1. נפעיל תחילה אלגוריתם למציאת רכ"ק
קשיר היטב בסיבוכיות $O(m+n)$ (DFS),
כמו שלמדנו בכיתה ונבדוק ב $O(n)$ האם
כל קודקודי הקבוצה S
נמצאים באותו רכ"ק!
רכיב קשיר היטב אם כן נמשיך
אם לא ~~ז~~ לא קבוצה קשירה היטב מינימלית.

נמשיך - על כל איבר בS ~~...~~ נפעיל את
האלגוריתם BFS המשופר הבא נצא מהקודקוד ונסמן
בצבע אפור לכל קודקוד שנגיע ב BFS נצבע
בשחור רק הקודקוד הראשון אפור ברגע שנגיע
אליו עוד פעם ונוכל לראות אותו כשחור
על כל איבר נבדוק שנגיע אליו נבדוק
האם הוא שייך לקבוצה S אם כן נרשום לידו
באיזה קבוצה של ה BFS הוא נמצא.
~~נסמן לנו הפעם תמצא~~ ~~הBFS~~ באיזשהו שלב בריצת
ה BFS נגיע עוד פעם לאיבר הראשון שהיה
אפור נסמנו כשחור ולא נמשיך ממנו אבל נסמן
לנו באיזה שלב הגענו אליו לבסוף -
נבדוק אם כל איבר מצאתי הקבוצה ~~שלב~~
הגענו אליו ואם כל אחד מהם בקבוצה אחרת
לא נבדוק עפ הטבלה שסימנו את באיזה שלב כל צומת
נמצא נבדוק האם האיבר שהיה הראשון הוא נמצא
בקבוצה שמספרה הוא כגודל הקבוצה S

~~אופטימי~~ כך נעשה לכל איבר מהקבוצה S
נמצא בשלב שונה במעגל עד החזרה למקור
וגודל המעגל הוא בגודל הקבוצה S
עבור כל איבר ~~בשל~~ בקבוצה S נפעיל
את האלגוריתם BFS הנ"ל ואם לכל קודקוד
שהפעלנו עליו את האלגוריתם כל חבריו לקבוצה
S נמצאים בשלבים שונים והקודקוד עצמו נמצא
בשלב שהוא גודל הקבוצה. (אם הקודקוד היה
בשלב נמוך מגודל הקבוצה אז קיים מעגל קטן
יותר שהוא קבוצה קטנה יותר מינימאלית יותר מזו שעליה
אנו עובדים).
סה"כ סיבוכיות עבור כל קודקוד S נפעיל BFS

$O((m+n)|S|)$

25/25

~~סיבוכיות הבעיה כפי שניסחנו היא~~
~~$O((m+n)\cdot S)$ . בשלב של נקודה~~
~~עבור ~~כל~~ כל שאר הקודקודים ב-S נפעיל~~
~~קודקודים שנמצאים ב-|S| פעמים (BFS-ים)~~

אוניברסיטת חיפה
UNIVERSITY OF HAIFA

ל תלמידים
בחינות

25/5

ג. נשתמש באלגוריתם של פרים

נסמן את הגודל של הקשת e כך:
אפשר לפתור בכמה דרכים שונות

$w(u,v) - e$

המשקל של הקשת (v,u) כתוב e - מספר קטן מאוד
שיביא את הקשת להיות קטנה יותר מכל
הקשתות האחרות בעץ הגודל וככה כאשר נגיע
לשלב 3) באלגוריתם כאשר $u \in Q$ ו $v \in S$
אז נוסיף הקשת v,u תיבחר ראשונה
מכל הקשתות שבעץ הגודל.

~~האלגוריתם לגודל הקשת מוגדל בעץ MST~~

עכשיו נפעיל את האלגוריתם של פרים ואם
~~e נמצאת בסוף האלגוריתם בעץ הפורש~~
~~המינימלי של פורש מינימום על G שמכיל~~
~~את e. [illegible] שהגדיר של~~
~~ואם יצרה סיבוב [illegible] לא יודע שהיא~~
~~הקלט מהעץ.~~
~~סיבוכיות ע"פ $O(m \log n)$ - פרים~~

e נמצאת בקבוצה A של קיים עץ פורש
מינימום של G שמכיל את e.
סיבוכיות ע"פ פרים $O(m \log n)$ במימוש של ערימה בינארית
רגילה ע"פ פרים כמו שעשינו בכיתה.

