אלגברה לינארית – אוסף תרגילים ופתרונות

איסוף ועריכה: עילאי הנדין

תוכן עניינים

תשס"ו

תשס"ה

תשס"ד

<u>תשס"ג</u>

<u>תשס"ב</u>

תרגיל בית מספר 1

מציאת מודול וארגומנט

מצא הצגה קוטבית למספרים הבאים: (זכור להתחשב ברביע בעת פתרון המשוואה $\tan\vartheta=\frac{b}{a}$!!)

1. $-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i$ 2. $-4i$ 3. $\sqrt{2}-\sqrt{6}+\left(\sqrt{2}+\sqrt{6}\right)i$

פעולות יסודיות על מספרים מרוכבים

1. נתון - $z=2-2i,\ w=-1+3i,\ u=4i,\ p=5$. חשב את הביטויים הבאים –

א) $p-3w+\frac{u}{\bar{z}+\bar{w}}$ ב) z^3 ג) $|w|+zw$

2. א) הוכח כי לכל מרוכב $z\neq 0$: $z^{-1}=\frac{\bar{z}}{|z|^2}$.

ב) חשב את $\left(i+\left[i+(i+1)^{-1}\right]^{-1}\right)^{-1}$.

מקומות גיאומטריים

תאר ושרטט במישור המרוכב את המקומות הגיאומטריים הבאים:

1. כל המרוכבים $z=a+bi$ המקיימים $|z-(2+i)|=|z+1|$.
2. כל המרוכבים $z=a+bi$ המקיימים $5<|z-2+i|$
3. כל המרוכבים $z=a+bi$ המקיימים $\frac{\pi}{3}<\arg(z)\leq\frac{2\pi}{3}$

פתרון משוואות במספרים מרוכבים

מצא את כל הפתרונות (אם יש כאלה) של המשוואות המרוכבות הבאות:

1. $|z|^2-1=\mathrm{Im}(z)\cdot i\cdot(1-z)$ 2. $2z^2=3\bar{z}$ 3. $z\cdot\bar{z}=z-\bar{z}$

תכונות המרוכבים

(לנוחיותך: תכונות המרוכבים מסומנות במסגרת בסוף דפי תרגול מספר 1)

1. הוכח כי אם z נמצאת על המעגל $|z|=1$ אזי $\mathrm{Re}(w)=-0.5$, כאשר $w=\frac{z}{1-z}$
2. נתון $|z_1|=|z_2|=1$, וכמו כן $z_1z_2\neq -1$. הוכח כי $\frac{z_1+z_2}{1+z_1z_2}$ הינו ממשי טהור.
3. יהי z מספר מרוכב. עבור כל אחד מהביטויים הבאים קבע האם הוא מדומה טהור, או ממשי טהור. שים ♥: בסעיף יש להשתמש בתכונות המרוכבים בלבד, ואין להציב $z=a+bi$!

א) $z-\bar{z}$ ב) $z_1\cdot\bar{z}_2-\bar{z}_1\cdot z_2$ ג) $\frac{\bar{z}_1}{z_2}+\frac{z_1}{\bar{z}_2}$

שאלת בונוס יהיו z,a מרוכבים. נתון כי $z\neq a$, $|z|=1$. הוכח כי $\left|\frac{z-a}{1-\bar{a}z}\right|=1$.

פתרונות לתרגיל בית 1

מציאת מודול וארגומנט

.1 $-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i$

המודול : $r=\sqrt{\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\sqrt{\left(\frac{2}{4}\right)+\left(\frac{2}{4}\right)}=\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}=\sqrt{1}=1$

הארגומנט : $\vartheta=\frac{\pi}{4}+\pi k \quad \Leftarrow \quad \tan\vartheta=\frac{-\frac{\sqrt{2}}{2}}{-\frac{\sqrt{2}}{2}}=1$, כאשר k שלם. במקרה שלנו – מדובר ברביע השלישי, היות שהחלק הממשי וגם החלק המדומה שניהם שליליים. לכן הארגומנט שלנו הוא $\vartheta=\frac{\pi}{4}+\pi=\frac{5\pi}{4}$.

סה״כ : הצגתו הקוטבית של $-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i$ היא $\left(1,\frac{5\pi}{4}\right)$.

.2 $-4i$

המודול : $r=\sqrt{0^2+(-4)^2}=\sqrt{16}=4$

הארגומנט : אין צורך לחשב, ניתן להסתכל ולראות ש- $-4i$ יוצר זווית של $\frac{3\pi}{2}$ עם הכיוון החיובי של הציר הממשי, שכן $-4i$ נמצא על הציר המדומה, בחלקו השלילי.

סה״כ : הצגתו הקוטבית של $-4i$ היא $\left(4,\frac{3\pi}{2}\right)$

.3 $\sqrt{2}-\sqrt{6}+\left(\sqrt{2}+\sqrt{6}\right)i$

שים ♥ להעלאת הביטוי $\left(\sqrt{2}+\sqrt{6}\right)^2$! (זוהי נוסחת כפל מקוצר, התשובה אינה $\left(\sqrt{2}+\sqrt{6}\right)^2 \neq \left(\sqrt{2}\right)^2+\left(\sqrt{6}\right)^2$)

↓

המודול : $r=\sqrt{\left(\sqrt{2}-\sqrt{6}\right)^2+\left(\sqrt{2}+\sqrt{6}\right)^2}=\sqrt{\left(2-2\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{6}+6\right)+\left(2+2\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{6}+6\right)}$

$=\sqrt{4+12}=\sqrt{16}=4$

↓

כינוס איברים דומים וצמצום

הארגומנט : $\tan\vartheta=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{\sqrt{2}-\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{\sqrt{2}-\sqrt{6}}\cdot\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{\sqrt{2}+\sqrt{6}}=\frac{\left(\sqrt{2}+\sqrt{6}\right)^2}{\left(\sqrt{2}\right)^2-\left(\sqrt{6}\right)^2}=\frac{2+2\sqrt{12}+6}{2-6}=$

$\frac{8+2\sqrt{12}}{-4}=-2-\frac{\sqrt{12}}{2}$

לפיכך $\vartheta = -75^\circ + \pi k$, כאשר k שלם. מאחר ש- $\sqrt{2} < \sqrt{6}$ החלק הממשי $\sqrt{2} - \sqrt{6} < 0$.

החלק המדומה $\sqrt{2} + \sqrt{6} > 0$. לכן מדובר ברביע השני. לפיכך $\vartheta = 105^\circ = \frac{7\pi}{12}$.

סה״כ : הייצוג הקוטבי של $\sqrt{2} - \sqrt{6} + \left(\sqrt{2} + \sqrt{6}\right)i$ הוא $\left(4,\ \frac{7\pi}{12}\right)$

פעולות יסודיות על מספרים מרוכבים

1. א)

$$p - 3w + \frac{u}{\overline{z} + \overline{w}} = 5 - 3(-1 + 3i) + \frac{4i}{\overline{(2-2i)} + \overline{(-1+3i)}} = 5 + 3 - 9i + \frac{4i}{2 + 2i - 1 - 3i} =$$

$$8 - 9i + \frac{4i}{1-i} = 8 - 9i + \frac{4i}{1-i}\cdot\frac{1+i}{1+i} = 8 - 9i + \frac{4i + (i)^2 4}{|1+i|^2} = 8 - 9i + \frac{4i - 4}{1^2 + 1^2} = 8 - 9i + \frac{-4 + 4i}{2} = 6 - 7i$$

ב)

$$z^3 = (2-2i)(2-2i)(2-2i) = (4 - 4 - 4i - 4i)(2-2i) = -8i(2-2i) =$$
$$-16i - 16 = -16(1+i)$$

ג)

$$|w| + zw = |-1 + 3i| + (2-2i)(-1+3i) = \sqrt{1+9} + (-2 + 6 + 6i + 2i) =$$
$$\left(\sqrt{10} + 4\right) + 8i$$

2. א) נשתמש בזהות $z \cdot \overline{z} = |z|^2$. מאחר ש- $z \neq 0$, גם $|z|^2 \neq 0$ $|z|,$. נחלק את שני אגפי הזהות ב- z , וב- $|z|^2$, ונקבל ש- $\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$, כנדרש.

ב) נעזר בסעיף א׳. תחילה נחשב את $(1+i)^{-1}$, שהוא הביטוי בסוגריים הפנימיים ביותר. עפ״י סעיף א׳- $(1+i)^{-1} = \frac{\overline{(1+i)}}{|(1+i)|^2} = \frac{1-i}{1^2+1^2} = \frac{1-i}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$. כעת נחשב את $\left[i + (1+i)^{-1}\right]^{-1}$, כלומר את

$$\left[i + \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}i\right]^{-1} = \left(\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}i\right)^{-1} = \frac{\overline{\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right)}}{\left|\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right)\right|^2} = \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i}{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}} = \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i}{\frac{1}{2}} = \left(\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}i\right)\cdot 2 = 1 - i$$

$\downarrow$

לפי סעיף א׳

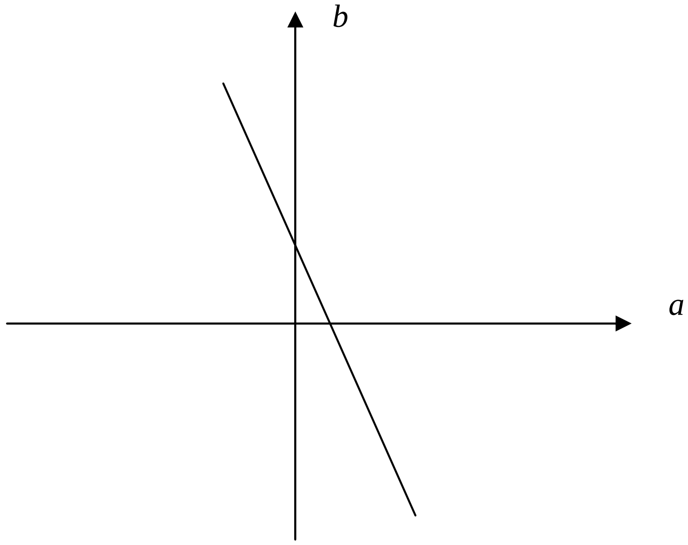
לבסוף, נחשב את $\left(i + \left[i + (1+i)^{-1}\right]^{-1}\right)^{-1}$, כלומר- לפי החישוב האחרון עלינו לחשב את $(i + 1 - i)^{-1}$. אולם- $(i + 1 - i) = 1$, ולכן גם $(i + 1 - i)^{-1} = 1$, וזוהי התשובה הסופית.

מקומות גיאומטריים

1. כל המרוכבים $z=a+bi$ המקיימים $|z-(2+i)|=|z+1|$.
נציב $z=a+bi$ ונקבל $|a+bi-(2+i)|=|a+bi+1|$,
כלומר- $|(a-2)+(b-1)i|=|(a+1)+bi|$
כלומר- $|(a-2)+(b-1)i|^2=|(a+1)+bi|^2$

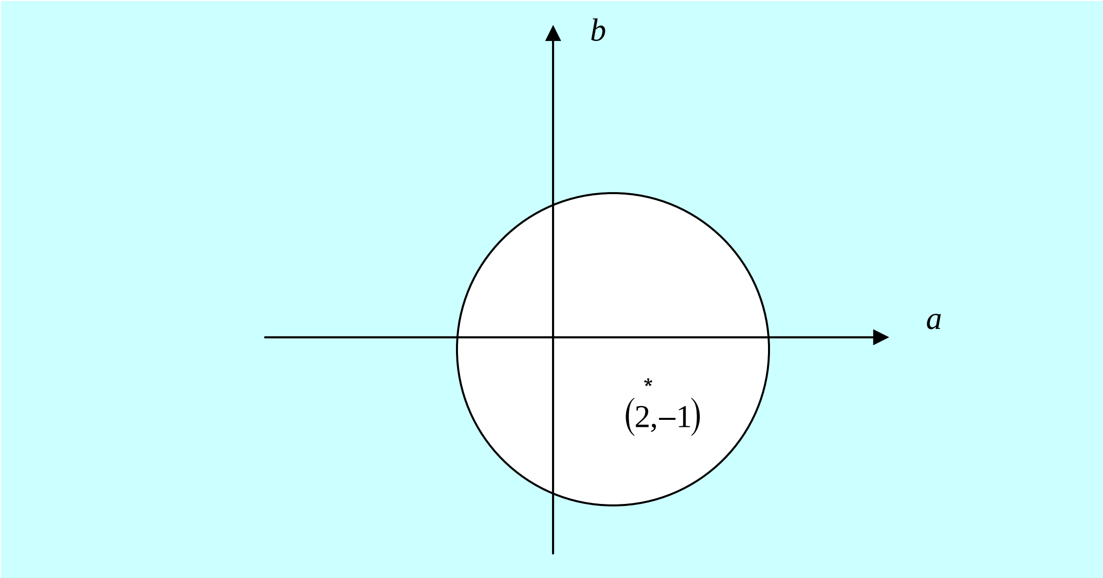
כלומר- $(a-2)^2+(b-1)^2=(a+1)^2+b^2$. נפתח סוגריים ונפשט כל אגף –
$$a^2-4a+4+b^2-2b+1=a^2+2a+1+b^2$$
$a^2-4a+b^2-2b+5=a^2+2a+1+b^2$. נכנס איברים:
$-6a+4=2b$, או - $b=-3a+2$.
נזכור ש- a מייצג את הציר הממשי, ו- b את הציר המדומה, ובמערכת הצירים נקבל כי זוהי משוואת ישר. (ניתן לחשוב עליה כעל הישר $y=-3x+2$).
כלומר- אוסף המרוכבים $z=a+bi$ המקיימים $|z-(2+i)|=|z+1|$ הם המרוכבים הנמצאים על הישר $b=-3a+2$.

שרטוט המקום הגיאומטרי במישור-

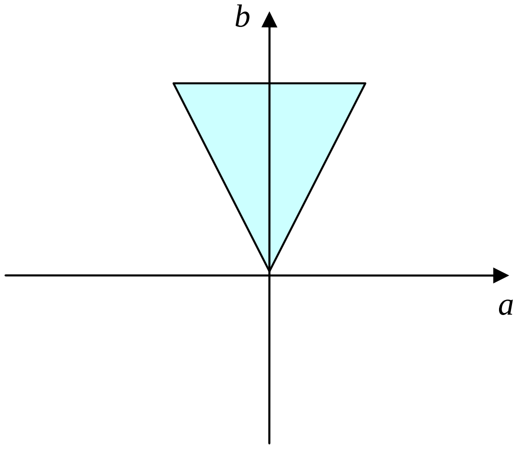


2. כל המרוכבים $z=a+bi$ המקיימים $5<|z-2+i|$. שוב נציב $z=a+bi$ ונקבל -
$5<|(a-2)+(b+1)i|$, כלומר- $5<\sqrt{(a-2)^2+(b+1)^2}$, או- $25<(a-2)^2+(b+1)^2$
(העלאה בריבוע אינה מוסיפה פתרונות כיוון ששני האגפים אי שליליים ממילא).

$25<(a-2)^2+(b+1)^2$ - זהו חוץ של מעגל שמרכזו בנקודה $(2,-1)$, ורדיוסו 5.
(כזכור- משוואת מעגל במישור בעל צירים a ו- b, עם מרכז ב- (t_1,t_2) ורדיוס R היא $(a-t_1)^2+(b-t_2)^2=R^2$.)
בשרטוט – החלק הצבוע בתכלת.



3. כל המרוכבים $z=a+bi$ המקיימים $\frac{\pi}{3}<\arg(z)\le\frac{2\pi}{3}$. מתקבלת הגזרה הפתוחה הבאה :
(כולל הצלע הימנית של המשולש, ולא כולל הצלע השמאלית).



משוואות במרוכבים

1. $|z|^2-1=\text{Im}(z)\cdot i\cdot(1-z)$. נסמן $z=a+bi$. נציב במשוואה ונקבל $|a+bi|^2-1=bi(1-a-bi)$. כלומר- $a^2+b^2-1=bi-abi+b^2$. כלומר- $a^2-1=bi-abi$, כלומר- $a^2+abi=1+bi$

נשווה חלקים מתאימים ונקבל : $\begin{cases}a^2=1\\ab=b\end{cases}$.

מהמשוואה הראשונה מקבלים $a=1$, או $a=-1$.

- אם $a=1$ - הצבה במשוואה השנייה תיתן לנו $-b=b$, כלומר $2b=0$, או $b=0$.

- אם $a=-1$ - הצבה במשוואה השנייה תיתן לנו $b=b$. (כלומר- במקרה זה אין כל הגבלה על b. הוא יכול להיות כל מספר ממשי.)

סה"כ – יש לנו פתרון אחד המתקבל כאשר $a=1$, ו- $b=0$, והוא $z=1$, ואינסוף פתרונות מהצורה $z=-1+bi$, כאשר b ממשי.

2. $2z^2=3\bar{z}$. שוב, נסמן $z=a+bi$, ונציב במשוואה: $2(a+bi)(a+bi)=3(a-bi)$, כלומר- $2\left(a^2+b^2+2abi\right)=3a-3bi$. כלומר- $2a^2+2b^2+4abi=3a-3bi$.
נשווה את החלקים המתאימים ונקבל:

$$\begin{cases} 2a^2+2b^2=3a \\ 4ab=-3b \end{cases}$$

מן המשוואה השנייה נקבל - $4ab+3b=0 \quad \Leftarrow \quad (4a+3)b=0$, ועל כן - $b=0$ או $a=-\frac{3}{4}$.

- אם $b=0$ הצבה במשוואה הראשונה תיתן $2a^2=3a$, כלומר $a(2a-3)=0$, כלומר- $a=0$ או $a=\frac{3}{2}$.
- אם $a=-\frac{3}{4}$ הצבה במשוואה הראשונה תיתן $2\cdot\frac{9}{16}-2b^2=-\frac{9}{4}$, כלומר $\frac{9}{8}-2b^2=-\frac{9}{4}$. נכפול ב- 8 ונקבל $9-16b^2=-18$, ובמילים אחרות - $b^2=\frac{27}{16}$. על כן - $b=\pm\frac{3\sqrt{3}}{4}$.

סה"כ יש לנו 4 פתרונות והם: $z=0,\ z=\frac{3}{2},\ z=-\frac{3}{4}+\frac{3\sqrt{3}}{4},\ -\frac{3}{4}-\frac{3\sqrt{3}}{4}$.

3. $z\cdot\bar{z}=z-\bar{z}$. ניתן לבדוק ולראות כי אגף שמאל הוא מספר ממשי טהור, בעוד אגף ימין הינו מדומה טהור. הסבר – באגף שמאל $z\cdot\bar{z}=|z|^2$, וזהו מספר ממשי. באגף ימין - $z-\bar{z}$. אם נסמן $z=a+bi$ נראה כי $z-\bar{z}=a+bi-(a-bi)=a+bi-a+bi=2bi$, וזהו מדומה טהור.
(ניתן גם לסמן $t=z-\bar{z}$ ולראות כי $\bar{t}=-t$, ולפי הדגשים בתרגול זה מעיד על כך ש- $z-\bar{z}$ הינו מדומה טהור.)
בכל אופן – המספר היחיד שהוא גם ממשי טהור וגם מדומה טהור הוא $z=0$, וזהו פתרון המשוואה.

תכונות המרוכבים

1. ידוע כי $|z|=1$ ועלינו להראות כי $\operatorname{Re}(w)=-0.5$, כאשר $w=\dfrac{z}{1-z}$. כידוע- עבור מספר מרוכב w , $\operatorname{Re}(w)=\dfrac{w+\bar{w}}{2}$. כלומר-

הצמדה של מנה היא מנת הצמודים
הצמדה של הפרש הוא הפרש הצמודים

$$\operatorname{Re}(w)=\frac{w+\bar{w}}{2}=\frac{\frac{z}{1-z}+\overline{\left(\frac{z}{1-z}\right)}}{2}=\frac{\frac{z}{1-z}+\frac{\bar{z}}{\overline{1-z}}}{2}=\frac{\frac{z}{1-z}+\frac{\bar{z}}{1-\bar{z}}}{2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{z}{1-z}+\frac{\bar{z}}{1-\bar{z}}$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{z(1-\bar{z})+\bar{z}(1-z)}{(1-z)(1-\bar{z})}=\frac{1}{2}\cdot\frac{z-z\bar{z}+\bar{z}-\bar{z}z}{1-\bar{z}-z+z\bar{z}}=\frac{1}{2}\cdot\frac{z-|z|^2+\bar{z}-|z|^2}{1-\bar{z}-z+|z|^2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{z+\bar{z}-2}{-z-\bar{z}+2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{z+\bar{z}-2}{-(z+\bar{z}-2)}=-\frac{1}{2}$$

צמצום   נתון כי $|z|=1$ $z\cdot\bar{z}=|z|^2$

2. עלינו להראות כי $\frac{z_1+z_2}{1+z_1z_2}$ ממשי טהור, כלומר- להראות כי החלק המדומה של מספר זה מתאפס. כידוע, עבור מספר מרוכב w, $\mathrm{Im}(w)=\frac{w-\overline{w}}{2i}$. על כן $\mathrm{Im}(w)=0$ אם ורק אם $\frac{w-\overline{w}}{2i}=0$, ואם נכפול משוואה זו ב- $2i$ נקבל $w-\overline{w}=0$, זאת אומרת $w=\overline{w}$.

לכן- עבור $w=\frac{z_1+z_2}{1+z_1z_2}$ עלינו להוכיח כי $w=\overline{w}$, כלומר- $\overline{\left(\frac{z_1+z_2}{1+z_1z_2}\right)}=\frac{z_1+z_2}{1+z_1z_2}$.

פיתוח אגף ימין נותן: $\overline{\left(\frac{z_1+z_2}{1+z_1z_2}\right)}=\frac{\overline{z_1+z_2}}{\overline{1+z_1z_2}}=\frac{\overline{z_1}+\overline{z_2}}{1+\overline{z_1z_2}}=\frac{\overline{z_1}+\overline{z_2}}{1+\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}}$

הצמדה של מנה היא מנת הצמודים   הצמדה של סכום הוא סכום הצמודים   הצמדה של כפל היא מכפלת הצמודים

על כן- עלינו להראות כי $\frac{\overline{z_1}+\overline{z_2}}{1+\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}}=\frac{z_1+z_2}{1+z_1z_2}$.

נכפול בהצלבה (כלומר- נכפיל את שני אגפי המשוואה בשני המכנים), ונקבל כי עלינו להראות: $\left(\overline{z_1}+\overline{z_2}\right)\left(1+z_1z_2\right)=\left(z_1+z_2\right)\left(1+\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}\right)$

כלומר צריך להוכיח: (פתיחת סוגריים) $\overline{z_1}+\overline{z_1}\cdot z_1\cdot z_2+\overline{z_2}+\overline{z_2}\cdot z_1\cdot z_2=z_1+z_1\cdot\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}+z_2+z_2\cdot\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}$

כלומר- צריך להוכיח: $\overline{z_1}+|z_1|^2\cdot z_2+\overline{z_2}+\overline{z_2}\cdot z_2\cdot z_1=z_1+|z_1|^2\cdot\overline{z_2}+z_2+z_2\cdot\overline{z_2}\cdot\overline{z_1}$

$z_1z_2=z_2z_1$ (או במילים – כפל מרוכבים הינו חילופי) $z\cdot\bar{z}=|z|^2$ $z_1z_2=z_2z_1$ (או במילים – כפל מרוכבים הינו חילופי) $z\cdot\bar{z}=|z|^2$

כלומר- צריך להוכיח: $\overline{z_1}+|z_1|^2\cdot z_2+\overline{z_2}+|z_2|^2\cdot z_1=z_1+|z_1|^2\cdot\overline{z_2}+z_2+|z_2|^2\cdot\overline{z_1}$

כזכור, נתון כי $|z_1|=|z_2|=1$. נציב זאת ונקבל כי עלינו להוכיח: $\overline{z_1}+z_2+\overline{z_2}+z_1=z_1+\overline{z_2}+z_2+\overline{z_1}$. אם נשתמש בעובדה כי חיבור מרוכבים הוא חילופי, נקבל מהשוויון האחרון את פסוק האמת הבא: $z_1+z_2+\overline{z_1}+\overline{z_2}=z_1+z_2+\overline{z_1}+\overline{z_2}$, ועל כן השוויון מתקיים.

3. בכל סעיף נסמן את הביטוי המבוקש ב- t, ונבדוק מהו $\bar{t}$. אם $\bar{t}=t$ נסיק כי t הוא ממשי טהור, אם $\bar{t}=-t$ נסיק כי t הוא מדומה טהור.

<u>**הסבר-**</u>

t ממשי טהור. $\Leftarrow \mathrm{Im}(t)=0 \;\Leftarrow\; \dfrac{\bar{t}-t}{2i}=0 \;\Leftarrow\; \bar{t}-t=0 \;\Leftarrow\; \bar{t}=t$

t מדומה טהור. $\Leftarrow \mathrm{Re}(t)=0 \;\Leftarrow\; \dfrac{\bar{t}+t}{2}=0 \;\Leftarrow\; \bar{t}+t=0 \;\Leftarrow\; \bar{t}=-t$

<u>**הערה-**</u> באופן כללי יתכנו ביטויים שאינם מדומה טהור או ממשי טהור, אך לא בתרגיל זה.

א) $z-\bar{z}$ נסמן $t=z-\bar{z}$. אזי $\bar{t}=\overline{(z-\bar{z})}=\bar{z}-z=-(z-\bar{z})=-t$, לכן t מדומה טהור.

ב) $z_1\cdot\bar{z}_2-\bar{z}_1\cdot z_2$ נסמן $t=z_1\cdot\bar{z}_2-\bar{z}_1\cdot z_2$. אזי

$\bar{t}=\overline{(z_1\cdot\bar{z}_2-\bar{z}_1\cdot z_2)}=\bar{z}_1\cdot z_2-z_1\cdot\bar{z}_2=-(z_1\cdot\bar{z}_2-\bar{z}_1\cdot z_2)=-t$, לכן t מדומה טהור.

