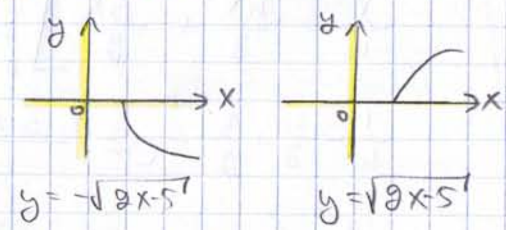
(*) <u>תרגיל:</u>

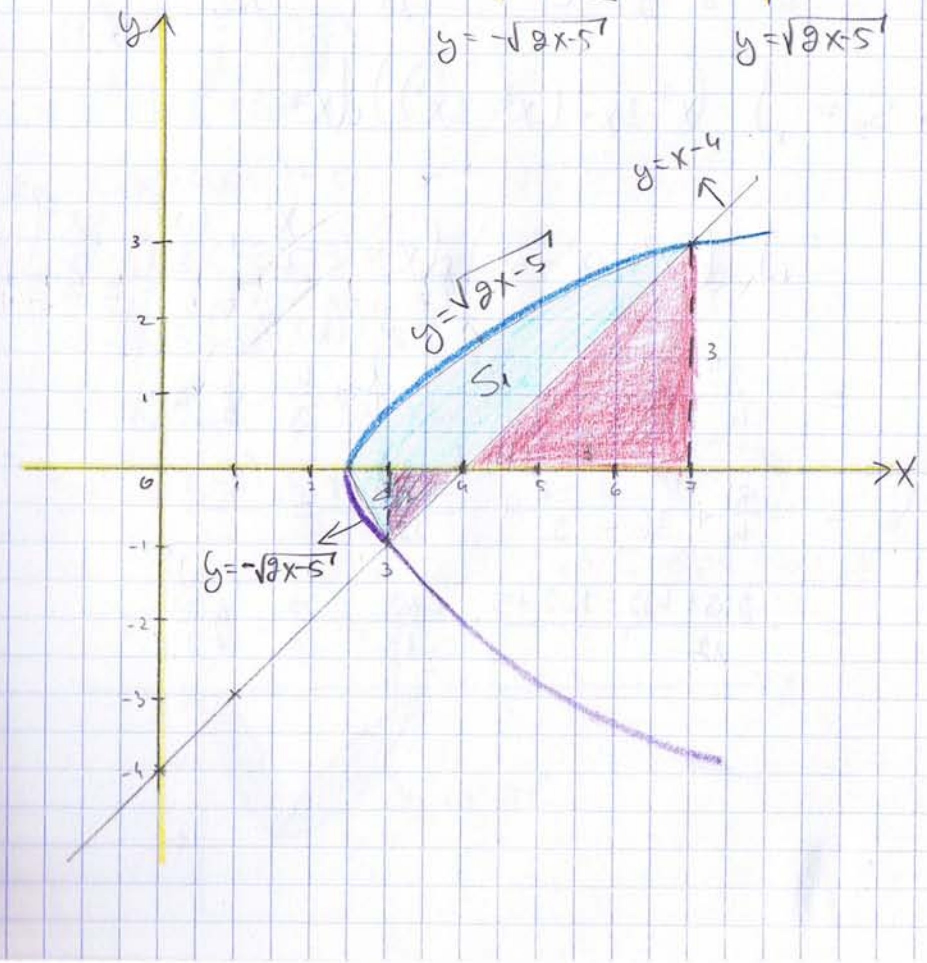
חשב שטח תחום בין $y = x-4$ ו- $y^2 = 2x-5$

<u>פתרון:</u>

פה צריך חשוב איך באופן מי נכון y^2.

$$y^2 = 2x-5 \iff y = \pm\sqrt{2x-5}$$





פעולות באינטגרלים

משפט:

יהיו $f(x)$ ו- $g(x)$ פונק' אינטגרביליות בקטע $[a,b]$:

(א) אם $f(x)\ge m$ לכל $x\in[a,b]$ אזי:

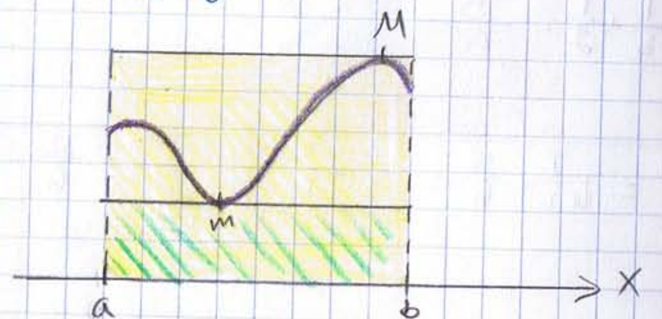
$$\int_a^b f(x)\,dx \ge m(b-a)$$

(ב) אם $f(x)\le M$ לכל $x\in[a,b]$ אזי:

$$\int_a^b f(x)\,dx \le M(b-a)$$

(ג) אם $f(x)\le g(x)$ לכל $x\in[a,b]$ אזי:

$$\int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx$$

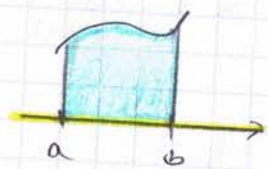


משפט:

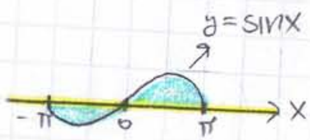
אם $f(x)$ אינטגרבילית בקטע $[a,b]$ אז גם $|f(x)|$ אינטגרבילית בקטע $[a,b]$ ומתקיים:

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \le \int_a^b |f(x)|\,dx$$

(*) שוויון מתקיים כאשר כל הפונק' מעל הציר:



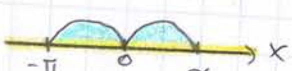
(*) אי שוויון מתקיים כאשר חלק אחד מעל הציר וחלק שני מתחת לציר.



(*) $$\int_{-\pi}^{\pi}\sin x\,dx = -\cos x\Big]_{-\pi}^{\pi} = -\cos\pi-(-\cos(-\pi)) =$$

$$= -\cos\pi+\cos\pi = 0.$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}|\sin x|\,dx = \underbrace{2}_{2x}\underbrace{(-\cos x)}_{\text{מבעה אותה}}\Big|_0^{\pi} = 2(\overbrace{-\cos\pi+\cos 0}^{0+1}) = 2\cdot 1 = 2.$$



(*) תרגיל:

$$\int_{0.1}^{1} \frac{1}{x^6+x^5}\,dx = ?$$

פתרון:

- $f(x)=\frac{1}{x^6+x^5}$. הפונק' מקיימת:

$$\underbrace{\frac{1}{2x^6}}_{\text{מכנה יותר גדול}} \le \frac{1}{\underbrace{x^6+x^5}_{\text{גודל חיובי (הבעה השונה)}}} \le \underbrace{\frac{1}{x^6}}_{\text{מכנה יותר קטן}}$$

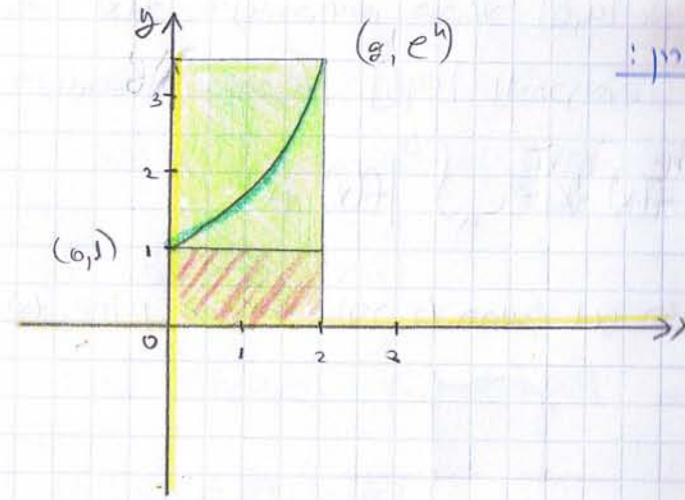
$$\int_{0.1}^{1} \frac{1}{x^6+x^5}\,dx \le \int_{0.1}^{1} \underbrace{\frac{1}{x^6}}_{x^{-6}}\,dx = -\frac{1}{5x^5}\Big]_{0.1}^{1} = \ldots$$

תם ונשלם קורס חדו"א א'.

(*) תרגיל:

תן הערכה לגודלו של האינטגרל: $\int_0^2 e^{(x^2)}\,dx$

פתרון:



- בקטע $[0,2]$ הפונק' עולה ממש.

$$f'(x) = 2\cdot x\cdot e^{x^2} \underset{\downarrow}{>} 0$$

תנאי עולה.

- לפי משפט קודם,

$$\underbrace{1}_{m}\cdot\underbrace{2}_{b-a} \le \int_0^2 e^{x^2}\,dx \le \underbrace{e^4}_{M}\cdot\underbrace{2}_{b-a}$$

$$2 \le \int_0^2 e^{x^2}\,dx \le 2\cdot e^4.$$