דוגמאות לשאלות ממבחנים

דר' א. ניומן

1. תאר אלגוריתם המוצא חציון של רשימה בת n איברים על-ידי מיון בשבעיות במקום חמישיות. נתח את הסיבוכיות במדויק, כולל הקבוע של חזקת n המשמעותית; הסבר תשובתך בפרוטרוט.

2. פתח אלגוריתם יעיל לבעיה הבאה: נתון גרף מכוון $G = (V, E)$, פונקציית משקל חיובית $w : E \to Q^+$ ובנוסף כל קשת צבוע בצבע לבן או אדום.

   יש למצוא לכל זוג צמתים u, v מסלול בעל משקל קטן ביותר מבין כל המסלולים המכילים לכל היותר קשת אדומה אחת. הוכח נכונות וחשב סיבוכיות.

3. עבור גרף לא מכוון $G = (V, E)$, קבוצה $E' \subseteq E$ נקראת **כיסוי על-ידי מעגלים זרים** אם כל רכיב של $G' = (V, E')$ הינו מעגל פשוט.

   (א) הוכח כי E' היא כיסוי על-ידי מעגלים זרים אם ורק אם לכל $v \in V$ קיימות בדיוק שתי קשתות ב-E' שהקצה שלהן הוא v.

   (ב) פתח אלגוריתם יעיל למציאת קבוצת כיסוי על-ידי מעגלים זרים לגרף G, אם קיימת. הוכח תשובתך וחשב סיבוכיות.
   רמז: זרימה (שידוך).

4. חשב טרנספורם פוריה של הפולינום: $p(x) = 1 + 2x^2 + 3x^3 + 2x^4 + 2x^5$.

5. פתח אלגוריתם יעיל אשר בהנתן גרף לא מכוון $G = (V, E)$ וצומת $v \in V$ מוצא שני מעגלים זרים בקשתות ב-G אשר מכילים (כל אחד מכיל) את v, או מחליט שלא קיימים מעגלים כאילו. הוכח תשובתך וחשב סיבוכיות.

6. יהי $G = (V, E)$ גרף דו-צדדי בו דרגת כל צומת היא d.

   (א) הוכח כי ב-G יש שידוך מושלם.

   (ב) הוכח כי ב-G יש d שידוכים מושלמים זרים.

   (ג) תאר אלגוריתם אשר צובע את הקשתות ב-G ב-d צבעים כך ששתי קשתות הנוגעות באותו צומת, צבועות בצבעים שונים.

7. בהנתן גרף לא מכוון $G = (V, E)$, שני צמתים $x, y \in V$ ומספר k, תאר אלגוריתם יעיל אשר מוצא האם בין x, y יש k מסלולים זרים בצמתים (פרט לקצוות). תאר את האלגוריתם בפרוטרוט, חשב סיבוכיות והוכח נכונות.

8. **"טורניר"** הוא גרף מכוון $D = (V, E)$ שבו בין כל שני צמתים יש בדיוק קשת מכוונת אחת.

(א) הוכח כי בטורני קשיר חזק יש מעגל המילטוני.
תזכורת: גרף הוא קשיר חזק אם ניתן להגיע מכל צומת לכל צומת; מעגל המילטוני הוא מעגל פשוט העובר על כל צמתי הגרף.

(ב) תאר אלגוריתם יעיל למציאת מעגל המילטוני בטורניר. הוכח נכונות וחשב סיבוכיות.
רמז: הראה כי ניתן להתחיל ממעגל כלשהו ולהגדיל אותו כל עוד איננו מכיל את כל הצמתים.

9. בהנתן גרף לא מכוון $G = (V, E)$ ומשקלות חיוביים על הצמתים, תאר אלגוריתם המוצא מעגל בעל מספר אי-זוגי של צמתים ומשקל כולל קטן ביותר. חשב סיבוכיות, הוכח נכונות.

10. חשב טרנספורם פוריה של הפולינום

$$p(x) = x + x^2 + x^3 + 2x^5 + 3x^5$$

עבור שורש יחידה פרימיטיבי מסדר שמונה.