ג) $\dfrac{z_1}{\bar{z}_2}+\dfrac{\bar{z}_1}{z_2}$ נסמן $t=\dfrac{z_1}{\bar{z}_2}+\dfrac{\bar{z}_1}{z_2}$. אזי $\bar{t}=\overline{\left(\dfrac{\bar{z}_1}{z_2}+\dfrac{z_1}{\bar{z}_2}\right)}=\dfrac{z_1}{\bar{z}_2}+\dfrac{\bar{z}_1}{z_2}=\dfrac{\bar{z}_1}{z_2}+\dfrac{z_1}{\bar{z}_2}=t$, לכן t ממשי טהור.

<u>שאלת בונוס :</u> נראה כי $\left|\dfrac{z-a}{1-\bar{a}z}\right|=1$. מאחר שמודול של מנה הוא מנת המודולים, ניתן להוכיח באופן שקול כי $\dfrac{|z-a|}{|1-\bar{a}z|}=1$, או כי $|z-a|=|1-\bar{a}z|$, או כי - $|z-a|^2=|1-\bar{a}z|^2$

(השקילות האחרונה נובעת מהעובדה ש- $|w|\geq 0$ תמיד, ולכן העלאה בריבוע אינה מוסיפה פתרונות לשוויון המקורי).

נזכור ש- $w\cdot\bar{w}=|w|^2$, ולכן במקום $|z-a|^2=|1-\bar{a}z|^2$ נרשום $(z-a)\overline{(z-a)}=(1-\bar{a}z)\overline{(1-\bar{a}z)}$.

נפעל לפי חוקים הנוגעים להצמדה (הפרש של צמודים, מכפלת הצמודים, צמוד של צמוד) ונקבל כי עלינו להוכיח את השוויון השקול - $(z-a)(\bar{z}-\bar{a})=(1-\bar{a}z)(1-a\bar{z})$

נפתח סוגריים - $z\bar{z}-z\bar{a}-a\bar{z}+a\bar{a}=1-a\bar{z}-\bar{a}z+a\bar{a}z\bar{z}$. שוב נשתמש בזהות $w\cdot\bar{w}=|w|^2$, ובנתון $|z|=1$, ונקבל שנותר להוכיח $1-z\bar{a}-a\bar{z}+|a|^2=1-a\bar{z}-\bar{a}z+|a|^2$, וזהו פסוק אמת.

תרגיל בית מספר 2

הצגה קוטבית:

חשב: א) $2e^{\frac{7\pi}{6}}$ ב) $4e^{-\frac{4\pi}{3}}$

נוסחת דה מואבר:

1. חשב: א) $\left(-\sqrt{3}+i\right)^{6}$ ב) $\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{-25}$

2. נתון כי z שורש יחידה מסדר n. (כלומר $z^n=1$). הראה כי גם $\frac{1}{z}$, ו- $\bar{z}$ הינם שורשי יחידה מסדר n.

משוואות: (מצא את כל הפתרונות של המשוואות הבאות)

1. $z^3-(2+2i)^2=0$ 2. $(z+5i)^6+1=0$

שאלות נוספות וחלוקת פולינומים:

1. שניים מפתרונות המשוואה $z^3+mz^2+n=0$ (m,n מרוכבים!!!) הם $-i,\ 1+i$. מצא את m,n.
2. ידוע כי אחד משורשי המשוואה $x^4+3x^3+6x^2+2x-12=0$ הוא $-1+\sqrt{5}i$. מצא את כל שאר השורשים.
3. מצא את הערך של m שעבורו הפולינום x^3+x^2+mx+8 מתחלק ללא שארית בפולינום $x-2$.

מטריצות

נתונות המטריצות הבאות:

1. $\begin{pmatrix}0&5&0\\0&0&5\\0&0&0\end{pmatrix}$ 2. $\begin{pmatrix}0&5&0\\5&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ 3. $\begin{pmatrix}0&5&0\\-5&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ 4. $\begin{pmatrix}4&0&0\\0&5&0\\0&0&6\end{pmatrix}$

5. $\begin{pmatrix}4&0&0\\0&4&0\\0&0&4\end{pmatrix}$ 6. $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$

קבע לגבי כל אחת מהמטריצות הממוספרות 1- 6 האם היא משולשית עליונה, משולשית תחתונה, אלכסונית, סקלארית, סימטרית, אנטי- סימטרית, ע"י מילוי + או – בתא המתאים בטבלה.

	משולשת עליונה	משולשת תחתונה	אלכסונית	סקלארית	סימטרית	אנטי סימטרית
1						
2						
3						
4						
5						
6						

להגשה עד: 20.11.05 (עד 19:00)
בהצלחה!!!

פתרונות לתרגיל בית מספר 2

הצגה קוטבית

א) כדי לחשב את $2e^{\frac{7\pi}{6}}$ נשים ♥ ש- $\frac{7\pi}{6}$ הם 210°. (מכפילים $\frac{7}{6}\times 180^\circ$). כעת

$$2e^{\frac{7\pi}{6}} = 2\left(\cos\left(210^\circ\right)+i\cdot\sin\left(210^\circ\right)\right)=2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right)=-\sqrt{3}-i$$

ב) כדי לחשב את $4e^{-\frac{4\pi}{3}}$ נשים ♥ ש - $-\frac{4\pi}{3}$ הם -240° , או- 120°. כעת

$$4e^{-\frac{4\pi}{3}} = 4\left(\cos\left(120^\circ\right)+i\cdot\sin\left(120^\circ\right)\right)=4\left(-\tfrac{1}{2}+\tfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)=-2+2\sqrt{3}i$$

נוסחת דה- מואבר

1. א) כדי לחשב את $\left(-\sqrt{3}+i\right)^6$ נעבור להצגה קוטבית, וכך נוכל להשתמש בנוסחת דה- מואבר.

המודול : $r=\sqrt{3+1}=2$

הארגומנט: $\tan\vartheta=\frac{1}{-\sqrt{3}}$ $\quad \vartheta=-\frac{\pi}{6}+\pi k$, וברביע הרלוונטי - $\vartheta=\frac{10\pi}{12}=150^\circ$.

על כן הייצוג הקוטבי של $\left(-\sqrt{3}+i\right)$ הוא $2\cdot e^{\frac{10\pi}{12}}$.

לכן, לפי משפט דה- מואבר

$$\left(-\sqrt{3}+i\right)^6 = \left(2\cdot e^{\frac{10\pi}{12}}\right)^6 = 2^6\cdot e^{\frac{10\pi}{2}} = 64\cdot e^{5\pi} = 64\left(\cos\left(5\pi\right)+i\cdot\sin\left(5\pi\right)\right)=-64$$

ב) כדי לחשב את $\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{-25}$ נעביר ראשית את $\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ להצגה קוטבית, כדי שנוכל להשתמש בנוסחת דה- מואבר.

המודול : $r=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}}=1$

הארגומנט : $\tan\vartheta=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}}=\sqrt{3} \quad \Rightarrow \vartheta=\frac{\pi}{3}+\pi k$

לכן ההצגה הקוטבית של $\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ היא $e^{\frac{\pi}{3}i}$, ולפי נוסחת דה מואבר

$$\left(e^{\frac{\pi}{3}i}\right)^{-25} = e^{-25\frac{\pi}{3}i} = \cos\left(-1500^\circ\right)+i\cdot\sin\left(-1500^\circ\right)=$$
$$\cos\left(-\left(360^\circ\times 4\right)-60^\circ\right)+i\cdot\sin\left(-\left(360^\circ\times 4\right)-60^\circ\right)=\cos\left(-60^\circ\right)+i\cdot\sin\left(-60^\circ\right)=\tfrac{1}{2}-\tfrac{\sqrt{3}}{2}i$$

1

2. ידוע כי $z^n = 1$.
נארגן כרגיל את הנתונים בטבלה, ונאסוף מידע.

אגף ימין: מודול: $r = \sqrt{1^2 + 0^2} = 1$	אגף שמאל: $z = r \cdot e^{\vartheta i}$
אגף ימין: ארגומנט: $\vartheta = 0$ (אין צורך לחשב, רואים זאת- מפני ש - 1 הינו ממשי טהור, היוצר זווית של 0° עם הכיוון החיובי של הציר הממשי.)	אגף שמאל- חזקה: $z^n = r^n \cdot e^{n\vartheta i}$

מערכת המשוואות המתקבלת: $\begin{cases} r^n = 1 \\ n\vartheta = 2\pi k \end{cases}$, כאשר k שלם. $\Leftarrow$ $\begin{cases} r = 1 \\ \vartheta = \dfrac{2\pi k}{n} \end{cases}$

עד כה- אנו יודעים כי $\boxed{r = 1\ ,\ \vartheta = \dfrac{2\pi k}{n}}$.

כעת, נזכור כי אם $z = r \cdot e^{\vartheta i}$, אזי $\bar{z} = r \cdot e^{-\vartheta i}$, ונראה כי גם $\bar{z}^n = 1$.

$$(\bar{z})^n = e^{-n\vartheta i} = e^{-n\cdot\frac{2\pi k}{n} i} = e^{-2\pi k i} = \cos(-2\pi k) + i \cdot \sin(-2\pi k) = 1 + i \cdot 0 = 1$$

$$\downarrow \qquad\qquad\qquad\qquad \downarrow$$

$$\vartheta = \frac{2\pi k}{n} \qquad\qquad \forall m \in Z \quad \begin{cases} \cos(2\pi m) = 1 \\ \sin(2\pi m) = 0 \end{cases}$$

נראה כעת כי גם $\left(\dfrac{1}{z}\right)^n = 1$. ניתן לכתוב $z^{-1} = \dfrac{1}{z}$, ולכן $\left(\dfrac{1}{z}\right)^n = \left(z^{-1}\right)^n = z^{-n}$.

$$z^{-n} = e^{-n\vartheta i} = e^{-n\cdot\frac{2\pi k}{n} i} = e^{-2\pi k i} = \cos(-2\pi k) + i \cdot \sin(-2\pi k) = 1 + i \cdot 0 = 1$$

$$\downarrow \qquad\qquad\qquad\qquad \downarrow$$

$$\vartheta = \frac{2\pi k}{n} \qquad\qquad \forall m \in Z \quad \begin{cases} \cos(2\pi m) = 1 \\ \sin(2\pi m) = 0 \end{cases}$$

משוואות

1. $z^3 - (2+2i)^2 = 0$ ראשית, נחשב ונמצא כי $(2+2i)^2 = 8i$. לכן המשוואה שעלינו לפתור שקולה למשוואה הבאה: $z^3 - 8i = 0$, או $z^3 = 8i$

אגף ימין: מודול: $r = \sqrt{0^2 + (-8)^2} = 8$	אגף שמאל: $z = r \cdot e^{\vartheta i}$
אגף ימין: ארגומנט: $\vartheta = \dfrac{\pi}{2}$ (אין צורך לחשב, רואים זאת- מפני ש - $8i$ הינו מדומה טהור, היוצר זווית של 90° עם הכיוון החיובי של הציר הממשי.)	אגף שמאל- חזקה: $z^3 = r^3 \cdot e^{3\vartheta i}$

2

מערכת המשוואות המתקבלת : $\begin{cases} r^3 = 8 \\ 3\vartheta = \frac{\pi}{2} + 2\pi k \end{cases}$, כאשר k שלם. $\Leftarrow$ $\begin{cases} r = 2 \\ \vartheta = \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi k}{3} \end{cases}$

נציב $k = 0,1,2$, ונקבל את הפתרונות השונים :

<u>עבור $k = 0$:</u> $z_0 = 2e^{\frac{\pi}{6}i} = 2\left(\cos 30^\circ + i \cdot \sin 30^\circ\right) = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = \sqrt{3} + i$

<u>עבור $k = 1$:</u> $z_1 = 2e^{\left(\frac{5\pi}{6}\right)i} = 2\left(\cos 150^\circ + i \cdot \sin 150^\circ\right) = 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = -\sqrt{3} + i$

<u>עבור $k = 2$:</u> $z_2 = 2e^{\frac{9\pi}{6}i} = 2\left(\cos 270^\circ + i \cdot \sin 270^\circ\right) = -2i$

(הערה למניעת בלבול : הסיבה שהפתרונות שהתקבלו אינם צמודים זה לזה היא שמקדמי המשוואה אינם ממשיים טהורים...)

2. $\left(z + 5i\right)^6 + 1 = 0$. ראשית – נציב $t = z + 5i$, ונקבל את המשוואה הבאה - $t^6 + 1 = 0$, או לחילופין $t^6 = -1$. (בסיום התהליך – נזכור לעבור בחזרה אל המשתנה z, ע״י הפחתה של $5i$ מכל אחד מהפתרונות).

אגף ימין : מודול : $r = \sqrt{\left(-1\right)^2 + 0^2} = 1$	אגף שמאל : $z = r \cdot e^{\vartheta i}$
אגף ימין : ארגומנט : $\vartheta = \pi$ (אין צורך לחשב, רואים זאת- מפני ש - $1-$ הינו ממשי טהור, היוצר זווית של 180° עם הכיוון החיובי של הציר הממשי.)	אגף שמאל- חזקה : $z^6 = r^6 \cdot e^{6\vartheta i}$

מערכת המשוואות המתקבלת : $\begin{cases} r^6 = 1 \\ 6\vartheta = \pi + 2\pi k \end{cases}$, כאשר k שלם. $\Leftarrow$ $\begin{cases} r = 1 \\ \vartheta = \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi k}{6} \end{cases}$

נציב $k = 0,1,2,3,4,5$, ונקבל את הפתרונות השונים :

<u>עבור $k = 0$</u> : $t_0 = e^{\frac{\pi}{6}i} = \cos 30^\circ + i \cdot \sin 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$

<u>עבור $k = 1$</u> : $t_1 = e^{\frac{\pi}{2}i} = \left(\cos 90^\circ + i \cdot \sin 90^\circ\right) = i$

<u>עבור $k = 2$</u> : $t_2 = e^{\frac{5\pi}{6}i} = \cos 150^\circ + i \cdot \sin 150^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$

<u>עבור $k = 3$</u> : $t_3 = e^{\frac{7\pi}{6}i} = \cos 210^\circ + i \cdot \sin 210^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$

<u>עבור $k = 4$</u> : $t_4 = e^{\frac{9\pi}{6}i} = \left(\cos 270^\circ + i \cdot \sin 270^\circ\right) = -i$

<u>עבור $k = 5$</u> : $t_5 = e^{\frac{11\pi}{6}i} = \cos 330^\circ + i \cdot \sin 330^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$

סה״כ – פתרונות המשוואה $t^6 + 1 = 0$ הם : $-\frac{\sqrt{3}}{2} \pm \frac{1}{2}i,\ \ \frac{\sqrt{3}}{2} \pm \frac{1}{2}i,\ \ \pm i$.

כזכור- עלינו למצוא את פתרונות המשוואה $(z+5i)^6+1=0$, וסימנו $t=z+5i$. לכן $z=t-5i$,

וכך הפתרונות הם -

$$t_0=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i \quad \Rightarrow z_0=t_0-5i=\frac{\sqrt{3}}{2}-4\frac{1}{2}i$$

$$t_1=i \quad \Rightarrow z_1=t_1-5i=-4i$$

$$t_2=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i \quad \Rightarrow z_2=t_2-5i=-\frac{\sqrt{3}}{2}-4\frac{1}{2}i$$

$$t_3=-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i \quad \Rightarrow z_3=t_3-5i=-\frac{\sqrt{3}}{2}-5\frac{1}{2}i$$

$$t_4=-i \quad \Rightarrow z_4=t_4-5i=-6i$$

$$t_5=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i \quad \Rightarrow z_5=t_5-5i=\frac{\sqrt{3}}{2}-5\frac{1}{2}i$$

סה"כ הפתרונות הם : $-\frac{\sqrt{3}}{2}-5\frac{1}{2}i,\ -\frac{\sqrt{3}}{2}-4\frac{1}{2}i,\ \frac{\sqrt{3}}{2}-5\frac{1}{2}i,\ \frac{\sqrt{3}}{2}-4\frac{1}{2}i,\ -6i,\ -4i$

שאלות נוספות

1. נציב את $1+i,\ -i$ (כל אחד בנפרד) במשוואה $z^3+mz^2+n=0$, שהרי אנו יודעים כי $1+i$ ו- $-i$ מאפסים משוואה זו.

<u>הצבת</u> $\underline{1+i}$: $(1+i)^3+m(1+i)^2+n=0$

חישובי עזר : $(1+i)^2=1-1+i+i=2i$

$$(1+i)^3=(1+i)(1+i)^2=(1+i)2i=2i-2=-2+2i$$

כעת במקום $(1+i)^3+m(1+i)^2+n=0$

נרשום $\boxed{-2+2i+m\cdot 2i+n=0}$.

<u>הצבת</u> $\underline{-i}$: $(-i)^3+m(-i)^2+n=0$

חישובי עזר : $(-i)^2=i^2=-1$

$$(-i)^3=(-i)^2\cdot(-i)=-1\cdot(-i)=i$$

כעת במקום $(-i)^3+m(-i)^2+n=0$

נרשום $\boxed{i-m+n=0}$.

קבלנו 2 משוואות ש- 2 נעלמים - m,n :

$$-2+2i+m\cdot 2i+n=0$$
$$i-m+n=0$$

מהמשוואה הראשונה נקבל כי $n=m-i$. נציב זאת במשוואה השנייה ונקבל
$-2+2i+m\cdot 2i+m-i=0$ כלומר- $-2+i+m\cdot 2i+m=0$, כלומר
$-2+i+m(2i+1)=0$

לפיכך $m(2i+1)=2-i$, או $m=\frac{2-i}{2i+1}=\frac{2-i}{1+2i}\cdot\frac{1-2i}{1-2i}=\frac{-5i}{5}=-i$.

מאחר ש- $n=m-i$ נקבל כי $n=-2i$.

<u>תשובה סופית</u> : $m=-i,\quad n=-2i$

2. מאחר ש- $x^4+3x^3+6x^2+2x-12$ הוא פולינום בעל מקדמים ממשיים, אזי אם $-1+\sqrt{5}i$ שורש של המשוואה $x^4+3x^3+6x^2+2x-12=0$, גם $\overline{-1+\sqrt{5}i}=-1-\sqrt{5}i$ שורש של משוואה זו .

לכן, הפולינום $x^4+3x^3+6x^2+2x-12$ מתחלק ללא שארית בביטוי

$$\left[x-\left(-1+\sqrt{5}i\right)\right]\left[x-\left(-1-\sqrt{5}i\right)\right]=\left(x+1-\sqrt{5}i\right)\left(x+1+\sqrt{5}i\right)=$$
$$\left[(x+1)-\sqrt{5}i\right]\left[(x+1)+\sqrt{5}i\right]=(x+1)^2-\left(\sqrt{5}i\right)^2=x^2+2x+1-(-5)=x^2+2x+6$$

נבצע חלוקת פולינומים של $x^4+3x^3+6x^2+2x-12$ ב- x^2+2x+6

$$x^2+x-2$$
$$x^2+2x+6\,\big)\,x^4+3x^3+6x^2+2x-12$$
$$-$$
$$\underline{x^4+2x^3+6x^2}$$
$$x^3+2x-12$$
$$-$$
$$\underline{x^3+2x+6x}$$
$$-2x^2-4x-12$$
$$-$$
$$\underline{-2x^2-4x-12}$$
$$=$$

לפיכך, $x^4+3x^3+6x^2+2x-12=\left(x^2+2x+6\right)\left(x^2+x-2\right)$.

השורשים של x^2+2x+6 הם כאמור - $-1+\sqrt{5}i$, והצמוד שלו : $-1-\sqrt{5}i$

השורשים של x^2+x-2 הם ממשיים,(ניתן למצוא אותם ע"י שימוש בנוסחת השורשים) והם :
$1,-2$.

סה"כ כל הפתרונות למשוואה $x^4+3x^3+6x^2+2x-12=0$ הם : $-1+\sqrt{5}i$, $-1-\sqrt{5}i$,
$1, -2$.

3. נבצע חילוק פולינומים רגיל.

$$
\begin{array}{r l}
 & x^3+3x+m+6 \\
\cline{2-2}
x-2 \big) & x^3+x^2+mx+8 \\
- & \\
 & \underline{x^3-2x^2} \\
 & \quad 3x^2+mx+8 \\
 & \quad - \\
 & \quad \underline{3x^2-6x} \\
 & \qquad (m+6)x+8 \\
 & \qquad - \\
 & \qquad \underline{(m+6)x-2(m+6)} \\
 & \qquad\qquad =
\end{array}
$$

בשלב האחרון אנו דורשים שלא תהיה שארית, כלומר צריך להתקיים $8=-2(m+6)$, נחלק ב-
-2 ונקבל כי $m+6=-4$, כלומר $m=-10$.

מטריצות

	משולשית עליונה	משולשית תחתונה	אלכסונית	סקלארית	סימטרית	אנטי סימטרית
$\begin{pmatrix}0&5&0\\0&0&5\\0&0&0\end{pmatrix}$	+	-	-	-	-	-
$\begin{pmatrix}0&5&0\\5&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$	-	-	-	-	+	-
$\begin{pmatrix}0&5&0\\-5&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$	-	-	-	-	-	+
$\begin{pmatrix}4&0&0\\0&5&0\\0&0&6\end{pmatrix}$	+	+	+	-	+	-
$\begin{pmatrix}4&0&0\\0&4&0\\0&0&4\end{pmatrix}$	+	+	+	+	+	-
$\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$	-	-	-	-	-	-

6

החוג למדעי המחשב,
אלגברה ליניארית,
סמסטר א' תשס"ו

תרגיל בית 3

1. תכונות החיבור יהי F שדה, יהיו $A\in F^{m\times n}$, ו- $\alpha,\beta\in F$. הוכח:
א) $A+(-A)=[0]$, כאשר $-A=(-1)\cdot A$
ב) $(\alpha\beta)\cdot A=\alpha\cdot(\beta A)$

2. תכונות הכפל יהי F שדה, ותהיינה $B,C\in F^{n\times k}$, $A\in F^{m\times n}$. הוכח:
א) $A\cdot(B+C)=A\cdot B+A\cdot C$
ב) $\alpha(A\cdot B)=(\alpha A)\cdot B=A\cdot(\alpha B)$

3. תהי A מטריצה ריבועית מסדר $n\times n$, ו- P מסדר $n\times n$. נגדיר $B=P^tAP$.
א) הוכח כי אם A סימטרית אזי B סימטרית.
ב) הוכח כי אם A אנטי סימטרית אזי B אנטי סימטרית.

4. נתון:
$$A=\begin{pmatrix}2&-3&-5\\-1&4&5\\1&-3&-4\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}-1&3&5\\1&-3&-5\\-1&3&5\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}2&-2&-4\\-1&3&4\\1&-2&-3\end{pmatrix}$$
א) הראה כי $AB=BA=0$, $AC=A$, $CA=C$.
ב) השתמש בסעיף א' כדי להראות כי $ACB=CBA$.

5. מצא מטריצה X המקיימת את המשוואה: $\begin{pmatrix}2&5\\1&3\end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix}4&-6\\2&1\end{pmatrix}$, או הוכח כי אין כזו.

6. תהיינה $A,B\in R^{n\times n}$ ו- B שתי מטריצות המקיימות $AB=2A$ ו- $BA=B$
אזי, קיימים סקלרים $\alpha,\beta\in R$ כך שמתקיים: $A^2=\alpha A$ ו- $B^2=\beta B$.
אם קיימים סקלרים $\alpha,\beta\in R$ כאלו, מצאו אותם. אחרת הוכיחו את אי קיומם.

7. תהיינה $A\in R^{n\times n}$ אלכסונית, ו- $B\in R^{n\times n}$ משולשית עליונה. הוכח או הפרך:
- AB מטריצה משולשית עליונה.
- BA=AB.

8. מצא נוסחה כללית עבור $\begin{pmatrix}x&1\\0&x\end{pmatrix}^n$ לכל $n\geq 1$, והוכח אותה. (רמז- השתמש באינדוקציה)

9. תהי $A\in\Re^{2\times 2}$ המקיימת $A^2=A$. הוכח כי $tr(A)$ יכול להיות 0, 1, או 2 בלבד.

תאריך הגשה אחרון:
27.11.05
עד שעה 14:00

בהצלחה!

פתרונות לתרגיל בית מספר 3

שאלה 1

א) תהי $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ מטריצה מסדר $m\times n$ מעל F. אזי

$$-A=(-1)\cdot A=(-1)\cdot\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & -a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ -a_{m1} & -a_{m2} & \cdots & -a_{mn} \end{pmatrix}$$

כעת -

$$A+(-A)=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & -a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ -a_{m1} & -a_{m2} & \cdots & -a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} a_{11}+(-a_{11}) & a_{12}+(-a_{12}) & \cdots & a_{1n}+(-a_{1n}) \\ a_{21}+(-a_{21}) & a_{22}+(-a_{22}) & \cdots & a_{2n}+(-a_{2n}) \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{m1}+(-a_{m1}) & a_{m2}+(-a_{m2}) & \cdots & a_{mn}+(-a_{mn}) \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} a_{11}-a_{11} & a_{12}-a_{12} & \cdots & a_{1n}-a_{1n} \\ a_{21}-a_{21} & a_{22}-a_{22} & \cdots & a_{2n}-a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{m1}-a_{m1} & a_{m2}-a_{m2} & \cdots & a_{mn}-a_{mn} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}=[0]$$

ב) תהי $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ מטריצה מסדר $m\times n$ מעל F, ויהיו $\alpha,\beta\in F$.

