21.12.01

אוניברסיטת חיפה

החוג למדעי המחשב

מבחן אמצע סמסטר - חדו"א 1

ד"ר יעל זפקוביץ-מלאכי. משך הבחינה: $1\frac{1}{2}$ שעות.

הוראות לבחינה:

1) אין להעזר במחשבונים או דפי נוסחאות.
2) יש לענות על שלושת השאלות (שים לב כי בשאלות 2 ו 3 קיימת בחירה בין הסעיפים)
3) בשאלות הוכח או הפרך - יש לתת הוכחה מלאה במידה והטענה נכונה, ודוגמא נגדית (תוך מתן הסבר מלא מדוע הדוגמא סותרת את הטענה) במידה והטענה אינה נכונה

(20 נק') **שאלה 1:** הוכח את המשפט: כל סדרה מתכנסת היא חסומה.

(30 נק') **שאלה 2:** הוכח או הפרך **6** מתוך 7 הטענות הבאות,

תהיינה $\{a_n\}$ $\{b_n\}$ סדרות אזי;

א) כל סדרה חסומה ומונוטונית ממש מתכנסת.

ב) אם לכל n; $a_n>0$ ו $\frac{a_{n+1}}{a_n}<1$ אזי $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=0$

ג) אם $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=L$ אזי $\lim\limits_{n\to\infty} [a_n]=[L]$ ($[\ ]$ מסמן ערך שלם)

ד) אם $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=L$ אזי $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n|=|L|$ ($|\ |$ מסמן ערך מוחלט)

ה) אם $a_n>7$ לכל n, ו $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=L$ אזי $L>7$.

ו) אם $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n|=|L|$ אזי $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=L$.

ז) אם $\{a_n\}$ ו $\{b_n\}$ סדרות מתכנסות במובן הרחב אז גם $\{a_n\cdot b_n\}$ מתכנסת במובן הרחב.

שאלה 3: פתור שלושה מתוך ארבעת הסעיפים הבאים; (50 נק')

סעיף א': פתור את שני הסעיפים:

I) הוכח כי לכל פולינום x^3+px+q, $p,q\in\mathbb{R}$, יש לפחות שורש ממשי אחד.

II) נתונה הפונקציה
$$f(x)=\begin{cases}\ln(x)-2 & x>e\\ x^2+A & x\le e\end{cases}$$
חשב את A עבורו הפונקציה רציפה על כל הציר הממשי.

סעיף ב': הוכח או הפרך את הטענות הבאות:

I) תהי $f(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2}-\frac{x^2}{2}-1$, $-\infty<x<\infty$
אזי $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ קיים במובן הרחב.

II) תהיינה $f(x)$ ו $g(x)$ פונקציות חסומות ששתיהן אינן רציפות בנק' x_0, אזי $f(x)+g(x)$ אינה רציפה ב x_0.

III) אם הגבולות החד צדדיים של פונק' $f(x)$ בנק' x_0 קיימים ושווים אזי $f(x)$ רציפה ב x_0.

IV) אם $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=5$ אזי $\lim\limits_{x\to 0} f(x^2)=25$.

סעיף ג': נתונה הסדרה $a_1=3$ $a_{n+1}=\sqrt{3a_n}$
הוכח שהסדרה מתכנסת וחשב את גבולה.

סעיף ד':

I) רשום את הגדרת הגבול לפי קושי של פונק' $f(x)$ כאשר x שואף לנקודה a.

II עפ"י ההגדרה הקודמת הוכח
$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+2x}{2}=\frac{3}{2}$$

בהצלחה.

פתרון מבחן אמצע סמסטר חדו"א 1

שאלה 1 - ראה הוכחת המשפט בע' 63 בספר הלימוד.

שאלה 2 -

(א) לא נכון. $a_n = 7+(-1)^n$ הסדרה חסומה $6 \le a_n \le 8$

חסומה [illegible] אבל אין לה גבול $\left(\lim_{n\to\infty} a_n = \begin{cases} 8 & n \text{ זוגי} \\ 6 & n \text{ אי-זוגי} \end{cases} \right)$

(ב) לא נכון. $a_n = \frac{1}{n}+1 \Leftarrow$ יורדת $a_n>0$,

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{1}{n+1}+1}{\frac{1}{n}+1} = \frac{\frac{n+2}{n+1}}{\frac{n+1}{n}} = \frac{(n+2)n}{(n+1)^2} = \frac{n^2+2n}{n^2+2n+1} < 1$$

אבל $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$

(ג) לא נכון. $a_n = 1-\frac{1}{n} \Leftarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 1$

$$\lim_{n\to\infty} [a_n] = \lim_{n\to\infty} \left[1-\frac{1}{n}\right] = 0$$

(ד) נכון. ראה עמ' 61 בספר הלימוד.

(ה) לא נכון. $a_n = 7+\frac{1}{n}$ אבל $\lim_{n\to\infty} a_n = 7$

(ו) לא נכון $a_n = (-1)^n$ $\lim_{n\to\infty} |a_n| = 1$

אבל ל a_n אין גבול.