11. נתון מערך של n מספרים $x_1, x_2, \ldots, x_n$ לא ממוין, וערכים אי-שליליים $w_1, w_2, \ldots, w_n$ כך ש-$\sum_{i=1}^{n} w_i = 1$. **חציון ממושקל** של המספרים $x_1, \ldots, x_n$ הוא מספר x_k המקיים:

$$\sum_{x_i < x_k} w_i \le \frac{1}{2} \quad \text{וגם} \quad \sum_{x_i > x_k} w_i \le \frac{1}{2}$$

כלומר, האיבר x_k שעבורו סכום המשקלות של ה-x-ים שקטנים ממנו, קטן או שווה ל-$1/2$ וגם סכום המשקלות של ה-x-ים שגדולים ממנו, קטן או שווה ל-$1/2$.

(א) תאר אלגוריתם המוצא חציון ממושקל ב-$O(n \log n)$ פעולות (ע"י מיון).

(ב) הוכח כי החציון הרגיל של המספרים $x_1, \ldots, x_n$ הוא החציון הממושקל עבור משקולות $w_i = 1/n$, לכל $i = 1 \ldots n$.

(ג) תאר אלגוריתם המוצא חציון ממושקל ב-$O(n)$.
רמז: השתמש באלגוריתם הליניארי למציאת החציון, מספר פעמים.

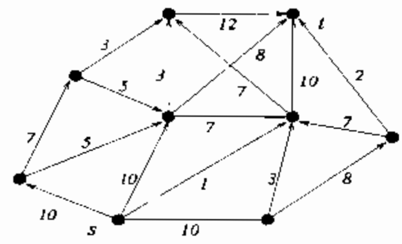
12. (א) מהי זרימת המקסימום בין s ל-t ומהו חתך מינימום ברשת שבאיור 1?

(ב) פתח אלגוריתם לבעיה הבאה: נתונה רשת (גרף מכוון ושני צמתים מיוחדים s ו-t) וקבולות על הצמתים $c : V \to Q^+$. זרימה חוקית היא פונקציה $f : E \to Q^+$ המקיימת חוקי הזרימה הרגילים וכן שסכום הזרימה הנכנסת לצומת קטנה או שווה לקבולת של הצומת. כלומר, f מקיימת:

(i) לכל $v \in V \setminus \{s, t\}$ $\sum_{u \to v} f(u \to v) = \sum_{v \to y} f(v \to y)$

(ii) לכל $v \in V \setminus \{s, t\}$ $\sum_{u \to v} f(u \to v) \le c(v)$

מהי זרימת המקסימום מ-s ל-t? נתח את סיבוכיות האלגוריתם והוכח את נכונותו.



איור 1: רשת זרימה עבור בעיה 12.

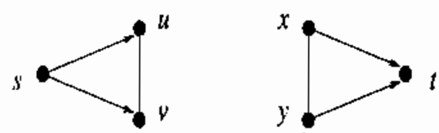
13. נתון גרף מכוון $G=(V,E)$ שבו כל קשת מסומנת באות a או באות b. בנוסף, לכל קשת יש אורך חיובי (כלומר נתונה פונקצית אורך $l : E \to Q^+$). תכנן אלגוריתם אשר בהנתן שני קודקודים s ו-t, מוצא מסלול בעל אורך קצר ביותר בין s ל-t אשר לא מופיעים בו שתי קשתות רצופות המסומנות ב-a. נתח סיבוכיות והוכח נכונות תשובתך.
<u>רמז</u>: תכנון דינמי.

14. נתון גרף דו-צדדי G אשר בו לכל קודקוד ערכיות 5.

(א) הוכח כי ב-G יש שידוך מושלם;

(ב) הוכח כי ב-G יש 5 שידוכים מושלמים זרים.
<u>רמז</u>: השתמש במשפט Hall.

15. יהי $G=(V,E)$ גרף לא מכוון ושתי קשתות $e_1=(u,v)$ ו-$e_2=(x,y)$. הראה אלגוריתם המחליט האם קיים מעגל פשוט ב-G המכיל את e_1 ו-e_2.
<u>רמז</u>: מצא שני מסלולים זרים בצמתים בין $\{u,v\}$ לבין $\{x,y\}$ ע"י הוספת צמתים חדשות t ו-s כמצויר באיור 2.



איור 2: הוספת צמתים עבור בעיה 15.

16. יהיו G_1 ו-G_2 שני גרפים זרים המכילים מעגל אוילר.

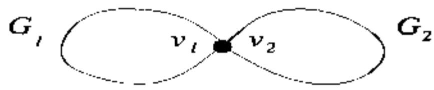
(א) נאחד את G_1 ו-G_2 לגרף אחד G ע"י איחוד צומת כלשהו v_1 ב-G_1 וצומת כלשהו v_2 ב-G_2, כמתואר באיור 3.

i. האם הגרף G מכיל מעגל אוילר?

ii. האם הגרף G מכיל מסלול אוילר?