אזי באגף שמאל :

$$(\alpha\beta)\cdot A=(\alpha\beta)\cdot\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \alpha\beta a_{11} & \alpha\beta a_{12} & \cdots & \alpha\beta a_{1n} \\ \alpha\beta a_{21} & \alpha\beta a_{22} & \cdots & \alpha\beta a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \alpha\beta a_{m1} & \alpha\beta a_{m2} & \cdots & \alpha\beta a_{mn} \end{pmatrix}$$

ובאגף ימין :

$$\alpha\cdot(\beta A)=\alpha\cdot(\ \beta\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & & \ddots & \vdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}\end{pmatrix})=\alpha\cdot\begin{pmatrix} \beta a_{11} & \beta a_{12} & \cdots & \beta a_{1n}\\ \beta a_{21} & \beta a_{22} & \cdots & \beta a_{2n}\\ \vdots & & \ddots & \vdots\\ \beta a_{m1} & \beta a_{m2} & \cdots & \beta a_{mn}\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} \alpha\beta a_{11} & \alpha\beta a_{12} & \cdots & \alpha\beta a_{1n}\\ \alpha\beta a_{21} & \alpha\beta a_{22} & \cdots & \alpha\beta a_{2n}\\ \vdots & & \ddots & \vdots\\ \alpha\beta a_{m1} & \alpha\beta a_{m2} & \cdots & \alpha\beta a_{mn}\end{pmatrix}$$

ניתן לראות כי שני האגפים שווים.

ג) נראה כי $(A+B)^t=A^t+B^t$. (לא ניתן כתרגיל בית)

תהיינה $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & & \ddots & \vdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}\end{pmatrix}$ ו- $B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n}\\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n}\\ \vdots & & \ddots & \vdots\\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn}\end{pmatrix}$ מטריצות מסדר $m\times n$

מעל F. אזי באגף שמאל:

$$(A+B)^t=(\ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & & \ddots & \vdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n}\\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n}\\ \vdots & & \ddots & \vdots\\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn}\end{pmatrix}\ )^t=$$

$$=(\ \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n}\\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n}\\ \vdots & & \ddots & \vdots\\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn}\end{pmatrix}\ )^t=$$

$$=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{21}+b_{21} & \cdots & a_{m1}+b_{m1}\\ a_{12}+b_{12} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{m2}+b_{m2}\\ \vdots & & \ddots & \vdots\\ a_{1n}+b_{1n} & a_{n2}+b_{n2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn}\end{pmatrix}$$

כמו כן :

ו- $A^t = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$

$$B^t = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{21} & \cdots & b_{m1} \\ b_{12} & b_{22} & \cdots & b_{m2} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ b_{1n} & b_{2n} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

ולכן – באגף ימין:
$$A^t + B^t = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{21} & \cdots & b_{m1} \\ b_{12} & b_{22} & \cdots & b_{m2} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ b_{1n} & b_{2n} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{21}+b_{21} & \cdots & a_{m1}+b_{m1} \\ a_{12}+b_{12} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{m2}+b_{m2} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{1n}+b_{1n} & a_{n2}+b_{n2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$$

ניתן לראות כי שני האגפים שווים.

שאלה 2

א) נראה כי $A\cdot(B+C)=A\cdot B+A\cdot C$

תהיינה $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ מטריצה מסדר $m\times n$, $B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1r} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2r} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ b_{1r} & b_{2r} & \cdots & b_{nr} \end{pmatrix}$ ו-

$C=\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1r} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2r} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nr} \end{pmatrix}$ מטריצות מסדר $n\times r$ מעל F. אזי באגף שמאל:

$$A(B+C)=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}\left(\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1r} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2r} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ b_{1r} & b_{2r} & \cdots & b_{nr} \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1r} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2r} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nr} \end{pmatrix}\right)$$

$$=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{11}+c_{11} & b_{12}+c_{12} & \cdots & b_{1r}+c_{1r} \\ b_{21}+c_{21} & b_{22}+c_{22} & \cdots & b_{2r}+c_{2r} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ b_{n1}+c_{n1} & b_{n2}+c_{n2} & \cdots & b_{nr}+c_{nr} \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n} a_{1i}(b_{i1}+c_{i1}) & \sum_{i=1}^{n} a_{1i}(b_{i2}+c_{i2}) & \cdots & \sum_{i=1}^{n} a_{1i}(b_{ir}+c_{ir}) \\ \sum_{i=1}^{n} a_{2i}(b_{i1}+c_{i1}) & \sum_{i=1}^{n} a_{2i}(b_{i2}+c_{i2}) & \cdots & \sum_{i=1}^{n} a_{2i}(b_{ir}+c_{ir}) \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \sum_{i=1}^{n} a_{mi}(b_{i1}+c_{i1}) & \sum_{i=1}^{n} a_{mi}(b_{i2}+c_{i2}) & \cdots & \sum_{i=1}^{n} a_{mi}(b_{ir}+c_{ir}) \end{pmatrix}$$

מצד שני, באגף ימין נקבל : $A\cdot B + A\cdot C =$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1r} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2r} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ b_{1r} & b_{2r} & \cdots & b_{nr} \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1r} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2r} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nr} \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n} a_{1i}b_{i1} & \sum_{i=1}^{n} a_{1i}b_{i2} & \cdots & \sum_{i=1}^{n} a_{1i}b_{ir} \\ \sum_{i=1}^{n} a_{2i}b_{i1} & \sum_{i=1}^{n} a_{2i}b_{i2} & \cdots & \sum_{i=1}^{n} a_{2i}b_{ir} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \sum_{i=1}^{n} a_{mi}b_{i1} & \sum_{i=1}^{n} a_{mi}b_{i2} & & \sum_{i=1}^{n} a_{mi}b_{ir} \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n} a_{1i}c_{i1} & \sum_{i=1}^{n} a_{1i}c_{i2} & \cdots & \sum_{i=1}^{n} a_{1i}c_{ir} \\ \sum_{i=1}^{n} a_{2i}c_{i1} & \sum_{i=1}^{n} a_{2i}c_{i2} & \cdots & \sum_{i=1}^{n} a_{2i}c_{ir} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \sum_{i=1}^{n} a_{mi}c_{i1} & \sum_{i=1}^{n} a_{mi}c_{i2} & & \sum_{i=1}^{n} a_{mi}c_{ir} \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n} a_{1i}(b_{i1}+c_{i1}) & \sum_{i=1}^{n} a_{1i}(b_{i2}+c_{i2}) & \cdots & \sum_{i=1}^{n} a_{1i}(b_{ir}+c_{ir}) \\ \sum_{i=1}^{n} a_{2i}(b_{i1}+c_{i1}) & \sum_{i=1}^{n} a_{2i}(b_{i2}+c_{i2}) & \cdots & \sum_{i=1}^{n} a_{2i}(b_{ir}+c_{ir}) \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \sum_{i=1}^{n} a_{mi}(b_{i1}+c_{i1}) & \sum_{i=1}^{n} a_{mi}(b_{i2}+c_{i2}) & \cdots & \sum_{i=1}^{n} a_{mi}(b_{ir}+c_{ir}) \end{pmatrix}$$

ניתן אם כן לראות כי שני האגפים שווים.

ב) נוכיח כי $\alpha(A\cdot B)=(\alpha A)\cdot B = A\cdot(\alpha B)$. תהיינה $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ מטריצה

מסדר $m\times n$, $B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1r} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2r} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ b_{1r} & b_{2r} & \cdots & b_{nr} \end{pmatrix}$ מטריצה מסדר $n\times r$ ו- $\alpha\in F$ סקלר.

אזי

$$\alpha(AB)=\alpha\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n} a_{1i}b_{i1} & \sum_{i=1}^{n} a_{1i}b_{i2} & \cdots & \sum_{i=1}^{n} a_{1i}b_{ir} \\ \sum_{i=1}^{n} a_{2i}b_{i1} & \sum_{i=1}^{n} a_{2i}b_{i2} & \cdots & \sum_{i=1}^{n} a_{2i}b_{ir} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \sum_{i=1}^{n} a_{mi}b_{i1} & \sum_{i=1}^{n} a_{mi}b_{i2} & & \sum_{i=1}^{n} a_{mi}b_{ir} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \alpha\sum_{i=1}^{n} a_{1i}b_{i1} & \alpha\sum_{i=1}^{n} a_{1i}b_{i2} & \cdots & \alpha\sum_{i=1}^{n} a_{1i}b_{ir} \\ \alpha\sum_{i=1}^{n} a_{2i}b_{i1} & \alpha\sum_{i=1}^{n} a_{2i}b_{i2} & \cdots & \alpha\sum_{i=1}^{n} a_{2i}b_{ir} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \alpha\sum_{i=1}^{n} a_{mi}b_{i1} & \alpha\sum_{i=1}^{n} a_{mi}b_{i2} & & \alpha\sum_{i=1}^{n} a_{mi}b_{ir} \end{pmatrix}$$

↓ כפל מטריצות ↓ הגדרת כפל מטריצה בסקלר

$$(\alpha A)B=\begin{pmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \cdots & \alpha a_{1n} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} & \cdots & \alpha a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \alpha a_{m1} & \alpha a_{m2} & \cdots & \alpha a_{mn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1r} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2r} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ b_{1r} & b_{2r} & \cdots & b_{nr} \end{pmatrix}$$

↓ הגדרת כפל מטריצה בסקלר

$$=\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n} \alpha a_{1i}b_{i1} & \sum_{i=1}^{n} \alpha a_{1i}b_{i2} & \cdots & \sum_{i=1}^{n} \alpha a_{1i}b_{ir} \\ \sum_{i=1}^{n} \alpha a_{2i}b_{i1} & \sum_{i=1}^{n} \alpha a_{2i}b_{i2} & \cdots & \sum_{i=1}^{n} \alpha a_{2i}b_{ir} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \sum_{i=1}^{n} \alpha a_{mi}b_{i1} & \sum_{i=1}^{n} \alpha a_{mi}b_{i2} & & \sum_{i=1}^{n} \alpha a_{mi}b_{ir} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \alpha\sum_{i=1}^{n} a_{1i}b_{i1} & \alpha\sum_{i=1}^{n} a_{1i}b_{i2} & \cdots & \alpha\sum_{i=1}^{n} a_{1i}b_{ir} \\ \alpha\sum_{i=1}^{n} a_{2i}b_{i1} & \alpha\sum_{i=1}^{n} a_{2i}b_{i2} & \cdots & \alpha\sum_{i=1}^{n} a_{2i}b_{ir} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \alpha\sum_{i=1}^{n} a_{mi}b_{i1} & \alpha\sum_{i=1}^{n} a_{mi}b_{i2} & & \alpha\sum_{i=1}^{n} a_{mi}b_{ir} \end{pmatrix}$$

↓ הוצאת קבוע מחוץ לסכום

עד כה ראינו כי $\alpha(A\cdot B)=(\alpha A)\cdot B$

$$A\cdot(\alpha B)=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \alpha \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1r} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2r} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ b_{1r} & b_{2r} & \cdots & b_{nr} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha b_{11} & \alpha b_{12} & \cdots & \alpha b_{1r} \\ \alpha b_{21} & \alpha b_{22} & \cdots & \alpha b_{2r} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \alpha b_{1r} & \alpha b_{2r} & \cdots & \alpha b_{nr} \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n} a_{1i}\alpha b_{i1} & \sum_{i=1}^{n} a_{1i}\alpha b_{i2} & \cdots & \sum_{i=1}^{n} a_{1i}\alpha b_{ir} \\ \sum_{i=1}^{n} a_{2i}\alpha b_{i1} & \sum_{i=1}^{n} a_{2i}\alpha b_{i2} & \cdots & \sum_{i=1}^{n} a_{2i}\alpha b_{ir} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \sum_{i=1}^{n} a_{mi}\alpha b_{i1} & \sum_{i=1}^{n} a_{mi}\alpha b_{i2} & & \sum_{i=1}^{n} a_{mi}\alpha b_{ir} \end{pmatrix} \underset{\substack{\downarrow \\ \text{הוצאת קבוע מחוץ לסכום}}}{=} \begin{pmatrix} \alpha\sum_{i=1}^{n} a_{1i} b_{i1} & \alpha\sum_{i=1}^{n} a_{1i} b_{i2} & \cdots & \alpha\sum_{i=1}^{n} a_{1i} b_{ir} \\ \alpha\sum_{i=1}^{n} a_{2i} b_{i1} & \alpha\sum_{i=1}^{n} a_{2i} b_{i2} & \cdots & \alpha\sum_{i=1}^{n} a_{2i} b_{ir} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \alpha\sum_{i=1}^{n} a_{mi} b_{i1} & \alpha\sum_{i=1}^{n} a_{mi} b_{i2} & & \alpha\sum_{i=1}^{n} a_{mi} b_{ir} \end{pmatrix}$$

ולכן $\alpha(A\cdot B)=(\alpha A)\cdot B=A\cdot(\alpha B)$.

שאלה 3

מגדירים $B=P^tAP$, כאשר A, ו- P מטריצות מסדר $n\times n$, ו- A סימטרית.

א) $(B)^t=(P^tAP)^t=P^tA^t(P^t)^t=P^tA^tP=P^tAP$

$A^t=A$ $\quad (P^t)^t=P$ $\quad$ עבור מטריצות כלשהן D,C : $(CD)^t=D^tC^t$ (כאשר D ,C מתאימות להכפלה).

ב) $(B)^t=(P^tAP)^t=P^tA^t(P^t)^t=P^tA^tP=P^t(-A)P=-P^tAP$

$\beta(C\cdot D)=C\cdot(\beta D)$ $\quad A^t=-A$ $\quad (P^t)^t=P$ $\quad$ עבור מטריצות כלשהן D,C : $(CD)^t=D^tC^t$ (כאשר D ,C מתאימות להכפלה).

שאלה 4

א) $C=\begin{pmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 1 & -3 & -5 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{pmatrix}$

$$AB=\begin{pmatrix}2&-3&-5\\-1&4&5\\1&-3&-4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1&3&5\\1&-3&-5\\-1&3&5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2-3+5&6+9-15&10+15-25\\1+4-5&-3-12+15&-5-20+25\\-1-3+4&3+9-12&5+15-20\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$$BA=\begin{pmatrix}-1&3&5\\1&-3&-5\\-1&3&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&-3&-5\\-1&4&5\\1&-3&-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2-3+5&3+12-15&5+15-20\\2+3-5&-3-12+15&-5-15+20\\-2-3+5&3+12-15&5+15-20\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}. \quad \Leftarrow AB=BA=0.$$

$$AC=\begin{pmatrix}2&-3&-5\\-1&4&5\\1&-3&-4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2&-2&-4\\-1&3&4\\1&-2&-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4+3-5&-4-9+10&-8-12+15\\-2-4+5&2+12-10&4+16-15\\2+3-4&-2-9+8&-4-12+12\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&-3&-5\\-1&4&5\\1&-3&-4\end{pmatrix}$$

$$\Leftarrow AC=A$$

$$CA=\begin{pmatrix}2&-2&-4\\-1&3&4\\1&-2&-3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2&-3&-5\\-1&4&5\\1&-3&-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4+2-4&-6-8+12&-10-10+16\\-2-3+4&3+12-12&5+15-16\\2+2-3&-3-8+9&-5-10+12\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&-2&-4\\-1&3&4\\1&-2&-3\end{pmatrix}$$

$$\Leftarrow CA=C$$

ב) נפתח את שני האגפים: אגף שמאל- $ACB=(AC)B=(A)B=AB=0$ (כי $AC=A$). אגף ימין- $CBA=C(BA)=C(0)=0$ (כי $CA=C$). $\Leftarrow$ $ACB=0=CBA$.

שאלה 5

מהמשוואה $\begin{pmatrix}2&5\\1&3\end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix}4&-6\\2&1\end{pmatrix}$ נובע כי X היא מטריצה מסדר 2×2. (אחרת- אינה מתאימה להכפלה עם $\begin{pmatrix}2&5\\1&3\end{pmatrix}$, או שהתוצאה לא תהיה $\begin{pmatrix}4&-6\\2&1\end{pmatrix}$, שהיא מסדר 2×2).

על כן נסמן $X=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$. כעת במקום $\begin{pmatrix}2&5\\1&3\end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix}4&-6\\2&1\end{pmatrix}$ נרשום $\begin{pmatrix}2&5\\1&3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&-6\\2&1\end{pmatrix}$. נכפיל את המטריצות: $\begin{pmatrix}2a+5c&2b+5d\\a+3c&b+3d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&-6\\2&1\end{pmatrix}$.

נשווה את האיברים במקומות המתאימים - $\begin{cases}2a+5c=4\\2b+5d=-6\\a+3c=2\\b+3d=1\end{cases}$ ממשוואה (4) נקבל $b=1-3d$.

נציב זאת במשוואה (2) ונקבל $\boxed{d=8}$. לכן - $\boxed{b=-23}$. ממשוואה (3) נקבל $a=2-3c$. נציב זאת במשוואה (1) ונקבל $\boxed{c=0}$, ולכן $\boxed{a=2}$.

בסה"כ $X=\begin{pmatrix}a & b\\c & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & -23\\0 & 8\end{pmatrix}$

שאלה 6

תהיינה $A,B\in R^{n\times n}$ שתי מטריצות המקיימות $AB=2A$ ו- $BA=B$.

אנו מחפשים סקלר $\alpha\in\Re$ כך ש- $A^2=\alpha A$ (*). אם נכפיל את $BA=B$ ב- A משמאל נקבל $BA^2=BA$ (**). כלומר אנו צריכים למצוא $\alpha\in\Re$ שעבורו $B(\alpha A)=BA$ (הצבת (*) ב- (**)) כלומר- אנו מחפשים $\alpha\in\Re$ שעבורו $\alpha BA=BA$, לכן נוכל לקחת $\alpha=1$.

באופן דומה עלינו למצוא $\beta\in\Re$ המקיים (*) $B^2=\beta B$. אם נכפיל את $AB=2A$ ב- B מימין נקבל (**) $AB^2=2AB$. כלומר אנו צריכים למצוא $\beta\in\Re$ שעבורו $A(\beta B)=2AB$ (הצבת (*) ב- (**)) כלומר- אנו מחפשים $\beta\in\Re$ שעבורו $\beta AB=2AB$, לכן נוכל לקחת $\beta=2$.

סה"כ - $\alpha=1$ ו- $\beta=2$ יקיימו את הנדרש.

שאלה 7

א) הטענה נכונה. תהי $A=\begin{pmatrix}a_{11} & 0 & \cdots & 0\\0 & a_{22} & \cdots & 0\\\vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\0 & 0 & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix}$ מטריצה אלכסונית מסדר n, ו-

$B=\begin{pmatrix}b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n}\\0 & b_{22} & \cdots & b_{2n}\\\vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\0 & 0 & \cdots & b_{nn}\end{pmatrix}$ מטריצה משולשית עליונה מסדר n.

אזי $AB=\begin{pmatrix}a_{11} & 0 & \cdots & 0\\0 & a_{22} & \cdots & 0\\\vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\0 & 0 & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n}\\0 & b_{22} & \cdots & b_{2n}\\\vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\0 & 0 & \cdots & b_{nn}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}b_{11} & a_{11}b_{12} & \cdots & a_{11}b_{1n}\\0 & a_{22}b_{22} & \cdots & a_{22}b_{2n}\\\vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\0 & 0 & \cdots & a_{nn}b_{nn}\end{pmatrix}$

הינה מטריצה משולשית עליונה.

ב) הטענה אינה נכונה. דוגמא נגדית – ניקח $B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 3\end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}$. אזי A אלכסונית, B משולשית, אבל בעוד ש- $AB=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 6\end{pmatrix}$,

$BA=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 4\\ 0 & 6\end{pmatrix}$, ולכן $AB\neq BA$.

שאלה 8

נעלה את $\begin{pmatrix}x & 1\\ 0 & x\end{pmatrix}$ בחזקות שונות, ונשים לב לחוקיות המתקבלת, בטרם ניסוח הכלל והוכחתו.

$$\begin{pmatrix}x & 1\\ 0 & x\end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix}x & 1\\ 0 & x\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x & 1\\ 0 & x\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x^2 & 2x\\ 0 & x^2\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}x & 1\\ 0 & x\end{pmatrix}^3=\begin{pmatrix}x & 1\\ 0 & x\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x & 1\\ 0 & x\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x^3 & 3x^2\\ 0 & x^3\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}x & 1\\ 0 & x\end{pmatrix}^4=\begin{pmatrix}x^3 & 3x^2\\ 0 & x^3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x & 1\\ 0 & x\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x^4 & 4x^3\\ 0 & x^4\end{pmatrix}$$

לפיכך, מסתמנת מגמה ברורה...

כעת ניגש לפתרון התרגיל - ננסח כלל ונוכיח באינדוקציה:

לכל $n\geq 1$ טבעי $\begin{pmatrix}x & 1\\ 0 & x\end{pmatrix}^n=\begin{pmatrix}x^n & nx^{n-1}\\ 0 & x^n\end{pmatrix}$

בסיס האינדוקציה: עבור $n=1$ מקבלים $\begin{pmatrix}x & 1\\ 0 & x\end{pmatrix}^1=\begin{pmatrix}x^1 & nx^0\\ 0 & x^1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x & 1\\ 0 & x\end{pmatrix}$

הנחת האינדוקציה: נניח כי עבור $n=k$ טבעי $\begin{pmatrix}x & 1\\ 0 & x\end{pmatrix}^k=\begin{pmatrix}x^k & kx^{k-1}\\ 0 & x^k\end{pmatrix}$, ונוכיח את נכונות הטענה עבור $n=k+1$:

$$\begin{pmatrix}x & 1\\ 0 & x\end{pmatrix}^{k+1}=\begin{pmatrix}x & 1\\ 0 & x\end{pmatrix}^k\cdot\begin{pmatrix}x & 1\\ 0 & x\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x^k & kx^{k-1}\\ 0 & x^k\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x & 1\\ 0 & x\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x^{k+!} & (k+1)x^k\\ 0 & x^{k+1}\end{pmatrix}$$

$\downarrow$

עפ"י הנחת האינדוקציה

הוכחנו כי הטענה נכונה עבור n=1, והראנו כי אם היא נכונה עבור $n=k$ טבעי, אזי היא נכונה גם עבור $n=k+1$, על כן הטענה נכונה עבור כל $n\geq 1$ טבעי.

שאלה 9

נסמן $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. אזי $tr(A)=a+d$. צריך להתקיים: $A^2=A$, כלומר-

$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. נכפיל את המטריצות: $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a^2+bc & ab+db \\ ac+dc & bc+d^2 \end{pmatrix}$ ונשווה את האיברים במקומות המתאימים:

$$\begin{cases} a^2+bc=a \\ (a+d)b=b \\ (a+d)c=c \\ bc+d^2=d \end{cases}$$

נזכור שעלינו למצוא את הערכים האפשריים של $tr(A)=a+d$. נפריד למקרים:

<u>מקרה א׳:</u> $b=0$

הצבה תיתן לנו $a^2=a,\ d^2=d$. כלומר- $(d=0$ או $d=1)$ וגם $(a=0$ או $a=1)$.

על כן הערכים האפשריים של $a+d$ במקרה א׳ הם:

- $a+d=0$, כאשר $a=d=0$.
- $a+d=1$, כאשר $a=0,\ d=1$ או $a=1,\ d=0$.
- $a+d=2$, כאשר $a=d=1$.

<u>מקרה ב׳:</u> $b\neq 0$

אזי נוכל לחלק את משוואה (2) ב- $b\neq 0$ ולקבל כי $a+d=1$. מאחר שזוהי מערכת וגם - אין צורך להמשיך ולפתור, שכן גם אם תתקבלנה דרישות נוספות על a,d, הן חייבות שלא לסתור את הדרישה $a+d=1$ (או אחרת - אין פתרון עבור מקרה זה). על כן לא מתוסף לנו מידע חדש.

סה״כ – בכל מקרה חייב להתקיים $a+d=0$ או $a+d=1$ או $a+d=2$.

תרגיל בית מספר 4

1. הוכח או הפרך : אם A מטריצה מסדר $n \times n$ משולשית עליונה אזי A מדורגת.

2. מהן כל המטריצות מגודל 2×2 שהן מצומצמות שורה?

3. א) עבור אילו ערכים של a דרגת המטריצה הבאה $\begin{pmatrix} a & a & -1 \\ a^2 & a & a^2-a \\ a & a & 2a+1 \end{pmatrix}$ תהיה 1? 2? 3?

ב) עבור אילו ערכים של a המטריצה הנ"ל תהיה הפיכה?

4. עבור המטריצה הבאה - $A = \begin{pmatrix} a(a+1) & a^2+3a & -a^2 \\ a+1 & 2 & 1 \\ 2(a+1) & 4 & a^2+3 \end{pmatrix}$ קבע :

א) עבור אילו ערכים של a המטריצה A הפיכה, אם a ממשי?
ב) עבור אילו ערכים של a המטריצה A הפיכה, אם a מרוכב?

5. תהי $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 8 \end{pmatrix}$. מצא את A^{-1} ע"י הבאת $(A \mid I)$ לצורה מצומצמת שורות.

6. הגדרה - מטריצה ריבועית $A \neq 0$ המקיימת $A^2 = A$ נקראת מטריצת הטלה.
א. הוכיחו כי אם A מטריצת הטלה אז גם $I - A$ היא מטריצת הטלה.
ב. הוכיחו כי אם A מטריצת הטלה ו-A הפיכה אז $A = I$.
ג. הוכיחו כי אם A מטריצת הטלה אז $I + A$ הפיכה ומתקיים $(I+A)^{-1} = I - \frac{1}{2}A$.
ד. תוך שימוש בסעיף ג', מצאו את ההופכית של $B = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.

7. נתונה מטריצה A מסדר 3×3. ידוע שסכום כל האיברים בשורה הראשונה שווה ל- 6 , סכום כל האיברים בשורה השנייה שווה ל- 7 , וסכום כל האיברים בשורה השלישית שווה ל- 11. נתונה מטריצה אלמנטארית E : $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

א) תאר את E כסדרה של מטריצות אלמנטאריות.
ב) מהו סכום האיברים בשורה השלישית במטריצה EA ? נמק !

<u>תאריך הגשה אחרון :</u>
<u>4.12.05, עד 14:00</u>

בהצלחה!

