

27.6.2004

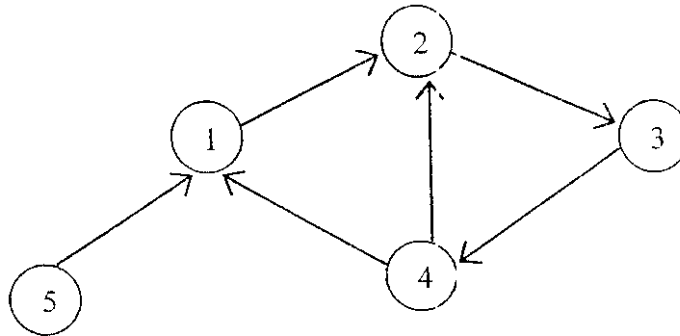
מבחן מועד א'
תכנון וניתוח אלגוריתמים
 סוכטר אביב, תשס"ד

- משך המבחן: שלוש שעות.
- יש לענות על כל השאלות.
- מותר השימוש בחומר עזר כלשהו.
- יש להקפיד על כתיבה ברורה ומסודרת של התשובות.

בהצלחה !

1. (25 נקודות)

- יהי G גרף מכוון. נאמר שקבוצת צמתים S היא "קבוצה קשירה היטב" אם לכל זוג צמתים u ו- v ששייכים ל- S קיים מסלול מכוון ב- G מ- u ל- v וכן קיים מסלול מכוון ב- G מ- v ל- u .
- נאמר שקבוצת צמתים S היא "קבוצה קשירה היטב מינימאלית" אם מתקיימים שני התנאים הבאים:
1. הקבוצה S היא קבוצה קשירה היטב.
 2. לא קיים צומת v ששייך ל- S כך שהקבוצה $S' = S - \{v\}$ היא קבוצה קשירה היטב.
- לדוגמה:



- בגרף הנ"ל קבוצת הצמתים $\{1,2,3,4\}$ היא קבוצה קשירה היטב אך אינה קבוצה קשירה היטב מינימאלית. קבוצת הצמתים $\{2,3,4\}$ עבגרה הנ"ל היא קבוצה קשירה היטב מינימאלית.
- הצעוי אלגוריתם (אין צורך להוכיח את נכונותו) שמקבל כקלט גרף מכוון G וקבוצת צמתים S ובוחק האם קבוצת הצמתים S היא קבוצה קשירה היטב מינימאלית.

על סיבוביות הזמן של האלגוריתם להיח $O((n+m)s)$ כאשר:

- n – מסי הצמתים בגרף G
- m – מסי קשתות בגרף G
- s – מסי הצמתים בקבוצת הצמתים S



2. (25 נקודות)

הצע/י אלגוריתם יעיל ככל האפשר שמקבל כקלט גרף לא מכוון ממושקל וקשיר G וקשת $e = \{u,v\}$ האם קיינו עץ פורש מינימום של G שמכיל את הקשת e . נתח/י את סיבוכיות הזמן של האלגוריתם שהצעתם והוכח את נכונותו.

3. (25 נקודות)

נתון גרף מכוון ממושקל G עם משקלות שלמים וחיוביים (דהינו לכל קשת e משקל $w(e)$ שהינו מס' שלם חיובי). בנוסף לכל צומת v ב- G נתון ערך $\delta(s,v)$ ששווה למרחק הממושקל מצומת s לצומת- v (דהינו $\delta(s,v)$ שווה למשקל המסלול בעל המשקל הקטן ביותר מבין כל המסלולים מ- s ל- v). המסלול שמשקלו $\delta(s,v)$ אינו נתון.

יהי G' הגרף המכוון המתקבל מ- G ג"י הקטנת המשקל של קשת מסוימת $e = (u,v)$ ב-1. במילים אחרות:

- קבוצת הצמתים של G' שווה לקבוצת הצמתים של G .
- קבוצת הקשתות של G' שווה לקבוצת הקשתות של G .
- לכל קשת y ששונה מ- e מתקיינו: משקל הקשת y ב- G שווה למשקל הקשת y ב- G' . (במילים אחרות: $w'(y) = w(y)$ כאשר $w'(y)$ מסמן את משקל הקשת y בגרף G').
- עבור הקשת e מתקיים: $w'(e) = w(e) - 1$.

הצע/י אלגוריתם יעיל ככל האפשר נטוחשב עבור כל צומת v בגרף G' את המרחק הממושקל מצומת s לצומת- v בגרף G' . (במילים אחרות: האלגוריתם מהשב לכל צומת v את $\delta'(s,v)$ כאשר נסמן ב- $\delta'(s,v)$ את משקל המסלול בעל המשקל הקטן ביותר מבין כל המסלולים מ- s ל- v בגרף G').

נתח/י את סיבוכיות הזמן של האלגוריתם שהצעתם. (אין צורך להוכיח את נכונות האלגוריתם שהצעתם בשאלה זו).

4. (25 נקודות)

הצע/י אלגוריתם יעיל ככל האפשר שזקבל כקלט רשת זרימה G (דהינו G הינו גרף מכוון עם מקור s בור t וקיבול $c(e)$ לכל קשת e) ובנוסף קשת $e = (s,v)$ (דהינו e הינה קשת מכוונת מהמקור s לצומת v) ומספר k . האלגוריתם בודק האם קיימת זרימה חוקית f ברשת G כך שמתקיים: $f(e) \geq k$. במילים אחרות: הזרימה f מקיימת את חוק הצומת (לכל צומת) ואת חוק הקשת (לכל קשת) ובנוסף הזרימה בקשת e היא לפחות k .

נתח/י את סיבוכיות הזמן של האלגוריתם שהצעתם כתלות ב- n , m ו- k שזוכח את נכונותו. (ניתן להניח ש- $n-1 \geq m$).