נמק תשובתך.

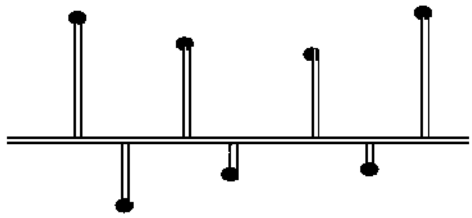
(ב) בהנתן גרף לא מכוון G, תאר אלגוריתם אשר מכוון את הקשתות של G (אם ניתן) כך שלכל קודקוד, מספר הקשתות הנכנסות שווה למספר הקשתות היוצאות.



איור 3: אחוד שני גרפים עבור בעיה 16.

17. (א) נתונות k רשימות ממוינות של סך הכל n מספרים (הרשימות לאו דוקא שוות בגודלן). פתח אלגוריתם למיזוג k הרשימות לרשימה ממוינת אחת בסיבוכיות של $O(n \log k)$ השוות. הוכח נכונות.

(ב) לחברת נפט יש n אתרי שאיבה. החברה צריכה לחבר את האתרים לצינור אחד, כמתואר באיור 4. העלות של החבור היא סכום אורכי הצינורות האנכיים.



איור 4: אתרי הנפט עבור בעיה 17. הצינורות האנכיים ניצבים לצינור האופקי.

היכן צריך לעבור הצינור האופקי על-מנת שסכום זה יהי מינימלי? תן אלגוריתם למציאת מקום זה (ב-$O(n)$) והוכח את תשובתך.
רמז: שים לב כי באיור 4 (עם $n = 7$) הפתרון המצויר איננו הטוב ביותר.

18. נתונה קבוצה של n אינטרוולים על הישר

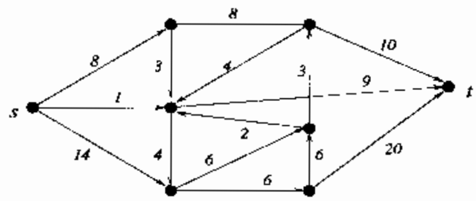
$$I = \{(x_i, y_i) \mid 1 \leq i \leq n\}$$

כלומר, האינטרוול ה-i-י הוא (x_i, y_i). תן אלגוריתם המוצא תת-קבוצה של אינטרוולים זרים זה לזה בעלת גודל מקסימלי (כלומר, מקסימום מספר של אינטרוולים זרים זה לזה). הוכח תשובתך וחשב סיבוכיות.
רמז: מיין לפי y_i ואז השתמש בתכנון דינמי או אלגוריתם חמדני.

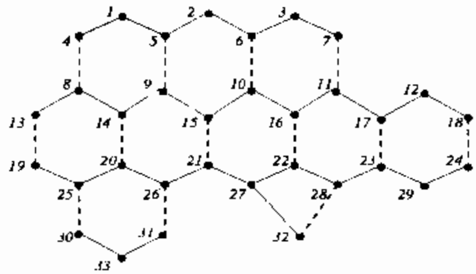
19. (א) מצא זרימת המקסימום בין s ל-t וחתך מינימום ברשת שבאיור 5.

(ב) עבור גרף פשוט ולא מכוון, תאר אלגוריתם אשר בודק עבור שני צמתים כלשהם x, y וקשת כלשהי $e = (u, v)$ האם יש מסלול פשוט מ-x ל-y העובר דרך e. הוכח תשובתך, חשב סיבוכיות.
רמז: משפט Menger בצמתים.

20. בגרף פשוט ולא מכוון $G = (V, E)$, **כיסוי** היא קבוצה $V' \subseteq V$ המקיימת: לכל $(x, y) \in E$ $x \in V'$ או $y \in V'$. כלומר, הצמתים ב-V' פוגשים כל קשת בגרף.
הוכח כי בגרף דו-צדדי $G = (X, Y, E)$ הגודל של כיסוי מינימום שווה לגודל של שידוך מקסימום.
רמז: הסתכל בשלב הסופי של האלגוריתם (האונגרי) לשידוך ומצא קבוצת כיסוי



איור 5: רשת זרימה עבור בעיה 19.



איור 6: גרף עם שדוך התחלתי עבור בעיה 21.