<u>פתרונות לתרגיל בית 4</u>

1. הטענה אינה נכונה. נסתכל על הדוגמא הבאה- $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. מטריצה זו משולשית עליונה, אולם אינה מדורגת, שכן האיבר המוביל בשורה השנייה נמצא משמאל, ולא מימין לאיבר המוביל בשורה שמעליו.

2. $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$. נראה כי ישנם כמה סוגים של מטריצות מצומצמות שורה מסדר 2. נשים ♥ כי האיבר a_{11} חייב להיות 0, או 1.

אם <u>$a_{11} = 1$</u>, בהכרח האיבר שמתחתיו- a_{21} חייב להיות 0. כלומר אנו מתבוננים במקרה הבא - $\begin{pmatrix} 1 & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix}$. מה יכולים להיות האיברים a_{22} , a_{12} ? a_{22} חייב להיות 0, או 1 (כאיבר מוביל).

אם $a_{22} = 1$ -האיבר a_{12} חייב להיות 0, אחרת יכולנו לפעול עם השורה השנייה כדי לאפס אותו. לכן מדובר במטריצה $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

אם $a_{22} = 0$ - האיבר מעליו a_{12} יכול להיות ממשי כלשהו. לכן מתקבלות מטריצות מהצורה $\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, כאשר x ממשי.

אם <u>$a_{11} = 0$</u>, בהכרח האיבר שמתחתיו- a_{21} חייב להיות 0. (אחרת המטריצה אינה מדורגת) כלומר אנו מתבוננים במקרה הבא - $\begin{pmatrix} 0 & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix}$. מה יכולים להיות האיברים a_{22} , a_{12} ?

a_{22} חייב להיות0, או 1 (כאיבר מוביל) .

אם $a_{22} = 1$ - לא יתכן כי $a_{12} \neq 0$, שכן אז יכולנו לפעול כדי לאפס אותו, והמטריצה לא הייתה מצומצמת שורות. לכן $a_{12} = 0$ ונקבל את $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. אולם – מטריצה זו כלל אינה מדורגת.

לכן – לא יתכן כי $a_{22} = 1$, וחייב להתקיים $a_{22} = 0$. לכן מתקבלת המטריצה $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

אם $a_{22} = 0$ -יתכן כי $a_{12} \neq 0$ נקבל מטריצות מהצורה $\begin{pmatrix} 0 & x \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, כאשר x ממשי. אולם- כאיבר מוביל - $a_{12} = 1$. לכן מתקבלת המטריצה $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

<u>**סה"כ :**</u> מטריצה מצומצמת שורה מסדר 2 היא אחת מהבאות : $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ כאשר x ממשי, $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, או $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

3. א) נדרג את המטריצה:

$$\begin{pmatrix} a & a & -1 \\ a^2 & a & a^2-a \\ a & a & 2a+1 \end{pmatrix} \to \begin{bmatrix} R_2 \to R_2 - a\cdot R_1 \\ R_3 \to R_3 - R_1 \end{bmatrix} \to \begin{pmatrix} a & a & -1 \\ 0 & a-a^2 & a^2 \\ 0 & 0 & 2a+2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a & a & -1 \\ 0 & a(1-a) & a^2 \\ 0 & 0 & 2(a+1) \end{pmatrix}$$

נבדוק אילו ערכים של a גורמים לאיפוס איברי האלכסון:

- האיבר a_{11} יתאפס אמ"ם $a=0$. במקרה זה תתקבל המטריצה הבאה- $\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

  המטריצה אינה מדורגת, ולכן נדרג -

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_3} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_2+2R_1} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

המטריצה מדורגת ודרגתה 1.

- האיבר $a_{22}=0$ אמ"ם $a=1$ או $a=0$. עבור $a=0$ ראינו כי הדרגה המתקבלת היא 1.

  עבור $a=1$ נקבל את המטריצה הבאה - $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. המטריצה מדורגת, ודרגתה 2.

- האיבר $a_{33}=0$ אמ"ם $a=-1$, ונקבל $\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, שהיא מדורגת ודרגתה 2.

לסיכום:

$Rank(A)=1$ עבור $a=0$.
$Rank(A)=2$ עבור $a=1$ או $a=-1$.
$Rank(A)=3$ עבור $a\neq 0,-1,1$.

ב) לפי משפט המטריצה תהיה הפיכה אמ"ם דרגתה 3. לכן התשובה היא $a\neq 0,-1,1$.

4. א) נדרג את המטריצה :

$$\begin{pmatrix} a(a+1) & a^2+3a & -a^2 \\ a+1 & 2 & 1 \\ 2(a+1) & 4 & a^2+3 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \begin{pmatrix} a+1 & 2 & 1 \\ a(a+1) & a^2+3a & -a^2 \\ 2(a+1) & 4 & a^2+3 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \leftarrow R_2 - aR_1}$$

$$\begin{pmatrix} a+1 & 2 & 1 \\ 0 & a^2+a & -a^2-a \\ 2(a+1) & 4 & a^2+3 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \leftarrow R_3 - 2R_1} \begin{pmatrix} a+1 & 2 & 1 \\ 0 & a(a+1) & -a(a+1) \\ 0 & 0 & a^2+1 \end{pmatrix}$$

המטריצה המדורגת שהתקבלה היא $\begin{pmatrix} a+1 & 2 & 1 \\ 0 & a(a+1) & -a(a+1) \\ 0 & 0 & a^2+1 \end{pmatrix}$

כפי שהוסבר בתרגול – האיברים שהתאפסותם עשויה ליצור שורת אפסים הם איברי האלכסון.
ננתח מקרים אלו לצורך קביעת הדרגה.

- האיבר a_{11} יתאפס אמ"ם $a=-1$. במקרה זה תתקבל המטריצה הבאה- $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

  המטריצה אינה מדורגת, ולכן נחליף בין השורה השנייה והשלישית -

  $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_3} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. המטריצה החדשה - $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ מדורגת ודרגתה 2.

  (יש לה 2 שורות השונות מאפס לאחר הדירוג).
- האיבר $a_{22}=0$ אמ"ם $a=-1$ או $a=0$. עבור $a=-1$ ראינו כי הדרגה המתקבלת היא 2.

  עבור $a=0$ נקבל את המטריצה הבאה - $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. המטריצה אינה מדורגת, אך לאחר

  החלפת השורה השנייה והשלישית נקבל את המטריצה $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, שדרגתה 2.
- האיבר $a_{33}=0$ אמ"ם $a^2+1=0$, וזה לא קורה עבור a ממשי.

לסיכום - עבור $a=-1$ או $a=0$ אנו מקבלים כי דרגת המטריצה היא 2, ולכן המטריצה אינה הפיכה. עבור כל ערך ממשי אחר של a (כלומר $a \neq 0,-1$) דרגת המטריצה תהיה 3, ועל כן המטריצה תהיה הפיכה.

ב) התהליך יהיה זהה, פרט למה שמתקבל עבור $a_{33}=0$. כלומר- עבור $a=-1$ או $a=0$ אנו מקבלים כי דרגת המטריצה היא 2, ועל כן המטריצה אינה הפיכה.
בנוסף לכך - $a_{33}=0$ כאשר $a^2+1=0$, כלומר עבור $a=\pm i$. נציב $a=i$ במטריצה ונקבל $\begin{pmatrix} i+1 & 2 & 1 \\ 0 & i(i+1) & -i(i+1) \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. המטריצה כבר מדורגת, ויש לה שורת אפסים אחת. לכן – דרגת

3

המטריצה היא 2. באותן אופן הצבה של $a=-i$ נותנת את המטריצה

$$\begin{pmatrix} -i+1 & 2 & 1 \\ 0 & -i(-i+1) & i(-i+1) \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

, שגם היא מדורגת ודרגתה היא 2.

סה"כ: עבור $a=-1$, $a=0$, $a=i$ או $a=-i$ אנו מקבלים כי דרגת המטריצה היא 2, ולכן המטריצה אינה הפיכה. עבור כל ערך ממשי אחר של a (כלומר $a\neq 0,-1,\pm i$) דרגת המטריצה תהיה 3, ועל כן המטריצה תהיה הפיכה.

.5
$$(A\,|\,I)=\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3\leftarrow R_3-4R_1]{R_2\leftarrow R_2-2R_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3\leftarrow R_3+R_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -6 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -6 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[R_2\leftarrow(-1)\cdot R_2]{R_3\leftarrow(-1)\cdot R_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & -1 & -1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & -1 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow[R_1\leftarrow R_1-2R_3]{R_2\leftarrow R_2-R_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -11 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & -1 & -1 \end{array}\right)$$

לפיכך המטריצה ההפכית של $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 8 \end{pmatrix}$ היא $A^{-1}=\begin{pmatrix} -11 & 2 & 2 \\ -4 & 0 & 1 \\ 6 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

6. א) כדי להראות כי $I-A$ היא מטריצת הטלה עלינו להראות כי $(I-A)^2=I-A$. נפתח -

$$(I-A)^2=(I-A)(I-A)=I^2-IA-AI+A^2=I^2-A-A+A=I^2-A=I-A$$

$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow$$

$I^2=I$ A מטריצת הטלה ולכן $A^2=A$

ב) ידוע כי $A^2=A$. כמו כן – מאחר ש- A הפיכה קיימת המטריצה A^{-1} כך ש- $AA^{-1}=A^{-1}A=I$. נכפיל את השוויון $A^2=A$ ב- A^{-1} מימין - $A^2\cdot A^{-1}=A\cdot A^{-1}$. $A=AAA^{-1}=A^2\cdot A^{-1}=A\cdot A^{-1}=I$. כלומר אנו מקבלים $A=I$.

ג) נראה כי $I+A$ הפיכה ע"י כך שנראה ש- $I-\frac{1}{2}A$ משמשת כהפכית של $I+A$. כלומר נראה כי $\left(I-\frac{1}{2}A\right)(I+A)=(I+A)\left(I-\frac{1}{2}A\right)=$I .

$$\left(I-\frac{1}{2}A\right)(I+A)=I^2+IA-\frac{1}{2}AI-\frac{1}{2}A^2=I+A-\frac{1}{2}A-\frac{1}{2}A=I+A-A=I$$

$$\downarrow$$

4

$$A^2 = A$$

באופן דומה גם I= $(I+A)\left(I-\frac{1}{2}A\right)$.

ד) נשים ♥ כי $\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{4}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{4}{3} \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} = B$.

אם נסמן $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$, ונוכיח כי A היא מטריצת הטלה, אזי לפי סעיף ג' נקבל כי

$B = I + A$ הפיכה, ומתקיים $B^{-1} = (I+A)^{-1} = I - \frac{1}{2}A$.

נראה כי A מטריצת הטלה – עלינו להראות כי $A^2 = A$.

$$A^2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}^2 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \left(\frac{1}{3}\right)^2\begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = A$$

7. א)תהי A מטריצה ריבועית. כפי שהוסבר בהרצאה - ניתן לתאר כל פעולה יסודית f על שורות המטריצה A כמטריצה אלמנטארית – כלומר- הכפלת המטריצה המתקבלת מהפעלת הפעולה היסודית על מטריצת היחידה במטריצה הנתונה A.

ז"א- במקום לחשב את המטריצה $f(A)$ נוכל לחשב את המטריצה $f(I)$, ולהכפיל את המטריצה המתקבלת במטריצה A. נוכל לעשות כן גם על סדרה של פעולות.

המטריצה $E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ התקבלה כך :

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_3} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \leftarrow 3 \cdot R_3} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \leftarrow R_3 + R_1} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

נסמן את השלבים ב- $f_1,\ f_2,\ f_3$ בהתאמה.

ב) ידוע שסכום כל האיברים בשורה הראשונה שווה ל- 6 , סכום כל האיברים בשורה השנייה שווה ל- 7 , וסכום כל האיברים בשורה השלישית שווה ל- 11.

כאמור- כי $E \cdot A = f_3(f_2(f_1(A)))$. כלומר- במקום לחשב את הפעולות על A ניתן לחשב את הפעולות על I, בזו אחר זו (כלומר- לקבל את E), ואז- להכפיל ב- A, ולהיפך.

הפעולה f_1 , המחליפה בין השורה הראשונה והשלישית של A גורמת לכך שסכום כל האיברים בשורה הראשונה שווה ל- 11 , סכום כל האיברים בשורה השנייה שווה ל- 7 , וסכום כל האיברים בשורה השלישית שווה ל- 6.

הפעולה f_2 , המוסיפה את השורה הראשונה של A לשלישית גורמת לכך שסכום כל האיברים בשורה הראשונה שווה ל- 11 , סכום כל האיברים בשורה השנייה שווה ל- 7 , וסכום כל האיברים בשורה השלישית שווה ל- 29.

לכן – סכום איברי השורה השלישית של המטריצה EA הוא סכום איברי השורה השלישית של המטריצה $f_3\left(f_2\left(f_1(A)\right)\right)$, הוא 29.

הפעולה f_3 , המחליפה בין השורה הראשונה והשלישית של A גורמת לכך שסכום כל האיברים בשורה הראשונה שווה ל- 11 , סכום כל האיברים בשורה השנייה שווה ל- 7 , וסכום כל האיברים בשורה השלישית שווה ל- 6.

תרגיל בית מספר 5- מערכות משוואות

לגבי מערכות המשוואות הבאות קבע האם יש פתרון יחיד, אין פתרון, או יש אינסוף פתרונות. במידה ויש פתרון יחיד- מצא אותו. במידה ויש אינסוף פתרונות – ציין כמה דרגות חופש יש למערכת, ותן פתרון כללי.

.1
$$\begin{cases} x+4y+5z=6 \\ -x-2y-6z=-3 \\ 4x+10y+23z=15 \end{cases}$$

.2
$$\begin{cases} 3x_1+2x_2+x_4=4 \\ -2x_1+4x_3-6x_4=-4 \\ x_1+x_2+x_3-x_4=1 \end{cases}$$

3. נתונה מערכת המשוואות : $\begin{cases} ax+ay-az=a \\ -x+4y-az=0 \\ 2x-8y+4z=1 \end{cases}$, כאשר a מספר ממשי.

עבור אילו ערכי a יש למערכת א) פתרון יחיד ב) אינסוף פתרונות ג) אין פתרון?
כאשר למערכת יש אינסוף פתרונות :
(i) כמה משתנים חופשיים יש למערכת? אילו מן המשתנים יכולים להיות חופשיים?
(ii) הציגו את הפתרון הכללי.

4. נתונה מערכת המשוואות הבאה :
$$\begin{cases} x+y+z=t \\ tx+(2t-2)y+(t^2+t)z=t^2 \\ -6x-2y-2ty-t^2z-5tz=-5t-3 \end{cases}$$
כאשר t הינו מספר ממשי. עבור אילו ערכים של t יש למערכת :
- פתרון יחיד ?
- אין פתרון ?
- אינסוף פתרונות ? (כמה דרגות חופש יש במקרה זה?)

5. נניח $A\in M_{m\times n}(F)$ וקיים $\mathbf{b}\in F^m$ כך שלמערכת $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ אין פתרון.
הוכיחו או הפריכו בעזרת דוגמא נגדית
א) $m\neq n$
ב) $Rank\,A<m$
ג) למערכת $A\mathbf{x}=\mathbf{0}$ יש פתרון לא טריביאלי

6. נתונות שתי מערכות משוואות $\begin{cases} (1) & Ax=b_1 \\ (2) & Bx=b_2 \end{cases}$ כאשר המטריצות A ו- B שקולות שורה.
הוכח או הפרך את הטענות הבאות :

א. אם למערכת (1) יש אינסוף פתרונות, אזי גם למערכת (2) יש אינסוף פתרונות.
ב. אם למערכת (1) יש פתרון יחיד, אזי גם למערכת (2) יש פתרון יחיד.
ג. אם למערכת (1) אין פתרון , אזי גם למערכת (2) אין פתרון.
ד. אם $\vec{b}_1=\vec{0}$, ו- $\vec{x},\vec{y}$ מהווים פתרונות עבור (1) , אזי גם $\vec{x}+\vec{y}$ מהווה פתרון ל- (1).

להגשה עד ה- 11.12.05 – עד 18:00

פתרונות לתרגיל בית מספר 5

שאלה 1

נכתוב את המערכת $\begin{cases} x+4y+5z=6 \\ -x-2y-6z=-3 \\ 4x+10y+23z=15 \end{cases}$ בכתיב מטריציוני : $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 5 & 6 \\ -1 & -2 & -6 & -3 \\ 4 & 10 & 23 & 15 \end{array}\right)$.

נסמן $(A|b)=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 5 & 6 \\ -1 & -2 & -6 & -3 \\ 4 & 10 & 23 & 15 \end{array}\right)$, $b=\begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 15 \end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ -1 & -2 & -6 \\ 4 & 10 & 23 \end{pmatrix}$.

נדרג את המטריצה המורחבת

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 5 & 6 \\ -1 & -2 & -6 & -3 \\ 4 & 10 & 23 & 15 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3 \leftarrow R_3 - 4R_1]{R_2 \leftarrow R_2 + R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -6 & 3 & -9 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 \leftarrow R_3 + 3R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

אנו רואים כי יש לנו שורת אפסים, ולכן $Rank(A)=2$. מקבלים $Rank(A)=Rank(A|b)=2$, ולכן יש אינסוף פתרונות. מאחר ש- $n=3$ יש לנו $Rank(A)-n=3-2=1$ דרגות חופש.

נפתור את המערכת : $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Leftarrow \begin{cases} x+4y+5z=6 \\ 2y-z=3 \end{cases}$. נסמן $z=t$, ונקבל

$2y=t+3 \quad \Leftarrow \quad y=\dfrac{t+3}{2}$. הצבה במשוואה הראשונה תיתן $x+4\dfrac{t+3}{2}+5t=6$, ולאחר

פישוט - $x=-7t$. סה"כ פתרון כללי למערכת יהיה $\boxed{\vec{x}=\left(-7t, \dfrac{t+3}{2}, t\right)^t}$, כאשר t ממשי.

שאלה 2

נכתוב את המערכת $\begin{cases} 3x_1+2x_2+x_4=4 \\ -2x_1+4x_3-6x_4=-4 \\ x_1+x_2+x_3-x_4=1 \end{cases}$ בכתיב מטריציוני : $\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 2 & 0 & 1 & 4 \\ -2 & 0 & 4 & -6 & -4 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right)$.

שוב- נסמן $(A|b)=\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 2 & 0 & 1 & 4 \\ -2 & 0 & 4 & -6 & -4 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right)$, ונסמן ב- A את מטריצת המקדמים. נדרג את המטריצה המורחבת -

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3&2&0&1&4\\ -2&0&4&-6&-4\\ 1&1&1&-1&1\end{array}\right) \xrightarrow{R_3\leftrightarrow R_1} \left(\begin{array}{cccc|c}1&1&1&-1&1\\-2&0&4&-6&-4\\3&2&0&1&4\end{array}\right) \xrightarrow[R_3\leftarrow R_3-3R_1]{R_2\leftarrow R_2+2R_1} \left(\begin{array}{cccc|c}1&1&1&-1&1\\0&2&6&-8&-2\\0&-1&-3&4&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3\leftarrow R_3+\frac{1}{2}R_2} \left(\begin{array}{cccc|c}1&1&1&-1&1\\0&2&6&-8&-2\\0&0&0&0&0\end{array}\right)$$

התקבלה מערכת המקיימת $Rank(A)=Rank(A\,|\,b)=2$, ולכן יש אינסוף פתרונות. מאחר ש- $n=4$ יש לנו $Rank(A)-n=4-2=2$ דרגות חופש.

נסמן $x_4=s$, $x_3=t$. הצבה במשוואה השלישית תיתן לנו $x_2=-1+4s-3t$. הצבה במשוואה הראשונה תיתן - $x_1=2-3s+2t$. סה״כ – פתרון כללי למערכת יהיה $\boxed{\vec{x}=(2-3s+2t,\ -1+4s-3t,\ t,s)^t}$, כאשר t,s ממשיים.

שאלה 3

נציג את המערכת $\begin{cases} ax+ay-az=a\\ -x+4y-az=0\\ 2x-8y+4z=1\end{cases}$ בעזרת המטריצה המורחבת $\left(\begin{array}{ccc|c} a&a&-a&a\\ -1&4&-a&0\\ 2&-8&4&1\end{array}\right)$.

נדרג:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a&a&-a&a\\ -1&4&-a&0\\ 2&-8&4&1\end{array}\right) \xrightarrow{R_1\leftrightarrow R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} -1&4&-a&0\\ a&a&-a&a\\ 2&-8&4&1\end{array}\right) \xrightarrow[R_3\leftarrow R_3+2R_1]{R_2\leftarrow R_2+aR_1} \left(\begin{array}{ccc|c} -1&4&-a&0\\ a&5a&-a-a^2&a\\ 0&0&4-2a&1\end{array}\right)$$

ננתח את כל המקרים עפ״י משפט גאוס.

- פתרון יחיד נקבל כאשר $Rank(A)=3$, כלומר – כאשר אף אחד מאיברי האלכסון אינו מתאפס. זה קורה כאשר $a_{33}=4-2a\neq 0$, וגם $a_{22}=5a\neq 0$. כלומר- $Rank(A)=3$ $\boxed{\Leftrightarrow\quad a\neq 2,0}$.
- אין פתרון כאשר $Rank(A)<Rank(A\,|\,b)$, ובמקרה שלנו – כאשר בשורה השנייה האיבר $a_{23}=0 \;\wedge\; a_{22}=0$, אולם $b_2\neq 0$. זה מתקבל כאשר $-a-a^2=0$, וגם $5a=0$, וגם $a\neq 0$. אין a המקיים את שלושת התנאים הנ״ל בו זמנית. הדבר יכול גם להתקיים כאשר $a_{33}=0$ וגם $b_3\neq 0$. מקרה זה יתקבל עבור $\boxed{a=2}$.
- אינסוף פתרונות יתקבלו כאשר האיבר $a_{33}=0$, וגם $b=0$. מאחר ש- $b_3\neq 0$ זה לא יכול להתקיים. הדבר יכול להתקבל גם מכך ש האיבר $a_{23}=0 \;\wedge\; a_{22}=0$, וגם $b_2=0$. זה מתקבל כאשר $-a-a^2=0$, וגם $5a=0$ וגם $a=0$. כלומר- כאשר $\boxed{a=0}$.

כאמור – עבור $a=0$ יש למערכת אינסוף פתרונות. הצבת $a=0$ במערכת

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 4 & -a & 0 \\ a & 5a & -a-a^2 & a \\ 0 & 0 & 4-2a & 1 \end{array}\right)$$

נותנת:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2\leftrightarrow R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

מתקיים $Rank(A)=Rank(A|b)=2$, ומאחר ש- $n=3$ מקבלים $Rank(A)-n=3-2=1$ דרגות חופש.

המערכת המתקבלת: $\begin{cases} -x+4y=0 \\ 4z=1 \end{cases}$. איננו רשאים לבחור את z כאיבר חופשי, שכן ערו נקבע באופן יחיד ע"י המערכת והוא $z=\frac{1}{4}$. אנו יכולים לקבוע את x או את y כאיבר חופשי. נבחר את y להיות האיבר החופשי, ונסמן $y=t$. אזי $x=4t$, ופתרון כללי יהיה $\vec{x}=\begin{pmatrix} 4t \\ t \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix}$, עבור כל t ממשי.

שאלה 4

נתבונן במערכת הנתונה $\begin{cases} x+y+z=t \\ tx+(2t-2)y+(t^2+t)z=t^2 \\ -6x-2y-2ty-t^2z-5tz=-5t-3 \end{cases}$, ונרשום אותה באופן הבא:

$$\begin{cases} x+y+z=t \\ tx+(2t-2)y+(t^2+t)z=t^2 \\ -6x+(-2-2t)y+(-t^2-5t)z=-5t-3 \end{cases}$$

נרשום את המערכת בצורה מטריציונית: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & t \\ t & 2t-2 & t^2+t & t^2 \\ -6 & -2-2t & -t^2-5t & -5t-3 \end{array}\right)$, ונסמן ב- A את מטריצת המקדמים, וב- $(A|b)=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & t \\ t & 2t-2 & t^2+t & t^2 \\ -6 & -2-2t & -t^2-5t & -5t-3 \end{array}\right)$ את מטריצת המקדמים המורחבת.

נדרג:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & t \\ t & 2t-2 & t^2+t & t^2 \\ -6 & -2-2t & -t^2-5t & -5t-3 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3\leftarrow R_3+6R_1]{R_2\leftarrow R_2-tR_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & t \\ 0 & t-2 & t^2 & 0 \\ 0 & 4-2t & -t^2-5t+6 & t-3 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3\leftarrow R_3+2R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & t \\ 0 & t-2 & t^2 & 0 \\ 0 & 0 & t^2-5t+6 & t-3 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & t \\ 0 & t-2 & t^2 & 0 \\ 0 & 0 & (t-2)(t-3) & t-3 \end{array}\right)$$

ננתח את כל המקרים עפ"י משפט גאוס.

- פתרון יחיד נקבל כאשר $Rank(A)=3$, כלומר – כאשר אף אחד מאיברי האלכסון אינו מתאפס. זה קורה כאשר $a_{33}=(t-2)(t-3)\neq 0$, וגם $a_{22}=t-2\neq 0$. כלומר- $Rank(A)=3 \quad \Leftrightarrow \quad t\neq 2,3$.
- אין פתרון כאשר $Rank(A)<Rank(A|b)$, ובמקרה שלנו – כאשר בשורה השלישית האיבר $a_{33}=0$, אולם $b\neq 0$. זה מתקבל כאשר $(t-2)(t-3)=0$, וגם $t-3\neq 0$. כלומר – כאשר $t=2$. אין עוד שורה פרט לשורה השלישית העלולה ליצור מצב בו של איברי השורה של A מתאפסים, והאיבר החופשי b אינו מתאפס.
- אינסוף פתרונות יתקבלו כאשר האיבר $a_{33}=0$, וגם $b=0$. זה מתקבל כאשר $(t-2)(t-3)=0$, וגם $t-3=0$. כלומר – כאשר $t=3$. אין עוד שורה פרט לשורה השלישית העלולה ליצור מצב בו של איברי השורה של $(A|b)$ מתאפסים.