(ז) לא נכון $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$, $b_n = n$ שתי הסדרות מתכנסות במובן הרחב

$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, $\lim_{n\to\infty} b_n \to \infty$ אבל

לא קיים. $\lim_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = \lim_{n\to\infty} n\frac{(-1)^n}{n} = \lim_{n\to\infty} (-1)^n \Rightarrow \nexists$

שאלה 3:

סעיף א':

I) כאשר [illegible] לא [illegible] המספר הלוגריתם.

II)

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to e^+} f(x) = \ln e - 2 = -1 \\ \lim\limits_{x\to e^-} f(x) = f(e) = e^2 + A\end{array}\right\} \Rightarrow -1 = e^2 + A$$

$$\boxed{-1-e^2 = A}$$

סעיף ב':

I) נכון.

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \frac{1}{2}e^x\Big(1 + \underbrace{e^{-2x}}_{\downarrow\, 0} - \underbrace{\frac{x^2}{e^x}}_{\downarrow\, 0} - \underbrace{\frac{2}{e^x}}_{\downarrow\, 0}\Big) = \infty.$$

II) לא נכון ⇐

$$\left.\begin{array}{l} f(x) = 1 + \frac{1}{x} \\ g(x) = 3 - \frac{1}{x}\end{array}\right\} \Rightarrow$$ שתי הפונקציות אינן רציפות בנקודה $x_0=0$

אבל:

$f(x) + g(x) = 4 \Rightarrow$ רציפה בכל x.

III) לא נכון ⇐ הגדרת הרציפות דורשת התכנסות תחת סדרות שונות לערך הפונקציה הנקודה.

IV) לא נכון ⇐

$$f(x) = x+5 \Rightarrow \begin{array}{l} f(0) = 0+5 = 5 \\ f(0^2) = 0^2+5 = 5.\end{array}$$

סעיף ג': נתונה הסדרה $a_1=\sqrt{3}$, $a_{n+1}=\sqrt{3a_n}$. צ"ל שהסדרה מתכנסת ולחשב את גבולה.

קודם נראה שהסדרה מונוטונית עולה וחסומה מלעיל ולכן מתכנסת ואח"כ נחשב את גבולה. [illegible] זה נעזר אחר הסדרה הנתונה.

I) נוכיח באינדוקציה שלכל n: $a_n<3$

בסיס $n=1$; $a_1=\sqrt{3}<3$

הנחה: נניח נכונות עבור $n=k$; כלומר מתקיים: $a_k<3$

הוכחה: נוכיח נכונות עבור $n=k+1$; כלומר צ"ל $a_{k+1}<3$

$$a_{k+1} = \sqrt{3a_k} \underset{\substack{\vee \\ \text{לפי הנחה} \\ a_k<3}}{<} \sqrt{3\cdot 3} = 3 \Rightarrow a_{k+1} < 3.$$

ב) נראה כי הסדרה מונוטונית עולה. נבדוק את $\frac{a_{n+1}}{a_n}$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\sqrt{3a_n}}{a_n} = \sqrt{\frac{3}{a_n}} > 1 \Rightarrow$$ הסדרה מונוטונית עולה

לפי טענה קודמת $a_n < 3$

⟸ הסדרה $\{a_n\}$ מונוטונית עולה וחסומה מלעיל ולכן מתכנסת.

נסמן את הגבול ב-L, נשים לב כי $L \geq \sqrt{3} > 0$.

לפי תכונת הגבול, נחשב גבול של שני צדדי הנוסחה הרקורסיבית:

$$a_{n+1} = \sqrt{3a_n} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{3a_n}$$

$$\Downarrow \qquad \Downarrow$$

$$L = \sqrt{3L}$$

נפתור את המשוואה $L = \sqrt{3L} \Rightarrow L^2 - 3L = 0$

$\cancel{L=0}$ $L = \sqrt{3}$ $(L > 0)$

כלומר $L = \sqrt{3}$.

(נשים לב שבחישוב הגבול נעזרנו בכך שהוא חוקי רק לאחר שהוכחנו שהגבול קיים אחרת יכולנו לקבל שטויות).

<u>סעיף ב'</u>!

I) ראה הגדרה בעמ' 110 בספר הקורס.

II) $\lim_{x\to 1} \frac{x^2+2x}{2} = \frac{3}{2}$

דרוש להראות שלכל $\varepsilon > 0$ קיים $\delta > 0$ כך שלכל x, $0 < |x-1| < \delta$ מתקיים:

$$|f(x) - L| = \left| \frac{x^2+2x}{2} - \quad \right| < \varepsilon$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{|x^2+2x-3|}{2} = \frac{|(x-1)(x+3)|}{2} = \frac{|x-1||x+3|}{2} <$$

$$< |x-1| \cdot |x+3| = |x-1| \cdot (|x-1+4|) < |x-1|(|x-1|+4)$$

$$= \delta(\delta+4)$$

לכן לכל $\varepsilon > 0$ נדרוש $\delta(\delta+4) \leq \varepsilon$ ונמצא את הקשר בין ε ו-δ.