בכל פעם נבחרת הקשת הקלה ביותר ולכן אם e נבחרת
הוכחה: ע"פ ... בעץ פורש מינימום שמכיל את e.
טענה: בכל פעם שנכנסים לצעד 3 באלגוריתם
לכל צומת v בקבוצה Q, t(v) שווה למשקל הקשת
$(v,s(v))$ שהיא הקשת בעלת המשקל הקטן ביותר
מ-v לצומת כלשהו ב-S.

הוכחה באינדוקציה: בסיס: בפעם הראשונה שנכנסים לצעד 3
לכל צומת v ~~[illegible]~~ t(v) שווה למשקל הקשת ~~[illegible]~~
~~[illegible]~~ $(v,s)$ (אם קיימת כזו) וזו
הקשת היחידה שחוצה את החתך $(Q,S)$ שבו הוא
הכי קלה. לכן הטענה נכונה.

הנחה: נניח שהטענה נכונה בפעם ה-i-ית שנכנסים
לצעד 3.

הוכחה: נסתכל על המצב בצעד 3 בפעם ה-i+1.
נניח בלי הגבלת הכלליות שבצעד [illegible] של האיטרציה שלב 3
נבחר הצומת v ומוזזה מ-Q ל-S
לכל צומת שנמצא ב-Q אם הצומת אינו שכן
של v, אז קבוצת השכנים של צומת זה בS לא השתנתה
ולכן t(צומת זה) מכיל את הערך הנכון לפי הנחת האינדוקציה
נניח וצומת u שכן של v אז קבוצת השכנים של u
ב-S נוסף עוד v. לכן אם $w(u,v)<t(u)$ והוא הקטן
ע"פ $w(u,v)$ - אז הערך של t(u) מתעדכן
בצעד 3.2.1 ומקבל את הערך הנכון
הקשת קיבלה את ערכה החדש ותיבחר אם היא

נצרים 03 א
כל פעם



~~[illegible]~~ אני

הקבוצה ~~הגדולה~~ הקטנה ביותר בחתך (S,Q).

3.

3. עבור כל צומת בגרף $G$ אני אסמן

$\delta'(s,v) = \delta(s,v)$ – תחילה המרחק $(s,v)$

הקטן ביותר ב-$G$ שווה למרחק ב-$G'$.

עכשיו אני יוצא מהצומת $v$ שבקצה הקשת $(v,u)$

בשאלה הנתונה 1. אני אבדוק מהו $\delta(s,u)$

המרחק בין ההתחלה ל-$u$ תחילת הקשת ואני

אבדוק מהו $\delta(s,v)$ אם $\delta(s,v)$ ~~[illegible]~~ $\delta(s,u)$

אז השיפור של $(v,u)$ לא ישפר

את הקשת בגרף ואז אני מסיים. סוף

$\delta(s,u)+w(u,v)=\delta(s,v)$ אז אני מעדכן את

$\delta'(s,v)=\delta(s,v)-1$ ואז אני יוצא מהקשת $v$ ועובר

כל הקשתות שאני מגיע עם האלגוריתם BFS אני בודק

האם ~~הקשת~~ המרחק שהגענו אליו הגענו מהקשת הנוכחית

אם כן נקטין מחדש ונמשיך לבדוק אם לא

(הבדיקה מתבצעת כמו מקודם אם הדרך שמצאנו אנחנו בטוח

ועוד משקל הקשת שווה למשקל לפני אז אנחנו מעדכנים

למשקל החדש), אם המשקל שקיבל הצומת שהגענו

אליו נמוך יותר הוא קיבל אותו דרך קשת

אחרת ולכן לא ~~ממשיכים~~ מעדכנים אותו ולא ממשיכים

לבדוק דרכו.

סיבוכיות - $O(m+n)$ עפ"י ה BFS מדומה V

כאשר ה BFS נעצר ואין לו לאן להמשיך סיימנו.

V

4. אני אפעיל את אלגוריתם FF | EDmonds Karp

למציאת זרימת מקסימום ~~את~~ מצומת V

אם האלגוריתם ימצא זרימה מקסימלית מ-V ל-t

שיהיה שגדולה או שווה ל-K אז ~~אפשר~~ אפשר

להעביר מ-S ל-V זרימה בגודל K שתגיע

ל-t אם הזרימה המקסימלית שמצא האלגוריתם

מ-V ל-t קטנה מ-K אז אין דרך להעביר

דרך הקשת $(S,V)$ את K יחידות הזרימה

שכן מנקודה V אין להם לאן ללכת.