<u>שאלה 5</u>

א) הטענה אינה נכונה. נסתכל על המערכת הבאה - $\begin{cases} x+y=1 \\ x+y=2 \end{cases}$ (ברור שאין למערכת זו פתרון). מטריצת המקדמים היא $A_{2\times 2}=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, ווקטור המקדמים החופשיים הוא $\vec{b}=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. מתקיים $m=n=2$. על אף זאת - המערכת המתקבלת היא $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{array}\right)\rightarrow\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$. למערכת אין פתרון כי $1=Rank(A)<Rank(A|b)=2$.

ב) הטענה נכונה. אם למערכת $Ax=b$ אין פתרון אזי $Rank(A)<Rank(A|b)$. ידוע כי $Rank(A|b)\leq m$, וכך אנו מקבלים כי $Rank(A)<Rank(A|b)\leq m$, ולכן $Rank(A)<m$.

ג) הטענה אינה נכונה. נסתכל על המערכת $\begin{cases} x+y=1 \\ x+y=2 \\ x-y=0 \end{cases}$. הווקטור $\vec{b}=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ הוא וקטור המקיים כי למערכת $Ax=b$ (כאשר $\vec{x}=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ ו- $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$) אין פתרון. (בדוק) אולם – למערכת ההומוגנית המתקבלת - $\begin{cases} x+y=0 \\ x+y=0 \\ x-y=0 \end{cases}$ יש את הכתיב המטריציוני הבא -

$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, ואם נדרג את מטריצת המקדמים

$$\begin{pmatrix}1&1\\1&1\\1&-1\end{pmatrix}\xrightarrow[R_3\leftarrow R_3-R_1]{R_2\leftarrow R_2-R_1}\begin{pmatrix}1&1\\0&0\\0&-2\end{pmatrix}\xrightarrow{R_2\leftrightarrow R_3}\begin{pmatrix}1&1\\0&-2\\0&0\end{pmatrix}$$
. המערכת המתקבלת היא

$\begin{cases}x+y=0\\-2y=0\end{cases}$, והפתרון היחיד עבורה הוא הפתרון הטריוויאלי.

שאלה 6

א) לא נכון – נסתכל על המערכת (1) $\begin{cases}x+y=1\\2x+2y=2\end{cases}$ ועל המערכת (2) $\begin{cases}x+y=1\\x+y=2\end{cases}$. מטריצות המקדמים המתאימות הן $A=\begin{pmatrix}1&1\\2&2\end{pmatrix}$ ו- $B=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$ בהתאמה. ניתן לראות כי A ו- B שקולות שורה , אולם בעוד למערכת (1) יש אינסוף פתרונות – למערכת (2) אין פתרון.

ב) הטענה אינה נכונה. דוגמא נגדית : ניקח $b_2=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$, $b_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix}$, $A=B=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$.

אזי למערכת $Ax=b_1$ יש פתרון יחיד, בעוד שלמערכת $Bx=b_2$ אין פתרון.

הערה : אם המטריצות ריבועיות- אזי הטענה נכונה. אם למערכת (1) יש פתרון יחיד, אזי $Rank(A)=Rank(A\,|\,b_1)=n$. מאחר ש- A ו- B שקולות שורה גם $Rank(B)=Rank(B\,|\,b_2)=n$. לכן גם למערכת (2) יש פתרון יחיד, עפ"י קריטריון גאוס.

ג) לא נכון, ניקח את המערכות מהדוגמא בסעיף א'- ונחליף ביניהן : (1) $\begin{cases}x+y=1\\x+y=2\end{cases}$, ו- (2) $\begin{cases}x+y=1\\2x+2y=2\end{cases}$. כפי שראינו – ל – (1) אין פתרון, אך ל- (2) יש אינסוף פתרונות.

ד) נכון. אם $\vec{b}_1=\vec{0}$, ו- $\vec{x},\vec{y}$ מהווים פתרונות עבור (1) , אזי $A\vec{x}=\vec{0}\ \wedge\ A\vec{y}=\vec{0}$. נראה שגם $A(\vec{x}+\vec{y})=\vec{0}$, ובכך נוכיח כי $\vec{x}+\vec{y}$ מהווה פתרון ל- (1).

$$\underbrace{A(\vec{x}+\vec{y})=A\vec{x}+A\vec{y}}_{\text{חוק הפילוג}}=\vec{0}+\vec{0}=\vec{0}$$

החוג למדעי המחשב,
אלגברה ליניארית,
סמסטר א' תשס"ו

תרגיל בית מספר 6 - דטרמיננט

1. נתון $A=\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} d & e & f \\ g & h & i \\ a & b & c \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} -a & -b & -c \\ 2g & 2h & 2i \\ d & e & f \end{pmatrix}$,
$D=\begin{pmatrix} a & b & c \\ d+5 & e+6 & f+7 \\ g & h & i \end{pmatrix}$, $E=\begin{pmatrix} 5 & 6 & 7 \\ a & b & c \\ 3g & 3h & 3i \end{pmatrix}$.
כמו כן נתון כי $\det(A)=4$, $\det(D)=8$. חשב את : $|E|$, $|C|$, $|B|$.
2. תהי A מטריצה אלכסונית מסדר n. הוכח כי גם $adj(A)$ אלכסונית.
3. תהיינה A , ו- B מטריצות הפיכות מסדר n. הוכח כי $adj(AB)=adj(B)\cdot adj(A)$.
4. תהיינה A,B,C מטריצות ריבועיות מסדר 2, ותהי $[0]$ מטריצת האפס מסדר 2. נגדיר $M=\begin{pmatrix} A & B \\ [0] & C \end{pmatrix}$ מטריצה מסדר 4. הוכח כי $|M|=|A|\cdot|C|$.
5. חשב את הדטרמיננטה של המטריצה הבאה - $\begin{pmatrix} 3-\lambda & -2 & 4 \\ -2 & 6-\lambda & 2 \\ 4 & 2 & 3-\lambda \end{pmatrix}$, וקבע עבור אילו ערכים של λ המטריצה הפיכה. (λ ממשי).
6. יהי n שלם חיובי אי זוגי, ותהי A מטריצה מסדר n המקיימת כי לכל $1\le i,j\le n$ $a_{ij}+a_{ji}=0$. הראה כי A אינה הפיכה.
7. תהי $A=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ חשב את ההפכית של A בעזרת המטריצה המצורפת של A.
8. יהי n שלם גדול מ-1 ונגדיר מטריצה $A_{n\times n}$ באופן הבא - $a_{ij}=\begin{cases} 0 & i=j \\ 2i & i\neq j \end{cases}$. חשב את $|A|$.
9. נתון : $A=\begin{pmatrix} b & c & 0 \\ a & 0 & c \\ 0 & a & b \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} b^2+c^2 & ab & ac \\ ab & a^2+c^2 & bc \\ ac & bc & a^2+b^2 \end{pmatrix}$, a,b,c ממשיים.
השתמש ב- $|A|$ כדי לקבוע עבור אילו ערכים של a,b,c B הפיכה. (רמז : $B=A\cdot A^T$).
10. נתון $|B|=-2$, $|A|=5$. חשב את $|B^{-1}|$, $|A^3\cdot B^T|$, $|A^{-1}\cdot B^2|$, $|(AB)^{-1}|$.

תאריך הגשה אחרון : 18.12.05
עד 18:00

בהצלחה!

פתרונות לתרגיל בית 6

שאלה 1

נתון $A=\begin{pmatrix}a&b&c\\d&e&f\\g&h&i\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}d&e&f\\g&h&i\\a&b&c\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}-a&-b&-c\\2g&2h&2i\\d&e&f\end{pmatrix}$,

$D=\begin{pmatrix}a&b&c\\d+5&e+6&f+7\\g&h&i\end{pmatrix}$, $E=\begin{pmatrix}5&6&7\\a&b&c\\3g&3h&3i\end{pmatrix}$.

כמו כן נתון כי $\det(A)=4$, $\det(D)=8$. נחשב את : $|E|$, $|C|$, $|B|$.

נשים לב ש- B התקבלה מ- A ע"י החלפת השורה הראשונה בשנייה, ולאחר מכן החלפת השורה השנייה בשלישית. כידוע- כל החלפת שורה מחליפה את סימן הדטרמיננט. לכן

$$|B|=\begin{vmatrix}d&e&f\\g&h&i\\a&b&c\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}d&e&f\\a&b&c\\g&h&i\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a&b&c\\d&e&f\\g&h&i\end{vmatrix}=|A|=4 .$$

נשים לב כי C התקבלה מ- A ע"י הכפלת השורה הראשונה ב- 1- , החלפת השורה השנייה והשלישית, והכפלת השורה השלישית ב- 2.

$$|C|=\begin{vmatrix}-a&-b&-c\\2g&2h&2i\\d&e&f\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}a&b&c\\2g&2h&2i\\d&e&f\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a&b&c\\d&e&f\\2g&2h&2i\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}a&b&c\\d&e&f\\g&h&i\end{vmatrix}=2|A|=8$$

נרצה לחשב את $|E|$. ראיתם בהרצאה

$$\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\\vdots&&&\\a_{k1}&a_{k2}&\cdots&a_{kn}\\\vdots&&\ddots&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\\vdots&&&\\b_{k1}&b_{k2}&\cdots&b_{kn}\\\vdots&&\ddots&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\\vdots&&&\\a_{k1}+b_{k1}&a_{k2}+b_{k2}&\cdots&a_{kn}+b_{kn}\\\vdots&&\ddots&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}$$

כלומר $|D|=\begin{vmatrix}a&b&c\\5+d&6+e&7+f\\g&h&i\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a&b&c\\d&e&f\\g&h&i\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a&b&c\\5&6&7\\g&h&i\end{vmatrix}$. מאחר ש- $\begin{vmatrix}a&b&c\\d&e&f\\g&h&i\end{vmatrix}=|A|$

מקבלים כי $|D|=|A|+\begin{vmatrix}a&b&c\\5&6&7\\g&h&i\end{vmatrix}$. נציב 4, ו- 8 במקומות המתאימים ונקבל- $\begin{vmatrix}a&b&c\\5&6&7\\g&h&i\end{vmatrix}=4$.

לכן $|E|=3\begin{vmatrix}5&6&7\\a&b&c\\g&h&i\end{vmatrix}=-3\begin{vmatrix}a&b&c\\5&6&7\\g&h&i\end{vmatrix}=-3\cdot4=12$.

שאלה 2

נתון כי A אלכסונית מסדר n. נסמן $A=\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$. כעת – נחשב את $B=adj(A)=\left(b_{i,j}\right)_{1\le i,j\le n}$.

עבור $i=j$ המינור $b_{ii}=|A_{ii}|=\begin{vmatrix} \ddots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & a_{i-1i-1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & a_{i+1i+1} & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \ddots \end{vmatrix}=\prod_{k\ne i} a_{kk}$ (מתקבלת דטרמיננטה של מטריצה אלכסונית המתקבלת ממחיקת השורה ה- i ית והעמודה ה- i ית. דטרמיננטה של מטריצה אלכסונית היא מכפלת איברי האלכסון.)

עבור $i<j$ $b_{ij}=|A_{ij}|$, (כלומר- זוהי הדטרמיננטה המתקבלת ע"י מחיקת השורה ה- i ית , והעמודה ה- j ית.)

מאחר שבמטריצה A בעמודה ה- i האיבר היחיד השונה מ- 0 הוא a_{ii} , (ואותו מחקנו), אנו מקבלים עמודת אפסים (העמודה i). לכן $b_{ij}=\begin{vmatrix} \ddots & & \vdots & & \\ & a_{i-1i-1} & 0 & & \\ - & - & - & - & - \\ & & 0 & a_{i+1i+1} & \\ & & \vdots & & \ddots \end{vmatrix}=0$ (העמודה שמחקנו אינה העמודה j, ולכן – נשארת לנו עמודת אפסים, ואז הדטרמיננטה מתאפסת).

באופן דומה עבור $i>j$ $b_{ij}=|A_{ij}|$ - מאחר שבמטריצה A בשורה ה-j האיבר היחיד השונה מ- 0 הוא a_{jj} , (ואותו מחקנו), אנו מקבלים שורת אפסים (השורה j). לכן

$$b_{ij}=\begin{vmatrix} \ddots & & | & & \\ & a_{i-1i-1} & | & & \\ \cdots & 0 & | & 0 & \cdots \\ & & | & a_{i+1i+1} & \\ & & | & & \ddots \end{vmatrix}=0$$

סה"כ : $B=adj(A)=\left(b_{i,j}\right)_{1\le i,j\le n}=\begin{cases} x\ne 0 & i=j \\ 0 & i\ne j \end{cases}$.

שאלה 3

לפי משפט – אם A מטריצה הפיכה מסדר n אזי $A^{-1}=|A|^{-1}\cdot adj(A)$, כלומר-

$|A|\cdot A^{-1}=adj(A)$. A , ו- B הפיכות ולכן $|A|\cdot A^{-1}=adj(A)$, $|B|\cdot B^{-1}=adj(B)$.

$$adj(AB)=|A\cdot B|\cdot(AB)^{-1}=|A|\cdot|B|\cdot B^{-1}\cdot A^{-1}=|B|\cdot B^{-1}\cdot|A|\cdot A^{-1}=adj(B)\cdot adj(A)$$

לפי המשפט ↓ , תכונות כפל מטריצות - כפל מטריצה בסקלר הינו חילופי ↓ , $|A\cdot B|=|A|\cdot|B|$, $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$ ↓ , לפי המשפט ↓

שאלה 4

תהיינה A,B,C מטריצות ריבועיות מסדר 2, ותהי $[0]$ מטריצת האפס מסדר 2. נסמן :

$$C=\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22}\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22}\end{pmatrix},\ A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}$$

. אזי

$$M=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & b_{11} & b_{12} \\ a_{21} & a_{22} & b_{21} & b_{22} \\ 0 & 0 & c_{11} & c_{12} \\ 0 & 0 & c_{21} & c_{22}\end{pmatrix}$$

מטריצה מסדר 4. נחשב את $|M|$:

$$|M|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_{11} & b_{12} \\ a_{21} & a_{22} & b_{21} & b_{22} \\ 0 & 0 & c_{11} & c_{12} \\ 0 & 0 & c_{21} & c_{22}\end{vmatrix}=-c_{21}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_{12} \\ a_{21} & a_{22} & b_{22} \\ 0 & 0 & c_{12}\end{vmatrix}+c_{22}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_{11} \\ a_{21} & a_{22} & b_{21} \\ 0 & 0 & c_{11}\end{vmatrix}=-c_{21}\cdot c_{12}\cdot|A|+c_{22}\cdot c_{11}\cdot|A|$$

↓ פיתוח לפי שורה רביעית

↓ פיתוח לפי שורה שלישית

$$=|A|\cdot[c_{11}c_{22}-c_{12}c_{21}]=|A|\cdot|C|$$

שאלה 5

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & -2 & 4 \\ -2 & 6-\lambda & 2 \\ 4 & 2 & 3-\lambda\end{vmatrix}=(R_3\leftarrow R_3+2R_2)\begin{vmatrix} 3-\lambda & -2 & 4 \\ -2 & 6-\lambda & 2 \\ 0 & 14-2\lambda & 7-\lambda\end{vmatrix}=$$

פיתוח לפי עמודה ראשונה : $(3-\lambda)\begin{vmatrix} 6-\lambda & 2 \\ 14-2\lambda & 7-\lambda\end{vmatrix}-(-2)\begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 14-2\lambda & 7-\lambda\end{vmatrix}$

$$(3-\lambda)\{(6-\lambda)(7-\lambda)-2(14-2\lambda)\}+2\{-2(7-\lambda)-8(7-\lambda)\}=$$

$$(3-\lambda)\{(6-\lambda)(7-\lambda)-4(7-\lambda)\}+2\{-2(7-\lambda)-8(7-\lambda)\}=$$

$$(3-\lambda)\{(6-\lambda-4)(7-\lambda)\}+2\{-10(7-\lambda)\}=(3-\lambda)(2-\lambda)(7-\lambda)-20(7-\lambda)$$

$$=\{(3-\lambda)(2-\lambda)-20\}(7-\lambda)=\{6-5\lambda+\lambda^2-20\}(7-\lambda)$$

$$= \{-5\lambda + \lambda^2 - 14\}(7-\lambda) = (\lambda-7)(\lambda+2)(7-\lambda) = -(\lambda-7)^2(\lambda+2)$$

המטריצה תהיה הפיכה אמ"ם הדטרמיננט שונה מ- 0. $-(\lambda-7)^2(\lambda+2)=0$ כאשר $\lambda=7$, $\lambda=-2$.

לכן המטריצה הפיכה כאשר $\lambda \neq 7-2$.

שאלה 6

תהי A מטריצה מסדר n (שלם אי זוגי) המקיימת כי לכל $1 \le i,j \le n$ $a_{ij}+a_{ji}=0$.

לכל $1 \le i,j \le n$ $a_{ij}+a_{ji}=0$ $\Leftrightarrow$ לכל $1 \le i,j \le n$ $a_{ij}=-a_{ji}$, וכזכור- זוהי הגדרת מטריצה אנטי סימטרית. כלומר- $A^T=-A$.

נראה כי $|A|=0$, ואז נובע כי אינה ההפיכה. לפי משפט $|A^T|=|A|$. מצד שני – מאחר ש- $A^T=-A$ מקבלים $|A^T|=|-A|$. נשים לב ש- $|-A|=(-1)^n|A|$ (וזאת מכיוון שהכפלת המטריצה ב- -1 שקולה להכפלת כל שורה ב- -1 . לכן ערך הדטרמיננטה מוכפל ב- -1 n פעמים, כמספר השורות.)

מכיוון ש- n אי זוגי $|-A|=(-1)^n|A|=-|A|$.

סה"כ אנו מקבלים ש- $|A^T|=|A|$, ומצד שני $|A^T|=|-A|=-|A|$. לכן $|A|=-|A|$. נוסיף $|A|$ לשני האגפים ונקבל $2|A|=0$, כלומר $|A|=0$.

שאלה 7

נמצא את המטריצה ההפכית של $A=\begin{pmatrix}3 & -1 & 1\\ 0 & 2 & 4\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}$ בעזרת המטריצה המצורפת ע"י שימוש במשפט $A^{-1}=|A|^{-1}\cdot adj(A)$.

ראשית - $|A|=\begin{vmatrix}3 & -1 & 1\\ 0 & 2 & 4\\ 1 & -1 & 1\end{vmatrix}=3\begin{vmatrix}2 & 4\\ -1 & 1\end{vmatrix}+1\begin{vmatrix}-1 & 1\\ 2 & 4\end{vmatrix}=18-6=12$. על כן $|A|^{-1}=\frac{1}{12}$.

כעת נמצא את כל המינורים :

$$A_{11}=\begin{vmatrix}2 & 4\\ -1 & 1\end{vmatrix}=2+4=6 \qquad A_{21}=\begin{vmatrix}-1 & 1\\ -1 & 1\end{vmatrix}=0 \qquad A_{31}=\begin{vmatrix}-1 & 1\\ 2 & 4\end{vmatrix}=-4-2=-6$$

$$A_{12}=\begin{vmatrix}0 & 4\\ 1 & 1\end{vmatrix}=-4 \qquad A_{22}=\begin{vmatrix}3 & 1\\ 1 & 1\end{vmatrix}=3-1=2 \qquad A_{32}=\begin{vmatrix}3 & 1\\ 0 & 4\end{vmatrix}=12$$

$$A_{13}=\begin{vmatrix}0 & 2\\ 1 & -1\end{vmatrix}=-2 \qquad A_{23}=\begin{vmatrix}3 & -1\\ 1 & -1\end{vmatrix}=-3+1=-2 \qquad A_{33}=\begin{vmatrix}3 & -1\\ 0 & 2\end{vmatrix}=6$$

לפיכך המטריצה המצורפת של A היא (נזכור לשים סימן מינוס במקומות a_{ij} שעבורים $i+j$ אי זוגי: $adj(A)=\begin{pmatrix}6 & 0 & -6\\ 4 & 2 & -12\\ -2 & 2 & 6\end{pmatrix}$.

על כן – מאחר ש- A הפיכה ומתקיים $A^{-1}=|A|^{-1}\cdot adj(A)=\frac{1}{12}\cdot\begin{pmatrix}6 & 0 & -6\\ 4 & 2 & -12\\ -2 & 2 & 6\end{pmatrix}$

שאלה 8

המטריצה נראית כך: $a_{ij}=\begin{cases}0 & i=j\\ 2i & i\neq j\end{cases}$, כלומר - $\begin{pmatrix}0 & 2 & \cdots & 2 & 2\\ 4 & 0 & \cdots & 4 & 4\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 2(n-1) & 2(n-1) & \cdots & 0 & 2(n-1)\\ 2n & 2n & \cdots & 2n & 0\end{pmatrix}$.

נחשב את הדטרמיננטה שלה:

$$\begin{vmatrix}0 & 2 & \cdots & 2 & 2\\ 4 & 0 & \cdots & 4 & 4\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 2(n-1) & 2(n-1) & \cdots & 0 & 2(n-1)\\ 2n & 2n & \cdots & 2n & 0\end{vmatrix}=2^n\begin{vmatrix}0 & 1 & \cdots & 1 & 1\\ 2 & 0 & \cdots & 2 & 2\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ n-1 & n-1 & \cdots & 0 & n-1\\ n & n & \cdots & n & 0\end{vmatrix}$$

$\downarrow$

"הוצאת גורם" 2 מכל שורה

$$=2^n\begin{vmatrix}0 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n\\ 1 & 0 & 3 & \cdots & n-1 & n\\ 1 & 2 & 0 & \cdots & n-1 & n\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 1 & 2 & 3 & \cdots & 0 & n\\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & 0\end{vmatrix}$$

(התקבל ע"י פעולת טרנספוז, שאינה משנה את ערך הדטרמיננט. נחבר את השורה הראשונה לכל שורה אחרת:

$$=2^n\begin{vmatrix}0 & 2 & 3 & 4 & \cdots & n-1 & n\\ 1 & 2 & 6 & 8 & \cdots & 2(n-1) & 2n\\ 1 & 4 & 3 & 8 & \cdots & 2(n-1) & 2n\\ 1 & 4 & 6 & 4 & \cdots & 2(n-1) & 2n\\ \vdots & & & & \ddots & \vdots & \vdots\\ 1 & 4 & 6 & 8 & \cdots & 2(n-1) & 2n\\ 1 & 4 & 6 & 8 & \cdots & 2(n-1) & n\end{vmatrix}$$

, נחסיר את השורה האחרונה מכל אחת מהשורות:

$$=2^n \cdot \begin{vmatrix} -1 & -2 & -3 & -4 & \cdots & -(n-1) & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & n \\ 0 & 0 & -3 & 0 & \cdots & 0 & n \\ 0 & 0 & 0 & -4 & \cdots & 0 & n \\ \vdots & & & & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -(n-1) & n \\ 1 & 4 & 6 & 8 & \cdots & 2(n-1) & n \end{vmatrix}$$
, נחבר לשורה האחרונה את השורה הראשונה-

$$=2^n \cdot \begin{vmatrix} -1 & -2 & -3 & -4 & \cdots & -(n-1) & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & n \\ 0 & 0 & -3 & 0 & \cdots & 0 & n \\ 0 & 0 & 0 & -4 & \cdots & 0 & n \\ \vdots & & & & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -(n-1) & n \\ 0 & 2 & 3 & 4 & \cdots & (n-1) & n \end{vmatrix}$$
, נחבר כל אחת מהשורות $2,3,\dots,n-1$ אל

השורה האחרונה ונקבל -
$$\begin{vmatrix} -1 & -2 & -3 & -4 & \cdots & -(n-1) & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & n \\ 0 & 0 & -3 & 0 & \cdots & 0 & n \\ 0 & 0 & 0 & -4 & \cdots & 0 & n \\ \vdots & & & & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -(n-1) & n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & n+(n-2)n \end{vmatrix} 2^n =$$
(האיבר

a_{nn} התקבל מהוספת $n-2$ פעמים n ל- n שהיה שם מלכתחילה.)

$$=2^n \cdot \begin{vmatrix} -1 & -2 & -3 & -4 & \cdots & -(n-1) & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & n \\ 0 & 0 & -3 & 0 & \cdots & 0 & n \\ 0 & 0 & 0 & -4 & \cdots & 0 & n \\ \vdots & & & & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -(n-1) & n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & n^2-n \end{vmatrix}$$
המטריצה אלכסונית, ועל כן הדטרמיננט

יתקבל מהכפלת האיברים על האלכסון הראשי : $(-1)^{n-1} \cdot 2^n \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot (n^2-n) =$

כלומר- $(-1)^{n-1} \cdot 2^n \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n \cdot (n-1) = (-1)^{n-1} \cdot 2^n \cdot n! \cdot (n-1) =$

סה״כ : $(-1)^{n-1} \cdot 2^n \cdot n! \cdot (n-1)$.

שאלה 9

נשים לב כי $B = A \cdot A^t$. לכן $|B| = |A \cdot A^t| = |A| \cdot |A^t| = |A| \cdot |A| = |A|^2$. נחשב את $|A|$:

$$|A \cdot B| = |A| \cdot |B| \qquad\qquad |A^t| = |A|$$

$$|A| = \begin{vmatrix} b & c & 0 \\ a & 0 & c \\ 0 & a & b \end{vmatrix} = b\begin{vmatrix} 0 & c \\ a & b \end{vmatrix} - c\begin{vmatrix} a & c \\ 0 & b \end{vmatrix} = b(-ac) - c(ab) = -2abc .$$

לפיכך $|B| = |A|^2 = (-2abc)^2 = 4a^2b^2c^2$. על מנת ש- B תהיה הפיכה צריך , אם כן להתקיים $a \neq 0,\ b \neq 0,\ c \neq 0$.