בגודל השידוך. שים לב כי צריך להוכיח גם את הכוון ההפוך, אך הוא מידי כוון שגודל כל כיסוי $\leq$ גודל כל שידוך.

21. (א) הפעל את האלגוריתם ההונגרי למציאת שדוך מקסימום בגרף שבאיור 6. התחל מהשדוך המסומן באיור. הראה את העץ ההונגרי הנוצר בשלב הלפני אחרון והאחרון.

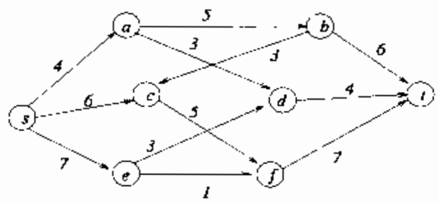
(ב) הוכח כי בעץ $T=(V,E)$ יש לכל היותר שדוך מושלם יחיד.

(ג) תאר אלגוריתם למציאת שדוך מקסימום בעץ. חשב סיבוכיות במפורט.

22. נתונה הרשת שבאיור 7. הקבולות מסומנות על הקשתות.

(א) מצא זרימת מקסימום מ-s ל-t.

(ב) מצא חתך מינימום בין s ל-t.



איור 7: רשת זרימה עבור בעיה 22.

23. (א) הוכח כי בכל עץ T יש צומת v שעבורה כל רכיב של $T \setminus v$ מכיל לכל היותר $n/2$ צמתים.

(ב) פתח אלגוריתם למציאת צומת כזה. (מלוא הנקודות יתקבל על אלגוריתם <u>ליניארי</u>).

24. נתון אוסף של n קטעים פתוחים;

$$I_1 = (a_1, b_1), I_1 = (a_2, b_2), \cdots, I_1 = (a_n, b_n)$$

- אורך קטע ה-i הינו $b_i - a_i$ לכל $i = 1, 2, \ldots, n$;
- שני קטעים (x, y) ו-(r, s) הינם זרים אם $x \leq s$ או $r \leq y$.

פתח אלגוריתם למציאת תת-קבוצה של קטעים, מתוך הקטעים הנתונים, שבה <u>כל שני</u> קטעים הם זרים וסך הכל סכום אורכי הקטעים גדול ביותר.
<u>רמז:</u> תכנון דינמי.

25. (א) יהי n חזקה של 2, p פולינום ממעלה $n-1$:

$$p(x) = p_0 + p_1 x + \ldots + p_{n-1} x^{n-1}$$

ויהי w שורש היחידה פרימיטיבי מסדר n.
נגדיר עבור $i = 1, 2, \ldots, n-1$ את הפולינום $q^{(i)}$ שהוא **"סיבוב ימינה של p"** באופן הבא:

$$q^{(0)} = p$$

$$q^{(i)} = p_{n-i} + p_{n-i+1} x + \ldots + p_0 x^i + p_1 x^{i+1} + \ldots + p_{n-i-1} x^{n-1}$$

יהי $F(q^{(i)}, w)$ טרנספורם פוריה של $q^{(i)}$ ביחס לשורשי היחידה w, דהיינו וקטור הערכים $(q^{(i)}(1), q^{(i)}(w), \ldots, q^{(i)}(w^{n-1}))$. הוכח כי:

$$F(q^{(i)}, w) = w^i F(q^{(0)}, w) \quad \text{כלומר} \quad q^{(i)}(w^j) = w^i p(w^j).$$

(ב) מטריצה **סירקולנטית מסדר $n \times n$** היא מטריצה שבה השורה ה-i מתקבלת מהשורה הראשונה על-ידי סיבוב ימינה ב-$i-1$ מקומות. מטריצה כזו נתונה על-ידי שורתה הראשונה. למשל, עבור המטריצה (a, b, c, d) מתקבלת המטריצה

$$\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ d & a & b & c \\ c & d & a & b \\ b & c & d & a \end{pmatrix}$$

פתח אלגוריתם אשר בהנתן וקטור v ומטריצה סירקולנטית A מסדר $n \times n$ מחשב את המכפלה Av ב-$O(n \log n)$ פעולות כפל וחיבור.
<u>רמז:</u> תהי W המטריצה מסדר $n \times n$ המוגדרת על-ידי $W_{ij} = w^{ij}$. אזי, $Av = AWW^{-1}v$ והשתמש בתוצאה של סעיף (א).