כמובן בתחילה אני אבדוק ש- $K \geq c(S,V)$

אם הקיבול של $c(S,V)$ קטן מ-K לא נוכל אף פעם

להעביר זרימה בקשת ש שהיא לפחות K.

זמן

~~סיבוכיות: הסיבוכיות היא של אלגוריתם אדמונד-קארפ~~

~~מצומת V בגלל שכל הקשתות והצמתים בגרף~~

~~יכולים להשתתף בקשתות והצמתים~~

~~הזרימה הסיבוכיות היא: $O(|V|\cdot|E|^2)$~~

אפשר גם להשתמש בשיטת FF ואז כאן K

הוא כי הסיבוכיות תהיה $O(|E|\cdot K)$ כי אנחנו

מחפשים רק זרימה K ולא גדולה ממנה.

4. נחפש מצומת V לכל צריכה בגודל k

~~אם~~ הצלחת הצריכה ומציאת מסלול השיפור

סיבובים יתבצעו ע"י האלגוריתם של ~~אדמונדס~~ אדמונדס וקארפ

בכל איטרציה נוכל להגדיל את הזרימה ~~[illegible]~~

ננסה להגדיל את הזרימה בעד k יחידות זרימה

בכל איטרציה כאשר אנו עובדים ע"פ האלגוריתם

של אדמונדס וקארפ אנו נבחר בשלב ה

של האלגוריתם את המסלול הקצר ביותר מ V לt

וננסה להעביר בו k יחידות או לא נצליח

נמצא מסלול שיפור ע"י האלגוריתם. לאחר שמצאנו

~~[illegible]~~ מ V לt נעביר בו k יחידות זרימה. זרימה חוקית

~~סיבוכיות: [illegible] אנחנו נצטרך במקרה הגרוע k~~

~~מסלולי שיפור מציאת כל מסלול $O(m)$~~

~~[illegible] בשלב ה שסיבוכיות $O(m+n) = O(m)$ (הגרף קשיר)~~

~~בניית גרף השיירית גם הוא $O(m)$.~~

~~סה"כ סיבוכיות $O(k \cdot m)$ עם k~~

~~צל הסיבוכיות $O(m \cdot f)$.~~

הוכחת נכונות: ~~[illegible]~~ מהקשת V לt הזרימה

נרשת חוקית ומתקיים חוק הקשת ותנאי השימור

מנכונות האלגוריתם של אדמונדס וקארפ.

~~שש~~ שניה נכונית עבור החתך $(S, V-S)$

חוק הזומת

$$\sum_{e \in in(v)} f(e) - \sum_{e \in out(v)} f(e) = 0$$

אנחנו מזרימים מ $s$ ל $v$ ~~k~~ יחידות רק קשת $e(s,v)$ — הפסלנו את אלגוריתם אדמונד קארפ מ $V$ שיש $k$ יחידות זרימה, $= 0$

חוק הקשת - כמובן שאי אפשר להעביר ב $e$ יותר זרימה מהקיבול והאלגוריתם של בודק את זה ואם $c(e)$ הוא מא לא ניתן להעביר זרימה $k$ לפי נתוני השאלה.

תהי $e=(u,v)$ קשת כלשהי כך ש $e$ מופיעה באוגמנטציה

$e$ מופיע לכל היותר $\frac{k}{2}$ פעמים בסדרת המסלולים

נניח טענה מהשעור - $\delta_{s_{i+1}}(u,v) \geq \delta_{s_i}(s,u)+2$

$\vdots$

$\delta_{s_j}(u,v) \geq \delta_{s_{i,1}}(s,u)+(j-1)\cdot 2$

עבור $k$ צעדים $|u| \leq \frac{k}{2}+1$

אוניברסיטת חיפה
UNIVERSITY OF HAIFA

מינהל תלמידים
בחינות

סיבוכיות: ע"פ אדמונד קארפ -

בגלל שאנו מעבירים לרמה $k$

הריצה ב אדמונד קארפ היא עד המרחק $k$

ולכן עבור כל קשת הקשת תהיה לכל היותר $\frac{k}{2}$

פעמים ולכן הסיבוכיות היא $O(m^2 k)$

$\frac{25}{25}$