שאלה 10

נתון $|B| = -2$, $|A| = 5$. נחשב את $|B^{-1}|$, $|A^3 \cdot B^T|$, $|A^{-1} \cdot B^2|$, $|(AB)^{-1}|$.

מאחר שהדטרמיננטות של A ושל B שונות מ- 0 , A ו- B הפיכות.

$$|B^{-1}| = |B|^{-1} = -\tfrac{1}{2}$$

$$|A^3 \cdot B^T| = |A^3| \cdot |B^T| = |A|^3 \cdot |B| = 125 \cdot (-2) = -250$$

$$|A \cdot B| = |A| \cdot |B| \qquad\qquad |B^t| = |B|$$

$$|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$$

$$|A^{-1} \cdot B^2| = |A^{-1}| \cdot |B^2| = |A|^{-1} \cdot |B|^2 = \tfrac{1}{5} \cdot 4 = \tfrac{4}{5}$$

$$|A \cdot B| = |A| \cdot |B| \qquad\qquad |A^{-1}| = |A|^{-1} = \tfrac{1}{5}$$

$$|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$$

$$|(AB)^{-1}| = |B^{-1} \cdot A^{-1}| = |B^{-1}| \cdot |A^{-1}| = |B|^{-1} \cdot |A|^{-1} = -\tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{1}{5} = -\tfrac{1}{10}$$

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1} \qquad |A \cdot B| = |A| \cdot |B| \qquad |M^{-1}| = |M|^{-1}$$

החוג למדעי המחשב,
אלגברה ליניארית,
סמסטר א', תשס"ו

תרגיל בית 7

תרגיל 1: פתרו את מערכת המשוואות תוך שימוש בכלל קרמר:
$$\begin{cases} 2x+y+z=1 \\ x+2y+z=2 \\ x+y+2z=4 \end{cases}$$

בכל אחד מהבאים (2-6)

- אם V מהווה מ"ו מעל F – הוכח זאת.
- אם לא –הצג דוגמא נגדית.

תרגיל 2: נסתכל על האוסף $V=\left\{\begin{pmatrix} z \\ \bar{z} \end{pmatrix} \mid z\in C\right\}$. האם V עם פעולת חיבור ווקטורים וכפל בסקלר מהווה מ"ו מעל $F=\Re$?

תרגיל 3: נסתכל על האוסף $V=\left\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\in\Re^3 \mid z=2y+3,\ y=x\right\}$. האם הוא מהווה מ"ו ביחס לחיבור ווקטורים וכפל בסקלר?

תרגיל 4: נסתכל על $V=\{\,p(x)\in\Re[x] \mid 3\le \deg(p(x))\le 5\,\}$. האם V מהווה מ"ו מעל $F=\Re$? (תזכורת: $\Re[x]$ - אוסף הפולינומים במשתנה x עם מקדמים ממשיים).

תרגיל 5: נסתכל על $V=\{\,p(x)\in\Re_2[x] \mid p(x)=x\cdot p'(x)\}$. ($p'(x)$ מציין את הנגזרת של הפולינום $p(x)$). האם V מהווה מ"ו מעל $F=\Re$? (תזכורת: $\Re_2[x]$ - אוסף הפולינומים במשתנה x עם מקדמים ממשיים, ממעלה לכל היותר 2).

תרגיל 6: יהי $V=\{f(x) \mid f(x)=ax+b \quad,\ a\in Z\}$, עם פעולת חיבור פונקציות (רגילה) וכפל פונקציה בסקלר $\bullet$, המוגדר באופן הבא: $\alpha\bullet f(x)=\alpha^2\cdot f(x) \quad \alpha\in F \quad \forall f(x)\in V$. האם V מהווה מ"ו מעל שדה הממשיים?

תרגיל 7: יהי V מ"ו מעל שדה F. הוכחתם בכיתה כי $0_F\cdot v=0_v$, ו- $\alpha\cdot 0_v=0_v$. הוכח:
א) $(-\alpha)\cdot v=-(\alpha\cdot v)=\alpha\cdot(-v) \quad \alpha\in F\ ,\ \forall v\in V$
ב) לכל $v\in V$ הווקטור הנגדי המסומן $-v$ הוא יחיד.

תאריך הגשה: 25.12.05
עד השעה 18:00

בהצלחה!

פתרונות לתרגיל בית 7

תרגיל 1: נפתור את מערכת המשוואות תוך שימוש בכלל קרמר: $\begin{cases}2x+y+z=1\\x+2y+z=2\\x+y+2z=4\end{cases}$

ראשית: אם $A=\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{pmatrix}$ היא מטריצת המקדמים, אזי

$|A|=\begin{vmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2&1&1\\1&2&1\\0&-1&1\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}2&1\\-1&1\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}1&1\\-1&1\end{vmatrix}=2\cdot3-2=4$. על כן יש למערכת פתרון יחיד.

$$x=\frac{D_1}{|A|}=\frac{\begin{vmatrix}1&1&1\\2&2&1\\4&1&2\end{vmatrix}}{4}=\frac{1(4-1)-1(4-4)+1(2-8)}{4}=\frac{3-6}{4}=\frac{-3}{4}$$

$$y=\frac{D_2}{|A|}=\frac{\begin{vmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&4&2\end{vmatrix}}{4}=\frac{\begin{vmatrix}2&1&1\\1&2&1\\0&2&1\end{vmatrix}}{4}=\frac{2\begin{vmatrix}2&1\\2&1\end{vmatrix}-1\begin{vmatrix}1&1\\2&1\end{vmatrix}}{4}=\frac{1}{4}$$

$$z=\frac{D_3}{|A|}=\frac{\begin{vmatrix}2&1&1\\1&2&2\\1&1&4\end{vmatrix}}{4}=\frac{\begin{vmatrix}2&1&1\\0&1&-2\\1&1&4\end{vmatrix}}{4}=\frac{2\begin{vmatrix}1&-2\\1&4\end{vmatrix}+1\begin{vmatrix}1&1\\1&4\end{vmatrix}}{4}=\frac{15}{4}$$

סה"כ – פתרון המערכת הוא $\vec{x}=\begin{pmatrix}-\frac{3}{4}\\\frac{1}{4}\\\frac{15}{4}\end{pmatrix}$.

תרגיל 2: האוסף $V=\left\{\begin{pmatrix}z\\\bar{z}\end{pmatrix}\mid z\in C\right\}$, יחד עם פעולת חיבור וקטורים וכפל בסקלר מהווה מ"ו מעל $F=\Re$.

נוכיח זאת –

1. סגירות לחיבור: יהיו $\begin{pmatrix}z\\\bar{z}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}w\\\bar{w}\end{pmatrix}\in V$, אזי $\begin{pmatrix}z\\\bar{z}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}w\\\bar{w}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}z+w\\\bar{z}+\bar{w}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}z+w\\\overline{z+w}\end{pmatrix}\in V$

הג' חיבור וקטורים   תכונת מרוכבים

2. קומוטטיביות: יהיו $\begin{pmatrix} z \\ \bar{z} \end{pmatrix},\begin{pmatrix} w \\ \bar{w} \end{pmatrix}\in V$, אזי

$$\begin{pmatrix} z \\ \bar{z} \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} w \\ \bar{w} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} z+w \\ \bar{z}+\bar{w} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} w+z \\ \bar{w}+\bar{z} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} w \\ \bar{w} \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} z \\ \bar{z} \end{pmatrix}$$

↓ הג.' חיבור ווקטורים

↓ קומוטטיביות במרוכבים

3. אסוציאטיביות: יהיו $\begin{pmatrix} z \\ \bar{z} \end{pmatrix},\begin{pmatrix} w \\ \bar{w} \end{pmatrix},\begin{pmatrix} t \\ \bar{t} \end{pmatrix}\in V$, אזי

$$\left(\begin{pmatrix} z \\ \bar{z} \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} w \\ \bar{w} \end{pmatrix}\right)+\begin{pmatrix} t \\ \bar{t} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} z+w \\ \bar{z}+\bar{w} \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} t \\ \bar{t} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} (z+w)+t \\ (\bar{z}+\bar{w})+\bar{t} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} z+(w+t) \\ \bar{z}+(\bar{w}+\bar{t}) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} z \\ \bar{z} \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} w+t \\ \bar{w}+\bar{t} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} z \\ \bar{z} \end{pmatrix}+\left(\begin{pmatrix} w \\ \bar{w} \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} t \\ \bar{t} \end{pmatrix}\right)$$

↓ אסוציאטיביות המרוכבים

4. איבר אדיש: $0_v=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\in V$, שכן לכל $\begin{pmatrix} z \\ \bar{z} \end{pmatrix}\in V$ מתקיים $\begin{pmatrix} z \\ \bar{z} \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} z+0 \\ \bar{z}+0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} z \\ \bar{z} \end{pmatrix}$

5. איבר נגדי: לכל $\begin{pmatrix} z \\ \bar{z} \end{pmatrix}\in V$ האיבר הנגדי הוא $\begin{pmatrix} -z \\ \overline{-z} \end{pmatrix}\in V$, שכן

$$\begin{pmatrix} z \\ \bar{z} \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -z \\ \overline{-z} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} z-z \\ \bar{z}+\overline{-z} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} z-z \\ \bar{z}+-(\bar{z}) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}=0_v$$

↓

לכל סקלר $\alpha\in\Re$, ובפרט עבור $\alpha=-1$ $\overline{\alpha z}=\alpha\bar{z}$.

6. סגירות לכפל בסקלר: לכל $\begin{pmatrix} z \\ \bar{z} \end{pmatrix}\in V$ ולכל $\alpha\in\Re$ מתקיים $\alpha\cdot\begin{pmatrix} z \\ \bar{z} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \alpha z \\ \alpha\bar{z} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \alpha z \\ \overline{\alpha z} \end{pmatrix}\in V$

↓

לכל סקלר $\alpha\in\Re$, ובפרט עבור $\alpha=-1$ $\overline{\alpha z}=\alpha\bar{z}$.

7. פילוג החיבור ב- V מעל הכפל בסקלר: לכל $\begin{pmatrix} z \\ \bar{z} \end{pmatrix},\begin{pmatrix} w \\ \bar{w} \end{pmatrix}\in V$, $\alpha\in\Re$ מתקיים

$$\alpha\cdot\left(\begin{pmatrix} z \\ \bar{z} \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} w \\ \bar{w} \end{pmatrix}\right)=\alpha\cdot\begin{pmatrix} z+w \\ \bar{z}+\bar{w} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \alpha(w+z) \\ \alpha(\bar{w}+\bar{z}) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \alpha w+\alpha z \\ \alpha\bar{w}+\alpha\bar{z} \end{pmatrix}=\alpha\cdot\begin{pmatrix} w \\ \bar{w} \end{pmatrix}+\alpha\cdot\begin{pmatrix} z \\ \bar{z} \end{pmatrix}$$

↓ פילוג מעל המרוכבים

8. פילוג הכפל מעל החיבור ב- F: לכל $\begin{pmatrix} z \\ \bar{z} \end{pmatrix}\in V$, $\alpha,\beta\in\Re$ מתקיים

$$(\alpha+\beta)\cdot\begin{pmatrix} z \\ \bar{z} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} (\alpha+\beta)z \\ (\alpha+\beta)\bar{z} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \alpha z+\beta z \\ \alpha\bar{z}+\beta\bar{z} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \alpha z \\ \alpha\bar{z} \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} \beta z \\ \beta\bar{z} \end{pmatrix}$$

↓ פילוג מעל המרוכבים

9. אסוציאטיביות הכפל: לכל $\begin{pmatrix} z \\ \bar{z} \end{pmatrix} \in V$, $\alpha, \beta \in \Re$ מתקיים

$$(\alpha\beta)\cdot\begin{pmatrix} z \\ \bar{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\alpha\beta)z \\ (\alpha\beta)\bar{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha(\beta z) \\ \alpha(\beta\bar{z}) \end{pmatrix} = \alpha\cdot\begin{pmatrix} \beta z \\ \beta\bar{z} \end{pmatrix} = \alpha\cdot\left(\beta\cdot\begin{pmatrix} z \\ \bar{z} \end{pmatrix}\right).$$

10. זהות – לכל $\begin{pmatrix} z \\ \bar{z} \end{pmatrix} \in V$, מאחר שהאדיש הכפלי בשדה הוא 1, מתקיים

$$1\cdot\begin{pmatrix} z \\ \bar{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1z \\ \overline{1z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1z \\ 1\bar{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z \\ \bar{z} \end{pmatrix}.$$

סה״כ – V מהווה מ״ו מעל שדה F.

<u>תרגיל 3</u>: נסתכל על האוסף $V = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \Re^3 \mid z = 2y+3,\ y = x \right\}$. V אינו מהווה מ״ו, שכן אינו מקיים סגירות לגבי חיבור. ראשית כל – ניתן לכתוב לשם נוחות: $V = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ x \\ 2x+3 \end{pmatrix} \in \Re^3 \right\}$ (ולקבל את אותה הקבוצה).

דוגמא נגדית:

ניקח $u = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$, אזי $u, v \in V$ (נא לבדוק!), אבל $v + u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix}$. עבור וקטור זה – מתקיים $x = y$, אך לא מתקיים $z = 2y+3$, שכן $5 = 2y+3 \neq z = 8$. לכן $u + v \notin V$.

<u>תרגיל 4</u>: נסתכל על $V = \{ p(x) \in \Re[x] \mid 3 \le \deg(p(x)) \le 5 \}$. V אינו מהווה מ״ו מעל $F = \Re$, וזאת מכיוון שלא מתקיימת סגירות לחיבור.

ניקח לדוגמא $p(x) = x^4 + 2x^2,\ \ q(x) = -x^4 + x^2$. נובע כי מעלת p ומעלת q הן 4, וכן $p(x), q(x) \in V$, אבל $p(x) + q(x) = 3x^2$, מעלת פולינום זה היא 2, קטנה ממש מ- 3. לכן פולינום זה אינו שייך ל- V.

<u>תרגיל 5</u>: נסתכל על $V = \{ p(x) \in \Re_2[x] \mid p(x) = x \cdot p'(x) \}$. ראשית כל – כל פולינום ב- $p(x) \in \Re_2[x]$ הוא מהצורה $p(x) = ax^2 + bx + c$. לכן התנאי ש- $p(x) = x \cdot p'(x)$ שקול לכך ש- $ax^2 + bx + c = (ax^2 + bx + c)\cdot x = (2ax + b)\cdot x = 2ax^2 + bx$.

נבצע השוואת מקדמים ונקבל ש- $\begin{cases} a=2a \\ b=b \\ c=0 \end{cases}$, כלומר- $\begin{cases} a=0 \\ b=b \\ c=0 \end{cases}$. לפיכך – כל פולינום ב- V הוא מהצורה $p(x)=bx$, כאשר $b\in\Re$.

לכן ננסח את השאלה מחדש : $V=\{\, p(x)\in\Re_2[x] \ | \ p(x)=bx,\ b\in\Re \,\}$.

נראה כי V מהווה מ"ו מעל הממשיים.

1. סגירות לחיבור : יהיו $p(x)=bx$, ו- $q(x)=cx$ ב- V (נובע כי b,c ממשיים). אזי $p(x)+q(x)=bx+cx=(b+c)x\in V$.
2. קומוטטיביות : יהיו $p(x)=bx$, ו- $q(x)=cx$ ב- V (נובע כי b,c ממשיים). אזי $p(x)+q(x)=bx+cx=cx+bx=q(x)+p(x)$.

   $\downarrow$

   קומוטטיביות בממשיים
3. אסוציאטיביות : יהיו $p(x)=bx$, $q(x)=cx$, ו- $f(x)=hx$ ב- V (נובע כי d,b,c ממשיים). אזי מהאסוציאטיביות בממשיים

   $\downarrow$

   $(p(x)+q(x))+f(x)=(bx+cx)+dx=cx+(bx+dx)=q(x)+(p(x)+f(x))$.
4. איבר אדיש : $0_v=0\cdot x\in V$ מקיים : לכל $p(x)=bx$ ב- V
   $p(x)+0_v=bx+0\cdot x=bx=p(x)$
5. איבר נגדי : לכל $p(x)=bx$ ב- V האיבר $-bx\in V$ מקיים $bx+(-bx)=0=0_v$
6. סגירות לכפל בסקלר: יהיו $p(x)=bx$ ב- V ו- $\alpha\in\Re$. אזי $\alpha\cdot p(x)=\alpha bx\in V$.
7. פילוג החיבור ב- V מעל הכפל בסקלר: יהיו $p(x)=bx$, ו- $q(x)=cx$ ב- V (נובע כי b,c ממשיים), ויהי $\alpha\in\Re$. אזי $\alpha\cdot(p(x)+q(x))=\alpha\cdot(bx+cx)=\alpha\cdot bx+\alpha\cdot cx$

   $\downarrow$

   פילוג בממשיים
8. פילוג החיבור ב- F מעל הכפל בסקלר: יהיו $p(x)=bx$ ב- V , $\alpha,\beta\in\Re$. אזי $(\alpha+\beta)\cdot p(x)=(\alpha+\beta)\cdot bx=\alpha\cdot bx+\beta\cdot bx=\alpha\cdot p(x)+\beta\cdot p(x)$.

   $\downarrow$

   פילוג בממשיים
9. אסוציאטיביות הכפל בסקלר : יהיו $p(x)=bx$ ב- V , $\alpha,\beta\in\Re$. אזי
   $(\alpha\beta)\cdot p(x)=(\alpha\beta)\cdot bx=\alpha\beta\cdot bx+\alpha\cdot\beta bx=\alpha\cdot(\beta\cdot(p(x)))$
10. זהות : מאחר שהאדיש הכפלי בשדה הוא 1, לכל $p(x)=bx$ ב- V מתקיים $1\cdot p(x)=1\cdot bx=bx=p(x)$.

תרגיל 6: יהי $V=\{f(x)|\ f(x)=ax+b \quad , \quad a\in Z\}$, עם פעולת חיבור פונקציות (רגילה) וכפל פונקציה בסקלר •, המוגדר באופן הבא : $\alpha\bullet f(x)=\alpha^2\cdot f(x) \quad \alpha\in F \quad \forall f(x)\in V$. V אינו מהווה מ"ו מעל הממשיים, מכיוון שאינו מקיים את תנאי פילוג הכפל בסקלר מעל החיבור (תנאי 8).

דוגמא נגדית : ניקח $\alpha=1,\ \beta=2\in\Re$, ו- $f(x)=x+1\in V$.

אזי $(\alpha+\beta)\bullet f(x)=(\alpha+\beta)^2\cdot f(x)=3^2\cdot(x+1)=9x+9$, ולעומת זאת -

$$\alpha \bullet f(x)+\beta \bullet f(x)=(\alpha)^2\cdot f(x)+(\beta)^2\cdot f(x)=1^2\cdot(x+1)+2^2\cdot(x+1)=5x+5$$

תרגיל 7: יהי V מ"ו מעל שדה F. הוכחתם בכיתה כי $0_F\cdot v=0_v$, ו- $\alpha\cdot 0_v=0_v$. הוכח:

א) $(-\alpha)\cdot v=-(\alpha\cdot v)=\alpha\cdot(-v) \quad \forall v\in V\ ,\ \alpha\in F$

ב) לכל $v\in V$ הווקטור הנגדי המסומן $-v$ הוא יחיד.

ראשית נבהיר כי אין אפשרות לפעול בדרך ה"רגילה", להעביר אגפים, ולהחסיר ביטויים, שכן לא מוגדרת פעולת החיסור. הסימון $-v$ מסמל את הווקטור הנגדי של v , ולא את הכפלת v ב- 1-.

א) $(-\alpha)\cdot v=-(\alpha\cdot v)=\alpha\cdot(-v)$.

יהי v וקטור ב- V. מאחר ש- V מ"ו קיים לו וקטור נגדי - $-v$, כך ש- $v+(-v)=0_v$. נכפיל את שני האגפים ב- α , ונקבל - $\alpha(v+(-v))=\alpha\cdot 0_v$, כלומר- $\alpha v+\alpha(-v)=0v$, ומכאן שהאיבר $\alpha(-v)$ מתפקד כנגדי לווקטור αv , ולכן - $-(\alpha v)=\alpha(-v)$.

נשים לב כעת ש- $0_v=(\alpha-\alpha)v=\alpha v+(-\alpha)v$, ולכן $(-\alpha)v$ מתפקד כנגדי לווקטור αv , ולכן - $-(\alpha v)=(-\alpha)v$.

ובסה"כ- $(-\alpha)\cdot v=-(\alpha\cdot v)=\alpha\cdot(-v)$.

ב) יהי v וקטור ב- V ,נניח בשלילה שקיימים לו שני איברים נגדיים שונים - $\vec{x},\vec{y}\in V$. (קיום של נגדי אחד- מובטח לנו מהיותו של V מ"ו). מתקיים - $v+\vec{x}=0_v$, וכן - $v+\vec{y}=0_v$. מהשוויון השני נקבל $-v=\vec{y}$. נחבר v– לשני אגפי השוויון $v+\vec{x}=0_v$ ונקבל - $\vec{y}+v+\vec{x}=-v+0_v$. אם נקבץ את החיבור בצורה הבאה - $(\vec{y}+v)+\vec{x}=-v+0_v$ אנו מקבלים (מהקומוטטיביות ומשוויון 2) - $0_v+\vec{x}=-v+0_v$, כלומר- $\vec{x}=-v$.

אם נקבץ את החיבור באופן הבא - $\vec{y}+(v+\vec{x})=-v+0_v$ מקבלים משוויון 1: $\vec{y}=-v$. סה"כ - $\vec{y}=-v=\vec{x}$, ומכאן ש- $\vec{x}=\vec{y}$.

תרגיל בית 8

1. תהי $A \in \Re^{n\times n}$. נסתכל על $W = \{B \in \Re^{n\times n} \mid \exists M \in \Re^{n\times n} \ , \ B = AM\}$. הוכח כי W מהווה מ"ו מעל הממשיים, ביחס לפעולת חיבור מטריצות וכפל בסקלר.

2. תהי $A \in \Re^{m\times n}$. הוכח או הפרך -
א) $W = \{x \in \Re^n \mid Ax = 0\}$ מהווה מרחב ווקטורים מעל הממשיים עם פעולת חיבור ווקטורים וכפל ווקטורים בסקלר.
ב) יהי $b \in \Re^m$. אזי $W' = \{x \in \Re^n \mid Ax = b\}$ מהווה מרחב ווקטורים מעל הממשיים עם פעולת חיבור ווקטורים וכפל ווקטורים בסקלר.

3. יהיו $W = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ 2a \\ 0 \end{pmatrix} \mid a \in \Re \right\}$, $U = \left\{ \begin{pmatrix} b \\ -c \\ c \end{pmatrix} \mid b,c \in \Re \right\}$.
א) הוכח כי U ו- W מהווים מרחבי ווקטורים מעל הממשיים ביחס לחיבור ווקטורים וכפל בסקלר.
ב) הוכח כי U מהווה משלים של W ב- $\Re^3$.

4. יהיו $W = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & a \end{pmatrix} \mid a,c \in \Re \right\}$, $U = \left\{ \begin{pmatrix} t & s \\ t-s & 0 \end{pmatrix} \mid t,s \in \Re \right\}$.
ג) הוכח כי W ו- U מהווים מרחבי ווקטורים מעל הממשיים עם פעולת חיבור מטריצות וכפל מטריצה בסקלר.
ד) הוכח כי U מהווה משלים של W ב- $\Re^{2\times 2}$.

5. נגדיר $V = \{ f : R \to R \mid f \text{ רציפה} \}$ (אוסף כל הפונקציות הממשיות.) האם אוסף הפונקציות הממשיות המקיימות $f(2) = f(1)$ מהווה ת"מ של V ?

6. נגדיר $V = \{ f : R \to R \mid f \text{ רציפה} \}$, $W = \{ f \in V \mid \forall a \in R \quad f(-a) = -f(a) \}$.
ה) הוכח כי W מהווה ת"מ של V.
ו) מצא משלים של W ב- V.

7. הוכח או הפרך: אם V מ"ו מעל שדה F, U ו- W תתי מרחבים של V, כך ש- $V = U \oplus W$, אזי $V = U \cup W$.

8. הוכח או הפרך: לכל V מ"ו מעל שדה F קיימים תתי מרחבים U, W של V כך ש- $V = U \oplus W$.

מועד הגשה: 2.1.06
עד השעה 14:00

פתרונות לתרגיל בית 8

שאלה 1

במקום $W=\{B\in\Re^{n\times n}\mid \exists M\in\Re^{n\times n}\ ,\ B=AM\}$ ניתן לכתוב פשוט $W=\{AB\mid B\in\Re^{n\times n}\}$
מאחר ש- $W\subseteq\Re^{n\times n}$, אם נראה כי W מהווה תת מרחב של $V=\Re^{n\times n}$ נקבל כי W מהווה מ״ו מעל הממשיים.

$0_v\in W$: ניתן לכתוב $[0]=A[0]$, ולכן $[0]\in W$.

סגירות לחיבור: $\forall B_1,B_2\in W\ \ \exists M_1,M_2\in V$ כך ש- $B_1=AM_1\ ,\ \ B_2=AM_2$. אזי מחוק הפילוג למטריצות $B_1+B_2=AM_1+AM_2=A(M_1+M_2)\in W$.

סגירות לכפל בסקלר: $\forall B\in W,\ \ \alpha\in\Re$ קיימת מטריצה ממשית M מסדר n כך ש- $B=AM$.
כעת מתכונות כפל מטריצות: $\alpha B=\alpha AM=A(\alpha M)$.

שאלה 2

א) זהו מרחב ווקטורים, (ואפילו יש לו שם , הוא נקרא מרחב האפס של המטריצה A).
נראה זאת: נראה כי זהו תת מרחב של $\Re^n$.
$0_v\in W$ שייך למרחב: וקטור האפס $x=0_v$ מקיים $Ax=0$.
סגירות לחיבור: יהיו $x,y\in W$. אזי $Ax=0,\ \ Ay=0$. לכן מחוק פילוג מטריצות $A(x+y)=Ax+Ay=0+0$.
סגירות לכפל בסקלר: יהיו $\alpha\in\Re\ ,\ x\in W$. אזי $Ax=0$. לכן $A(\alpha x)=\alpha(Ax)=\alpha 0=0$ (מתכונת כפל מטריצה בסקלר).

ב) זהו לא מ״ו, לא מתקיימת (בין השאר) סגירות לכפל בסקלר. דוגמא נגדית: נסתכל על $\Re^{2\times 2}$,
ניקח $A=I_2$, ו- $b=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$. אזי $x=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ מקיים $Ax=b$. אבל – עבור $\alpha=2$ מקבלים ש- $\alpha x=2\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}$ אינו מהווה פתרון למערכת, שכן $A\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=b$.

שאלה 3

א) נראה כי W מהווה ת״מ של $V=\Re^3$, ובכך נוכיח כי הוא מ״ו.

$0_v\in W$: עבור $a=0$ מקבלים $\begin{pmatrix}a\\2a\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\in W$.

סגירות לחיבור: יהיו $\begin{pmatrix} a_1 \\ 2a_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_2 \\ 2a_2 \\ 0 \end{pmatrix} \in W$. אזי

$\begin{pmatrix} a_1 \\ 2a_1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 \\ 2a_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + a_2 \\ 2a_1 + 2a_2 \\ 0+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + a_2 \\ 2(a_1 + a_2) \\ 0 \end{pmatrix} \in W$, שכן $a_1 + a_2 \in \Re$.

סגירות לכפל בסקלר: יהיו $\alpha \in \Re$, $\begin{pmatrix} a \\ 2a \\ 0 \end{pmatrix} \in W$. אזי בשל קומוטטיביות הכפל בממשיים נקבל

$\alpha \begin{pmatrix} a \\ 2a \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a \\ \alpha 2a \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a \\ 2\alpha a \\ 0 \end{pmatrix} \in W$, מכיוון ש- $\alpha a \in \Re$.

נראה כי U מהווה ת״מ של $V = \Re^3$, ובכך נוכיח כי הוא מ״ו.

$0_v \in U$: עבור $b = c = 0$ מקבלים $\begin{pmatrix} b \\ -c \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in U$.

סגירות לחיבור: יהיו $\begin{pmatrix} b_1 \\ -c_1 \\ c_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_2 \\ -c_2 \\ c_2 \end{pmatrix} \in U$. אזי

$\begin{pmatrix} b_1 \\ -c_1 \\ c_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_2 \\ -c_2 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 + b_2 \\ -c_1 - c_2 \\ c_1 + c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 + b_2 \\ -(c_1 + c_2) \\ c_1 + c_2 \end{pmatrix} \in U$, שכן $b_1 + b_2, c_1 + c_2 \in \Re$.

סגירות לכפל בסקלר: יהיו $\alpha \in \Re$, $\begin{pmatrix} b \\ -c \\ c \end{pmatrix} \in U$. אזי בשל קומוטטיביות הכפל בממשיים נקבל

$\alpha \begin{pmatrix} b \\ -c \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha b \\ \alpha(-c) \\ \alpha c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha b \\ -\alpha c \\ \alpha c \end{pmatrix} \in U$, מכיוון ש- $\alpha a \in \Re$.

ב) נראה כעת כי $W \oplus U = \Re^3$.

ראשית – נראה $W + U = \Re^3$:

יהי $v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \Re^3$. נראה כי ניתן לייצגו כסכום של איבר מ- U ואיבר מ- W.

אם ניקח $w=\begin{pmatrix} x-\frac{1}{2}(y+z) \\ -z \\ z \end{pmatrix}$, $u=\begin{pmatrix} \frac{1}{2}(y+z) \\ y+z \\ 0 \end{pmatrix}$, נקבל ש- $u\in U, w\in W$, ומתקיים $v=u+w$.

נראה כי $W\cap U=\{0_v\}$. יהי $v=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\in W\cap U$.

$v=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\in W$ ולכן $z=0$, וגם $y=2x$.

מצד שני - $v=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\in U$, ולכן $y=-z$.

מכיוון ש- $z=0$ מקבלים $y=-z=0$. מכיוון ש- $y=2x$ מקבלים ש- $x=\frac{1}{2}y=0$. סה"כ $v=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}=0_v$.

שאלה 4

א) נראה כי U ו- W מהווים תתי מרחבים של $V=\Re^{2\times 2}$:

$W=\left\{\begin{pmatrix} a & 0 \\ c & a \end{pmatrix} \mid a,c\in\Re\right\}$ ת"מ של V:

$0_v\in W$: עבור $a=c=0\in\Re$ מקבלים $0_v=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & 0 \\ c & a \end{pmatrix}$.

סגירות לחיבור: תהיינה $\begin{pmatrix} a_2 & 0 \\ c_2 & a_2 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ c_1 & a_1 \end{pmatrix}\in W$. אזי

$\begin{pmatrix} a_1+a_2 & 0 \\ c_1+c_2 & a_1+a_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_2 & 0 \\ c_2 & a_2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ c_1 & a_1 \end{pmatrix}$. $\begin{pmatrix} a_1+a_2 & 0 \\ c_1+c_2 & a_1+a_2 \end{pmatrix}$ היא מהצורה הדרושה,

וכמו כן $b_1+b_2, a_1+a_2\in\Re$. לכן $\begin{pmatrix} a_1+a_2 & 0 \\ c_1+c_2 & a_1+a_2 \end{pmatrix}\in W$.

סגירות לכפל בסקלר: תהי $\alpha\in\Re$, $\begin{pmatrix} a & 0 \\ c & a \end{pmatrix}\in W$. אזי $\begin{pmatrix} \alpha a & 0 \\ \alpha c & \alpha a \end{pmatrix}=\alpha\begin{pmatrix} a & 0 \\ c & a \end{pmatrix}$. לכן $\alpha\begin{pmatrix} a & 0 \\ c & a \end{pmatrix}$

היא מהצורה הדרושה, וכמו כן $\alpha a,\alpha c\in\Re$, לכן $\alpha\begin{pmatrix} a & 0 \\ c & a \end{pmatrix}\in W$.

$U=\left\{\begin{pmatrix} t & s\\ t-s & 0\end{pmatrix} \mid t,s\in\Re\right\}$ ת״מ של V:

$0_v\in U$: עבור $s=t=0$ מתקבל $\begin{pmatrix} t & s\\ t-s & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}=0_v$.

סגירות לחיבור: יהיו $\begin{pmatrix} t_1 & s_1\\ t_1-s_1 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix} t_2 & s_2\\ t_2-s_2 & 0\end{pmatrix}\in U$. אזי

$\begin{pmatrix} t_1 & s_1\\ t_1-s_1 & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix} t_2 & s_2\\ t_2-s_2 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} t_1+t_2 & s_1+s_2\\ (t_1+t_2)-(s_1+s_2) & 0\end{pmatrix}$. מטריצה זו היא מהצורה הדרושה, וכמו כן $s_1+s_2,t_1+t_2\in\Re$ בשל סגירות הממשיים לחיבור. לכן מטריצת הסכום שייכת ל- U.

סגירות לכפל בסקלר: יהיו $\alpha\in\Re$, $\begin{pmatrix} t & s\\ t-s & 0\end{pmatrix}\in U$. אזי לפי חוק הפילוג בממשיים - $\alpha\begin{pmatrix} t & s\\ t-s & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \alpha t & \alpha s\\ \alpha(t-s) & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \alpha t & \alpha s\\ \alpha t-\alpha s & 0\end{pmatrix}$. מטריצה זו היא מהצורה הדרושה, ובנוסף $\alpha s,\alpha t\in\Re$. לכן $\alpha\begin{pmatrix} t & s\\ t-s & 0\end{pmatrix}\in U$.

ב) נראה כי $V=U\oplus W$:

נראה $V=U+W$: יהי $\begin{pmatrix} x & y\\ z & w\end{pmatrix}\in\Re^{2\times2}=V$. אזי נוכל לכתוב

$\begin{pmatrix} x & y\\ z & w\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x-w & y\\ x-w-y & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix} w & 0\\ z-x+y+w & w\end{pmatrix}$, ונשים ♥ כי

$\begin{pmatrix} x-w & y\\ x-w-y & 0\end{pmatrix}\in U$, $\begin{pmatrix} w & 0\\ z-x+y+w & w\end{pmatrix}\in W$.

נראה כי $U\cap W=\{0_v\}$: תהי $\begin{pmatrix} x & y\\ z & w\end{pmatrix}\in U\cap W$. אזי $\begin{pmatrix} x & y\\ z & w\end{pmatrix}\in U$ וגם $\begin{pmatrix} x & y\\ z & w\end{pmatrix}\in W$. מכך ש- $\begin{pmatrix} x & y\\ z & w\end{pmatrix}\in U$ נובע כי $w=0$, וכן כי $z=x-y$.

מכך ש- $\begin{pmatrix} x & y\\ z & w\end{pmatrix}\in W$ נובע כי $y=0$, וכן כי $x=w$. לכן $x=y=w=0$, ולפי $z=x-y$ גם $z=0$. לכן $\begin{pmatrix} x & y\\ z & w\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}=0_v$.

שאלה 5

כן, נסמן ב- W את אוסף הפונקציות הממשיות המקיימות $f(2)=f(1)$, ונראה כי W מהווה ת״מ של V:

$0_v\in W$: וקטור האפס הינו פונקצית האפס, כלומר הפונקציה המקיימת $f(x)\equiv 0$. כלומר – לכל $x\in\Re$ מתקיים $f(x)=0$. אזי בפרט - $f(2)=f(1)=0$, ולכן $0_v\in W$.

סגירות לחיבור: תהיינה $f,g\in W$. אזי $f(2)=f(1)$, וכן $g(2)=g(1)$.
$(f+g)(2)=f(2)+g(2)=f(1)+g(1)=(f+g)(1)$. לכן $f+g\in W$.

סגירות לכפל בסקלר: תהיינה $\alpha\in\Re$, $f\in W$. אזי $(\alpha f)(1)=\alpha\cdot f(1)=\alpha\cdot f(2)=(\alpha f)(2)$

$$\underset{f(2)=f(1)}{\downarrow}$$

לכן $(\alpha f)\in W$.

שאלה 6

א) נראה כי W – אוסף הפונקציות הממשיות האי זוגיות, מהווה ת"מ של V:

$0_v\in W$: איבר האפס הוא פולינום האפס $f_0(x)\equiv 0$. הוא שייך לאוסף V, מכיוון ש-
$f_0(-x)=0=-f_0(x)\quad \forall x\in R$.

סגירות לחיבור: תהיינה $f,g:R\to R$ אי זוגיות. אזי $f(-x)=-f(x)\quad \forall x\in R$, וכן -

$g(-x)=-g(x)\quad \forall x\in R$. אזי

$(f+g)(-x)=f(-x)+g(-x)=-f(x)-g(x)=-(f+g)(x)$.

סגירות לגבי כפל בסקלר: לכל $x\in\Re,\ \alpha\in\Re,\ f\in V$ מתקיים:
$(\alpha f)(-x)=\alpha\cdot f(-x)=\alpha(-f(x))=-\alpha(f(x))=(-\alpha f)(x)$

ב) נמצא משלים ל- W ב- V: נגדיר $U=\{f\in V \mid \forall a\in R\quad f(-a)=f(a)\}$. זהו אוסף הפונקציות הממשיות הזוגיות. באופן דומה ניתן להראות כי U מווה גם הוא ת"מ של V.

נראה כי $V=U\oplus W$:
נראה <u>$V=U+W$</u>: תהי $f\in V$ פונקציה ממשית רציפה. אזי לכל $x\in\Re$ נסמן:

$$g(x)=\frac{1}{2}[f(x)+f(-x)]\quad,\quad h(x)=\frac{1}{2}[f(x)-f(-x)].$$

נראה כי $g\in U,\ h\in W$:
נראה כי $g\in U$ (כלומר נראה כי $g(-x)=g(x)\quad \forall x\in\Re$): יהי $x\in\Re$. אזי
$$g(-x)=\frac{1}{2}[f(-x)+f(-(-x))]=\frac{1}{2}[f(-x)+f(x)]=\frac{1}{2}[f(x)+f(-x)]=g(x)$$
נראה כי $h\in W$ (כלומר- נראה כי $h(-x)=-h(x)\quad \forall x\in\Re$.): יהי $x\in\Re$. אזי
$$h(-x)=\frac{1}{2}[f(-x)-f(-(-x))]=\frac{1}{2}[f(-x)-f(x)]=\frac{1}{2}[-f(x)+f(-x)]=-\frac{1}{2}[f(x)-f(-x)]=-h(x)$$

כעת - $f(x)=g(x)+h(x)\quad \forall x\in R$ (אנא בדוק!).

נראה כי $\underline{U \cap W = \{0_v\}}$: תהי $f \in U \cap W$. מכך ש- $f \in U$ מקבלים כי $\forall x \in R \quad f(-x) = -f(x)$. מכך ש- $f \in W$ מקבלים כי $f(-x) = f(x) \quad \forall x \in R$.

לכן $f(x) = f(-x) = f(x) - \quad \forall x \in R$, כלומר $f(x) = f(x) - \quad \forall x \in R$

זאת אומרת שלכל $x \in \Re \quad 2f(x) = 0$, כלומר- לכל $x \in \Re \quad f(x) = 0$. לכן - f היא פונקצית האפס, כלומר $f = 0_v$.

שאלה 7

הטענה אינה נכונה. ניקח לדוגמא את הדוגמא מהתרגול. נגדיר $V = \Re^2$ עם פעולת חיבור וקטורים וכפל ווקטור בסקלר רגילות.

נגדיר $U = \{(x,0) | x \in \Re\}$ (זהו ציר ה- x של המישור), $W = \{(0,y) | y \in \Re\}$ (זהו ציר ה- y של המישור). ניתן לבדוק כי U, ו- W הינם תתי מרחבים של V.

נראה כי $V = U \oplus W$:

נראה $\underline{V = U + W}$: יהי $(x,y) \in \Re^2$. אזי נוכל לכתוב $(x,y) = (x,0) + (0,y)$, ונשים לב כי $(0,y) \in W \quad ,(x,0) \in U$.

נראה כי $\underline{U \cap W = \{0_v\}}$. יהי $(x,y) \in U \cap W$. אזי $(x,y) \in U$ וגם $(x,y) \in W$.

מכך ש- $(x,y) \in U$ נובע כי $y = 0$.

מכך ש- $(x,y) \in W$ נובע כי $x = 0$.

לכן בהכרח $(x,y) = (0,0) = 0_v$.

עד כה- $V = U \oplus W$.

אולם - $U \cup W = \{(x,y) \in \Re^2 \mid x = 0 \vee y = 0\} \neq \Re^2$, מכיוון ש- $(1,1)$ למשל מקיים $(1,1) \in V = \Re^2$, אבל $(1,1) \notin U \cup W$, מכיוון ש- $(1,1) \notin U$ וגם $(1,1) \notin W$.

שאלה 8

הטענה נכונה. נזכור כי לכל מ״ו V מעל שדה F - $W = \{0_v\}$ מהווה ת״מ של V. לכן – תמיד נוכל לקחת $U = V, \quad W = \{0_v\}$, ולקבל ש- $V = U \oplus W$.

הסבר:

נראה $\underline{V = U + W}$: יהי $v \in V$. אזי ניתן לכתוב $v = v + 0_v$, ומאחר ש- $U = V$ $v \in U, \; 0_v \in W$. לכן v הוא סכום של איבר מ- U ואיבר מ- W.

$\underline{U \cap W = \{0_v\}}$: זה נובע ישירות מכך ש- $U \supseteq W = \{0_v\}$.

תרגיל בית 9

בסיס ומימד, תלות ליניארית, משפט המימדים

לגבי כל אחד מהבאים- נתון כי זהו מ״ו (אין צורך להוכיח). מצאו בסיס ומימד.

1. $V_1=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\Re^3 \mid z=2y,\ y=x\right\}$.

2. $V_2=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\Re^3 \mid y=x-z\right\}$.

3. $V_3=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\\w\end{pmatrix}\in\Re^4 \mid y=x-z,\ w=2y+z\right\}$

4. $V_4=\{A\in\Re_{2\times2} \mid A^t=A\}$.

5. V_5 הוא תת המרחב הבא של $\Re^n$: $V_5=\left\{\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\\\vdots\\a_n\end{pmatrix} \mid a_1+a_2+a_3=0\right\}$ ($n>4$).

6. יהי $V=R_3[x]$ מרחב הפולינומים הממשיים ממעלה ≤ 3 ותהי U תת קבוצה של V המוגדרת באופן הבא: $U=\{p(x)\in V \mid p(x)=x\cdot p'(x)\}$.
   א) הוכיחו כי U תת מרחב של $V=R_3[x]$.
   ב) מצאו בסיס ומימד של U.
   ג) מצאו ת״מ W של V המקיים $V=U\oplus W$.

7. יהי V מ״ו מעל שדה F, ויהי W ת״מ של V. יהיו $u,v\in V$ כך ש- $u,v\notin W$, אבל $v+3u\in W$.
   א) האם $W\cup\{u,v\}$ מהווה ת״מ של V ? אם כן – הצע עבורה בסיס.
   ב) האם $Span(\{u,v\}\cup W)$ מהווה ת״מ של V ? אם כן – הצע עבורה בסיס.

8. א) יהי $V=\{A\in\Re^{3\times3} \mid A^t=A\}$. הוכח או הפרך: קיימים 4 תתי מרחבים שונים של V : V_1,V_2,V_3,V_4 כך שכולם שונים מ- V ומ- $\{0_v\}$ ומתקיימת ההכלה הבאה: $V_1\subset V_2\subset V_3\subset V_4$. (הכלה ממש, בניגוד ל- $\subseteq$).
   ב) אותה שאלה, אך עבור $V=\{A\in\Re^{2\times2} \mid A^t=A\}$.

9. נגדיר $S_1=\{(-1,3,2),(-2,-1,1)\}$, $S_2=\{(-7,0,5),(0,7,3)\}$. קבע אילו מבין הטענות הבאות נכונות:
   א) $Span(S_1)\not\subset Span(S_2)$
   ב) $Span(S_2)\not\subset Span(S_1)$

ג) $Span(S_2)=Span(S_1)$

10. לפניך שני תתי מרחבים של $R^{2\times 3}$ (אין צורך להוכיח שאילו אכן ת״מ)

$$W=\left\{\begin{pmatrix} a & b & c \\ a+b & a+c & a+b+c \end{pmatrix} \;\middle|\; a,b,c\in R\right\}$$

$$U=span=\left\{u_1=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},\ u_2=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},\ u_3=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix},\ u_3=\begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 4 & 5 & 4 \end{pmatrix}\right\}$$

א) מצאו בסיס ומימד לתתי המרחבים W ו- U.

ב) מצאו בסיס ומימד לסכום $W+U$.

ג) מצאו בסיס ומימד לחיתוך $W\cap U$.

ד) מצאו את המימד של משלים ל- $W+U$, ב- $R^{2\times 3}$. כלומר- מצאו את המימד של תת מרחב U_1 של $R^{2\times 3}$ המקיים $W+U=U_1\oplus(U\cap W)$.

<u>תאריך הגשה: 17.1.06</u>
<u>עד 18:00</u>

בהצלחה!

פתרונות לתרגיל בית 9

שאלה 1

$V_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \Re^3 \mid z = 2y,\ y = x \right\}$. ניתן לסמן את הפרמטר $x = t$, ולקבל כי המרחב

נראה כך $V_1 = \left\{ \begin{pmatrix} t \\ t \\ 2t \end{pmatrix} \middle| t \in \Re \right\}$. זהו מרחב ממימד 1, ולכן בסיס אפשרי יהיה - $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$.

שאלה 2

$V_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \Re^3 \mid y = x - z \right\}$. נסמן כפרמטרים $x = t,\ z = s$ ונקבל כי ניתן לכתוב את

המרחב כך $V_2 = \left\{ \begin{pmatrix} t \\ s \\ t-s \end{pmatrix} \in \Re^3 \mid y = x - z \right\}$. זהו מרחב ממימד 2. בסיס אפשרי -

$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ (התקבל כאשר מציבים בווקטור הראשון $t = 1, s = 0$ ובשני $t = 0, s = 1$).

נעיר כי ניתן לבחור את הפרמטרים אחרת, לייצג את x דווקא כתלות ב- y וב- z. באופן כזה

נקבל בסיס כזה $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$, למשל.

שאלה 3

$V_3 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \in \Re^4 \mid y = x - z,\ w = 2y + z \right\}$ למעשה אם נסמן פרמטרים $x = t,\ z = s$ ניתן יהיה

לרשום $V_3 = \left\{ \begin{pmatrix} t \\ t-s \\ s \\ 2t-s \end{pmatrix} \middle| t, s \in \Re \right\}$. זהו מרחב ממימד 2, ובסיס אפשרי יהיה - $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$

(התקבל כאשר מציבים בווקטור הראשון $t = 1, s = 0$ ובשני $t = 0, s = 1$).

שאלה 4

$V_4=\{A\in\Re_{2\times2}\ \mid A^t=A\}$. ניתן לרשום את המרחב כך: $V_4=\left\{\begin{pmatrix}a&b\\b&c\end{pmatrix}\mid a,b,c\in\Re\right\}$. (שימו ♥
כי אין הכרח כי איברי האלכסון יהיו שווים זה לזה!) זהו מרחב ממימד 3 , וניתן להציג עבורו
בסיס כזה: $\left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right\}$. בסיס זה התקבל כאשר מציבים במטריצה הראשונה:
$a=1,b=0,c=0$ במטריצה השנייה: $a=0,b=1,c=0$ ובמטריצה השלישית:
$a=0,b=0,c=1$

שאלה 5

נמצא בסיס עבור $V_5=\left\{\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}\mid a_1+a_2+a_3=0\right\}$: נוכל לרשום $a_3=-(a_1+a_2)$, וזוהי התלות
היחידה שקיימת במרחב זה. כלומר- לכל אחד מהרכיבים $a_1,a_2,a_4,...,a_n$ נדרוש איבר כלשהו
בבסיס. לכן, נוכל לקחת בסיס בעל n-1 האיברים הבאים:

$B=\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\-1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix},...,\begin{pmatrix}0\\0\\0\\\vdots\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\0\\\vdots\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$ (הסבר – בכל פעם אנו שמים 1- ברכיב אחד מבין
$a_1,a_2,a_4,...,a_n$, ו- 0 בכל שאר המקומות, ודואגים שיתקיים $a_3=-(a_1+a_2)$).

שאלה 6

א. נראה כי $U=\{p(x)\in V\,|\,p(x)=x\cdot p'(x)\}$ ת"מ של $V=R_2[x]$.

- **$U\neq\varnothing$:**
  ובפרט פולינום האפס ממעלה 2 (איבר האפס של $V=R_2[x]$) מקיים
  $0=\tilde{p}(x)=x\cdot\tilde{p}'(x)=x\cdot 0=0$, כלומר $0_V=\tilde{p}(x)\in U$.
- סגירות לחיבור ב - U:
  נראה כי עבור $p_1(x),p_2(x)\in U$ מתקיים $(p_1(x)+p_2(x))\in U$.

$$p_1(x)+p_2(x)=\begin{Bmatrix} p_1(x)\in U \Rightarrow p_1(x)=xp_1'(x) \\ p_2(x)\in U \Rightarrow p_2(x)=xp_2'(x)\end{Bmatrix}=xp_1'(x)+xp_2'(x)=x\left(p_1'(x)+p_2'(x)\right)=$$

$$=\{\text{תכונות הנגזרת}\}=x\left(p_1(x)+p_2(x)\right)' \Rightarrow \left(p_1(x)+p_2(x)\right)\in U$$

- <u>סגירות לכפל בסקלר :</u>
  נראה כי עבור $p(x)\in U$ ו- $\alpha\in R$ מתקיים $(\alpha\cdot p(x))\in U$.

$$\alpha\cdot p(x)=\{p(x)\in U \Rightarrow p(x)=xp'(x)\}=\alpha\cdot(xp'(x))=x(\alpha\cdot p'(x))=$$

$$=\{\text{תכונות הנגזרת}\}=x(\alpha\cdot p(x))' \Rightarrow (\alpha\cdot p(x))\in U$$

ב. נמצא בסיס ומימד של U.

$$U=\{p(x)\in V | p(x)=x\cdot p'(x)\}=\left\{p(x)=a+bx+cx^2\in V \middle| a+bx+cx^2=x\cdot\left(a+bx+cx^2\right)'\right\}=$$

$$=\left\{p(x)=a+bx+cx^2\in V \middle| a+bx+cx^2=x\cdot(b+2cx)\right\}=$$

$$=\left\{p(x)=a+bx+cx^2\in V \middle| a+bx+cx^2=bx+2cx^2\right\}=$$

$$=\left\{p(x)=a+bx+cx^2\in V \middle| cx^2-a=0\right\}=$$

$$=\left\{p(x)=a+bx+cx^2\in V \middle| a=0 \quad ;c=0\right\}=\{p(x)=bx \mid b\in R\}$$

מכאן $U=span\{x\}$ ומאחר וזו קבוצה בת"ל נובע כי $\{x\}$ בסיס תת המרחב U ולכן $\dim U=1$.

ג. נמצא W תת מרחב של V כך ש- $V=U\oplus W$.

ראינו כי $U=span\{x\}$ נגדיר $W=span\{1,x^2\}$. (שימו לב כי הגדרנו את W כתת מרחב של $V=R_2[x]$ הנפרש ע"י הקבוצה המשלימה את הבסיס של U לבסיס של המרחב כולו.)

עבור $W=span\{1,x^2\}$ מתקיים :

$U+W=span\{x\}\cup span\{1,x^2\}=span\{1,x,x^2\}=R_2[x]$.

כלומר המרחב $V=R_2[x]$ הינו **<u>סכום</u>** של תתי המרחבים U,W, כלומר $V=U+W$.

כעת נראה כי זהו סכום ישר , כלומר $V=U\oplus W$.

על מנת להראות זאת מספיק להראות כי $U\cap W=\{0_V\}$.

$$U\cap W=\{v\in U \quad \wedge \quad v\in W\}=\begin{Bmatrix} v\in U \Rightarrow v=bx \\ v\in W \Rightarrow v=a+cx^2\end{Bmatrix}=\{v=bx=a+cx^2\}=$$

$$=\{a-bx+cx^2=0\}=\{a=b=c=0\}\Rightarrow\{v=0_V\}$$

<u>שאלה 7</u>

א) $W\cup\{u,v\}$ אינו מהווה מ"ו, שכן אין בו סגירות לחיבור. ניקח דוגמא: $V=\Re^3$,

$W=\left\{\begin{pmatrix}x\\0\\0\end{pmatrix}\mid x\in\Re\right\}$. ניקח $u=(1,-1,0)$, $v=(1,3,0)$. אזי - $u,v\notin W$ (כי הרכיב השני שלהם שונה מ – 0), אבל $v+3u=(4,0,0)\in W$. נראה כעת כי $W\cup\{u,v\}$ אינו מ"ו:

$u,v\in W\cup\{u,v\}$, אבל $v+u=(2,2,0)\notin W\cup\{u,v\}$.

ב) $Span(\{u,v\}\cup W)$ מהווה מ"ו. $0_v\in Span(W\cup\{u,v\})$ כי W מהווה מ"ו ולכן $0_v\in W$.

$Span(\{u,v\}\cup W)$ סגור לחיבור, כי אם $v_1,v_2\in Span(W\cup\{u,v\})$, ונניח כי

$B=\{w_1,w_2,...,w_n\}$ בסיס עבור W אזי קיימים סקלרים $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n,a_1,a_2\in F$ כך ש-

$v_1=\alpha_1w_1+\alpha_2w_2+...+\alpha_nw_n+a_1u+a_2v$, וקיימים סקלרים $\beta_1,\beta_2,...,\beta_n,b_1,b_2\in F$ כך ש-

$v_2=\beta_1w_1+\beta_2w_2+...+\beta_nw_n+b_1u+b_2v$. לכן

$v_1+v_2=(\alpha_1+\beta_1)w_1+(\alpha_2+\beta_2)w_2+...+(\alpha_n+\beta_n)w_n+(a_1+b_1)u+(a_2+b_2)v$ כלומר-

$v_1,v_2\in Span(W\cup\{u,v\})$

$Span(\{u,v\}\cup W)$ סגור לכפל בסקלר, שכן אם $c\in F$, $x\in Span(W\cup\{u,v\})$ אזי קיימים

סקלרים $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n,a_1,a_2\in F$ כך ש- $x=\alpha_1w_1+\alpha_2w_2+...+\alpha_nw_n+a_1u+a_2v$. אזי

$cx=c(\alpha_1w_1+\alpha_2w_2+...+\alpha_nw_n+a_1u+a_2v)=c\alpha_1w_1+c\alpha_2w_2+...+c\alpha_nw_n+ca_1u+ca_2v$

W תת מרחב ולכן $c\alpha_1w_1,c\alpha_2w_2,...,c\alpha_nw_n\in W$. $Span\{u,v\}$ תת מרחב ולכן

$ca_1u\,,\,ca_2v\in Span(\{u,v\})$. לכן $c\alpha_1w_1\,,\,c\alpha_2w_2\,,...,\,c\alpha_nw_n\,,\,ca_1u\,,\,ca_2v\in Span(W\cup\{u,v\})$.

מהסגירות לחיבור ב- $Span(\{u,v\}\cup W)$ מקבלים שגם $cx\in Span(W\cup\{u,v\})$. (שכן

$cx=c\alpha_1w_1+c\alpha_2w_2+...+c\alpha_nw_n+ca_1u+ca_2v$).

נציע כעת בסיס עבור $Span(\{u,v\}\cup W)$: אמנם ידוע לנו (הראנו כעת) כי מאחר ש-

$B=\{w_1,w_2,...,w_n\}$ בסיס עבור W , ו - $\{u,v\}$ בסיס עבור $Span\{u,v\}$, האוסף

$B\cup\{u,v\}=\{w_1,w_2,...,w_n,u,v\}$ פורש את $Span(\{u,v\}\cup W)$, אך לא ניתן לקחת אותו כבסיס

עבור $Span(\{u,v\}\cup W)$, שכן יש בו תלות לינארית. לפי הנתון $v+3u\in W$, כלומר קיימים

סקלרים $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n\in F$ כך ש- $\alpha_1w_1+\alpha_2w_2+...+\alpha_nw_n=3u+v$. לפיכך – יש תלות

לינארית. (הסקלרים $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n,-1,-3\in F$ לא כולם שווים ל- 0 ומתקיים

$\alpha_1 w_1+\alpha_2 w_2+...+\alpha_n w_n-v-3u=0_v$). לכן- מספיק לבחור אחד מבין הוקטורים u,v. כלומר-

בסיס עבור $Span(\{u,v\}\cup W)$ יכול להיות $B\cup\{u\}=\{w_1,w_2,...,w_n,u\}$, למשל.

שאלה 8

א) הטענה נכונה. מאחר שאת $V=\{A\in\Re^{3\times 3} \mid A^t=A\}$ ניתן לכתוב כך:

$V=\left\{\begin{pmatrix} a & x & y \\ x & b & z \\ y & z & c \end{pmatrix},\ a,b,c,x,y,z\in\Re\right\}$, אנו רואים שמימד מרחב זה הוא 6. בסיס עבור מרחב זה יכול להיות, למשל:

$$B=\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\right\}$$

לכן – ניתן למצוא מרחבים המקיימים $\{0_v\}\subset V_1\subset V_2\subset V_3\subset V_4\subset V$, כלומר -

$$0=\dim\{0_v\}<\dim(V_1)<\dim(V_2)<\dim(V_3)<\dim(V_4)<\dim(V)=6$$

למשל- נוכל לקחת $V_1=\left\{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & z \\ 0 & z & 0 \end{pmatrix},\ z\in\Re\right\}$ (ממימד 1),

$V_2=\left\{\begin{pmatrix} 0 & 0 & y \\ 0 & 0 & z \\ y & z & 0 \end{pmatrix},\ y,z\in\Re\right\}$ (ממימד 2),

$V_2=\left\{\begin{pmatrix} 0 & x & y \\ x & 0 & z \\ y & z & 0 \end{pmatrix},\ x,y,z\in\Re\right\}$ (ממימד 3),

$V_4=\left\{\begin{pmatrix} 0 & x & y \\ x & 0 & z \\ y & z & c \end{pmatrix},\ c,x,y,z\in\Re\right\}$ (ממימד 4).

ב) מאחר שמרחב זה הוא ממימד 3, לא ניתן למצוא תתי מרחבים המקיימים $\{0_v\}\subset V_1\subset V_2\subset V_3\subset V_4\subset V$, שכן אז צריך להתקיים $0=\dim\{0_v\}<\dim(V_1)<\dim(V_2)<\dim(V_3)<\dim(V_4)<\dim(V)=3$, והדבר לא מתאפשר כאשר המימדים צריכים להיות שלמים...

שאלה 9

$S_2=\{(-7,0,5),(0,7,3)\}$, $S_1=\{(-1,3,2),(-2,-1,1)\}$

נסמן $W=Span(S_1),\ U=Span(S_2)$.

ראשית כל, בדיקה קצרה מעלה שכל אחת מהקבוצות הללו - S_1,S_2 היא בת"ל. לכן

לכן S_1 מהווה בסיס ל- W, ו- S_2 מהווה בסיס ל- U. (אין צורך לבדוק קבוצה פורשת, כי W ו- U הוגדרו כקבוצות הנפרשות ע"י S_1, ו- S_2 בהתאמה.)

נראה כי $Span(S_1)=Span(S_2)$ נכונה, וכך נראה כי הטענות $Span(S_1)\not\subset Span(S_2)$ ו- $Span(S_2)\not\subset Span(S_1)$ אינן נכונות.

נראה כי כל וקטור ב- W ניתן להציג כצ"ל של איברי S_2, ואז ינבע כי S_2 בסיס ל- W.

כמו כן נראה כי כל וקטור ב- U ניתן להציג כצ"ל של איברי S_1, ואז ינבע כי גם S_1 בסיס ל- U.

בסה"כ – מקבלים U=W.

<u>שלב א':</u> נראה כי כל וקטור ב- W ניתן להציג כצ"ל של איברי S_2, ואז ינבע כי S_2 בסיס ל- W.

נראה זאת רק על איברי הבסיס של W - S_1, שכן אם איברי הבסיס ניתנים להצגה כצ"ל של איברי S_2, וכל וקטור ב- W ניתן להצגה כצ"ל של איברי S_1, נקבל שכל איבר ב- W ניתן להצגה כצ"ל של איברי S_2.

$(-1,3,2)=a(-7,0,5)+b(0,7,3) \quad\Leftarrow\quad a=\frac{1}{7},\ b=\frac{3}{7}$.

$(-2,-1,1)=a(-7,0,5)+b(0,7,3) \quad\Leftarrow\quad a=\frac{2}{7},\ b=\frac{-1}{7}$.

<u>שלב ב':</u> נראה כי כל וקטור ב- U ניתן להציג כצ"ל של איברי S_1, ואז ינבע כי S_1 בסיס ל- U.

נראה זאת רק על איברי הבסיס של U - S_2, שכן אם איברי הבסיס ניתנים להצגה כצ"ל של איברי S_1, וכל וקטור ב- W ניתן להצגה כצ"ל של איברי S_2, נקבל שכל איבר ב- W ניתן להצגה כצ"ל של איברי S_1.

$(-7,0,5)=a(-1,3,2)+b(-2,-1,1) \quad\Leftarrow\quad a=1,\ b=3$.

$(0,7,3)=a(-1,3,2)+b(-2,-1,1) \quad\Leftarrow\quad a=2,\ b=-1$.

שאלה 10

א. נמצא בסיס ומימד של $W=\left\{\begin{pmatrix} a & b & c \\ a+b & a+c & a+b+c\end{pmatrix}\ \middle|\ a,b,c\in R\right\}$:

נגדיר: $B_1=\left\{\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&1\end{pmatrix}\right\}$ (התקבל ע"י כך שלקחנו $a=1,b=c=0$, לאחר מכן $a=0,b=1,\ c=0$, ולבסוף $a=1,b=0,\ c=1$.

B_1 פורש את W, וכמו כן – B בת"ל (בדוק!). לפיכך $\dim(W)=3$.

נמצא בסיס עבור

$$U = span = \left\{ u_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},\quad u_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},\quad u_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix},\quad u_3 = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 4 & 5 & 4 \end{pmatrix} \right\}$$

:

האוסף $B'_2 = \left\{ u_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},\quad u_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},\quad u_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix},\quad u_3 = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 4 & 5 & 4 \end{pmatrix} \right\}$

פורש את U, מהגדרת U.

נבדוק האם יש תלות ליניארית בעזרת דירוג המטריצה המתקבלת מהווקטורים המתאימים למטריצות ב- B'_2 :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 4 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \leftarrow R_3 - R_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 4 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \leftarrow R_3 - 4R_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_3 \leftrightarrow R_4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

לפיכך, האוסף $B_2 = \left\{ u_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},\quad u_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},\quad u_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \right\}$ מהווה בסיס עבור U. לפיכך - $\dim(U) = 3$

ב. בסיס עבור המרחב $W + U$ ניתן לקבל כך: נאחד את האיברים בבסיסים B_1, B_2 , ונקבל קבוצה פורשת עבור $W + U$. כעת ננפה מתוכה אוסף בת״ל.

נסמן

$$B' = B_1 \cup B_2 =$$

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},\ u_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},\quad u_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},\quad u_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \right\}$$

כעת נמצה מתוך B' אוסף בת"ל :

$$\begin{pmatrix}1&0&1&0&1&0\\0&1&0&1&1&1\\0&0&0&1&0&2\\1&0&0&1&1&1\\0&1&0&1&0&1\\0&0&1&0&1&1\end{pmatrix}\xrightarrow{R_4\leftarrow R_4-R_1}\begin{pmatrix}1&0&1&0&1&0\\0&1&0&1&1&1\\0&0&0&1&0&2\\0&0&-1&1&0&1\\0&1&0&1&0&1\\0&0&1&0&1&1\end{pmatrix}\xrightarrow{R_5\leftarrow R_5-R_2}\begin{pmatrix}1&0&1&0&1&0\\0&1&0&1&1&1\\0&0&0&1&0&2\\0&0&-1&1&0&1\\0&0&0&0&-1&0\\0&0&1&0&1&1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_3\leftrightarrow R_4}\begin{pmatrix}1&0&1&0&1&0\\0&1&0&1&1&1\\0&0&-1&1&0&1\\0&0&0&1&0&2\\0&0&0&0&-1&0\\0&0&1&0&1&1\end{pmatrix}\xrightarrow{R_6\leftarrow R_6+R_3}\begin{pmatrix}1&0&1&0&1&0\\0&1&0&1&1&1\\0&0&-1&1&0&1\\0&0&0&1&0&2\\0&0&0&0&-1&0\\0&0&0&1&1&2\end{pmatrix}\xrightarrow{R_6\leftarrow R_6-R_4}\begin{pmatrix}1&0&1&0&1&0\\0&1&0&1&1&1\\0&0&-1&1&0&1\\0&0&0&1&0&2\\0&0&0&0&-1&0\\0&0&0&0&1&0\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_6\leftarrow R_6+R_5}\begin{pmatrix}1&0&1&0&1&0\\0&1&0&1&1&1\\0&0&-1&1&0&1\\0&0&0&1&0&2\\0&0&0&0&-1&0\\0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

לפיכך האוסף הבא : $B=\left\{\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1&0\\1&1&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&-1\\1&0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}\right\}$

מהווה בסיס עבור $W+U$.

ג. נמצא בסיס ומימד עבור מרחב החיתוך $W\cap U$. לפי משפט המימדים :

$\underbrace{\dim(U+W)}_{=5}=\underbrace{\dim(U)}_{=3}+\underbrace{\dim(W)}_{=3}-\dim(U\cap W)$, ולכן $\dim(W\cap U)=1$.

נמצא את המרחב $W\cap U$ באופן מפורש : אם $\begin{pmatrix}a&b&c\\d&e&f\end{pmatrix}\in W\cap U$ אזי

$\begin{pmatrix}a&b&c\\d&e&f\end{pmatrix}\in W$ ולכן $\begin{cases}d=a+b\\e=a+c\\f=a+b+c\end{cases}$. כלומר- $\begin{pmatrix}a&b&c\\d&e&f\end{pmatrix}$ היא למעשה מהצורה

$\begin{pmatrix}a&b&c\\a+b&a+c&a+b+c\end{pmatrix}$.

מצד שני- $\begin{pmatrix}a&b&c\\a+b&a+c&a+b+c\end{pmatrix}\in U$, ולכן היא מהווה צירוף ליניארי של האיברים

$B_2=\left\{u_1=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\end{pmatrix},\quad u_2=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&1&1\end{pmatrix},\quad u_3=\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&2\end{pmatrix}\right\}$. כלומר – עבור $\alpha,\beta,\gamma\in\Re$

$$\begin{pmatrix}a&b&c\\a+b&a+c&a+b+c\end{pmatrix}=\alpha\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}0&1&0\\1&1&1\end{pmatrix}+\gamma\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha&\beta&\alpha\\\beta+\gamma&\alpha+\beta&\beta+2\gamma\end{pmatrix}$$

מהשוואת מקדמים נקבל: $\begin{pmatrix} a & b & c \\ a+b & a+c & a+b+c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \alpha \\ \beta+\gamma & \alpha+\beta & \beta+2\gamma \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} \alpha = a = c \\ \beta = b \\ \beta+\gamma = a+b \\ \alpha+\beta = a+c \\ \beta+2\gamma = a+b+c \end{cases} \Leftarrow \begin{cases} \alpha = a = c \\ \beta = b \\ b+\gamma = a+b \\ a+b = a+c \\ b+2\gamma = 2a+b \end{cases} \quad b+\gamma = a+b \quad \Leftarrow \quad \gamma = a.$$

נציב ב- 2 המשוואות האחרונות את האילוצים $\alpha = \gamma = a = c, \quad \beta = b$:

$$\begin{cases} a+b = 2a \\ b+2a = 2a+b \end{cases} \Leftarrow \quad a = b.$$

סה"כ – אנו מקבלים ש- $a = b = c = \beta = \alpha = \gamma$.

לכן - $\begin{pmatrix} a & b & c \\ a+b & a+c & a+b+c \end{pmatrix}$ היא למעשה מהצורה $\begin{pmatrix} a & a & a \\ 2a & 2a & 3a \end{pmatrix}$, כאשר $a \in \Re$,

ובסיס עבור מרחב החיתוך יכול להיות: $S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \right\}$. כלומר- כפי שציפינו ממשפט המימדים- החיתוך הוא מרחב ממימד 1.

ד. עלינו למצוא מהו מימדו של תת מרחב U_1 של $R^{2\times3}$ המקיים $W + U = U_1 \oplus (U \cap W)$.
כפי שחישבנו - $\dim(U+W) = 5$, $\dim(U \cap W) = 1$. לפיכך $\dim(U_1 \oplus (U \cap W)) = 5$. לפי ממשפט המימדים- $\dim(U_1 + (U \cap W)) = \dim(U_1) + \dim(U \cap W) - \dim(U_1 \cap (U \cap W))$,
אולם מאחר ש $U_1 + (U \cap W) = U_1 \oplus (U \cap W)$, נובע כי $U_1 \cap (U \cap W) = \{0_v\}$, כלומר- $\dim(U_1 \cap (U \cap W)) = 0$. לכן
$\underbrace{\dim(U_1 + (U \cap W))}_{=5} = \dim(U_1) + \underbrace{\dim(U \cap W)}_{=1} - \underbrace{\dim(U_1 \cap (U \cap W))}_{=0}$, ומכאן ש-
$\dim(U_1) = 4$.

תרגיל בית 10

העתקות ליניאריות, איזומורפיזמים, גרעין ותמונה, ממ"פ

1. יהיו V,U מ"ו מעל שדה F, ותהי $T:V\rightarrow U$ העתקה ליניארית. הוכח כי $\ker(T)$ מהווה מ"ו.
2. נתונה העתקה $T:R_3[x]\rightarrow R^{2\times 2}$ המוגדרת ע"י

$$T\left(a+bx+cx^2+dx^3\right)=\begin{pmatrix} a+b & a+b \\ a+b+c & a+b+c \end{pmatrix}$$

א) הוכח כי T העתקה ליניארית.

ב) מצאו בסיס ומימד לתמונה $\operatorname{Im}T$.

ג) מצאו בסיס ומימד לגרעין $KerT$.

ד) יהא $D:R_3[x]\rightarrow R_3[x]$ אופרטור הנגזרת, המוגדר ע"י

$D(p(x))=p'(x);\quad \forall p(x)\in R_3[x]$.

נגדיר את העתקת ההרכבה $TD:R_3[x]\rightarrow R^{2\times 2}$ ע"י

$$(TD)(p(x))=T(D(p(x)))=T(p'(x));\quad \forall p(x)\in R_3[x]$$

חשבו את מימד החיתוך $\dim(Ker(TD)\cap KerT)$.

3. נתונה הע"ל $T:R^2\rightarrow R^2$ המקיימת: $T(-1,4)=(2,6)$, $T(1,-3)=(1,-2)$. חשב $T(2,-7)$.

4. לגבי כל אחד מהסעיפים הבאים – קבע האם תיתכן כזו העתקה ליניארית. אם כן- תן דוגמא, אם לא- הסבר מדוע.

א) $T:\Re^3\rightarrow\Re^5$ המקיימת $\dim(\operatorname{Im}(T))=4$.

ב) $T:\Re^3\rightarrow\Re^5$ העתקת איזומורפיזם, המקיימת $\dim(\operatorname{Im}(T))=2$.

ג) $T:\Re_3[x]\rightarrow\Re^{2\times 2}$ העתקת איזומורפיזם.

5. תהי $M=\begin{pmatrix}1&2\\2&1\end{pmatrix}\in\mathbf{R}^{2\times 2}$, ותהי $T:\mathbf{R}^{2\times 2}\rightarrow\mathbf{R}^{2\times 2}$ מוגדרת כך:

$T(X):=MX-XM\quad \forall X\in\mathbf{R}^{2\times 2}$.

א) הוכח כי T מהווה העתקה ליניארית. ב) הוכח כי $\dim(\ker(T))=\dim(\operatorname{im}(T))$.

6. נגדיר $f:\Re^{n\times n}\times\Re^{n\times n}\rightarrow\Re$ כך: $f(A,B)=trace(AB)$. האם f מהווה מכפלה פנימית על $V=\Re^{2\times 2}$?

7. א) יהיו $\lambda_1,...,\lambda_n\in\Re$ חיוביים. הוכח כי הפונקציה $f:\Re^n\times\Re^n\rightarrow\Re$ המוגדרת ע"י

$f(\vec{x},\vec{y})=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i y_i\quad \forall\vec{x}=(x_1,...,x_n),\ \vec{y}=(y_1,...,y_n)$ מהווה מכפלה פנימית על $V=\Re^n$ מעל $\Re$.

ב) מה קורה אם מוותרים על הדרישה ש- $\lambda_1,...,\lambda_n\in\Re$ יהיו חיוביים?

8. (מן ההרצאה) יהי V ממ"פ מעל שדה F. הוכח:

א) $\langle u,0_v\rangle=\langle 0_v,u\rangle=0\quad \forall u\in V$.

ב) $\langle\alpha u,\beta v\rangle=\alpha\overline{\beta}\langle u,v\rangle\quad \alpha,\beta\in F\ ,\ \forall u,v\in V$

להגשה עד 26.1.06
עד 18:00

פתרונות לתרגיל בית 10

שאלה 1

יהיו V,U מ״ו מעל שדה F, ותהי $T:V\to U$ העתקה ליניארית.נראה כי $\ker(T)$ מהווה מרחב וקטורים.

לפי הגדרה $\ker(T)=\{v\in V \mid T(v)=0_u\}$, ולכן $\ker(T)\subseteq V$. נראה כי $\ker(T)$ הוא תת מרחב של V.

איבר האפס : האיבר 0_v מקיים $T(0_v)=0_U$, ולכן $0_v\in\ker(T)$.

סגירות לחיבור : יהיו $w,v\in\ker(T)$. אזי $T(w)=T(v)=0_u$. נראה כי גם $w+v\in\ker(T)$.

מאחר ש- $T(v+w)=T(v)+T(W)=0_U+0_U=0_U$

$\downarrow$ $\downarrow$

T העתקה ליניארית $T(w)=T(v)=0_u$

סגירות לכפל בסקלר : יהיו $\alpha\in F$, $v\in\ker(T)$. אזי $T(v)=0_u$. כעת

$T(\alpha v)=\alpha T(v)=0_u$

$\downarrow$ $\downarrow$

T העתקה ליניארית $T(v)=0_u$

שאלה 2

א) נוכיח כי T העתקה ליניארית $T(a+bx+cx^2+dx^3)=\begin{pmatrix} a+b & a+b \\ a+b+c & a+b+c \end{pmatrix}$

נראה כי לכל $p(x),q(x)\in\Re_3[x]$ מתקיים $T(p(x)+q(x))=T(p(x))+T(q(x))$. יהיו $q(x)=a_2+b_2x+c_2x^2+d_2x^3\in\Re_3[x]$, $p(x)=a_1+b_1x+c_1x^2+d_1x^3$. אזי

$$T(p(x)+q(x))=T(a_1+b_1x+c_1x^2+d_1x^3+a_2+b_2x+c_2x^2+d_2x^3)=$$

$$T(a_1+a_2+b_1x+b_2x+c_1x^2+c_2x^2+d_1x^3+d_2x^3)=\begin{pmatrix} a_1+a_2+b_1+b_2 & a_1+a_2+b_1+b_2 \\ a_1+a_2+b_1+b_2+c_1+c_2 & a_1+a_2+b_1+b_2+c_1+c_2 \end{pmatrix}=$$

$$\begin{pmatrix} a_1+b_1 & a_1+b_1 \\ a_1+b_1+c_1 & a_1+b_1+c_1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} a_2+b_2 & a_2+b_2 \\ a_2+b_2+c_2 & a_2+b_2+c_2 \end{pmatrix}=$$

$$T(a_1+b_1x+c_1x^2+d_1x^3)+T(a_2+b_2x+c_2x^2+d_2x^3)=T(p(x))+T(q(x))$$

נראה כי לכל $\alpha\in\Re$, $p(x)\in\Re_3[x]$ מתקיים $T(\alpha p(x))=\alpha T(p(x))$.

יהיו $\alpha\in\Re$, $p(x)=a+bx+cx^2+dx^3\in\Re_3[x]$. אזי

$$T(\alpha p(x))=T(\alpha(a+bx+cx^2+dx^3))=T(\alpha a+\alpha bx+\alpha cx^2+\alpha dx^3)=$$

$$=\begin{pmatrix} \alpha a+\alpha b & \alpha a+\alpha b \\ \alpha a+\alpha b+\alpha c & \alpha a+\alpha b+\alpha c \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \alpha(a+b) & \alpha(a+b) \\ \alpha(a+b+c) & \alpha(a+b+c) \end{pmatrix}=$$

$$\alpha\begin{pmatrix} a+b & a+b \\ a+b+c & a+b+c \end{pmatrix}=\alpha T(p(x))$$

ב) נמצא בסיס ומימד ל $\operatorname{Im}T$.

על פי משפט: עבור $B=\{e_1=1,\quad e_2=x,\quad e_3=x^2,\quad e_4=x^3\}$ בסיס של $R_3[x]$

$$\operatorname{Im}T = span\{T(e_1),T(e_2),T(e_3),T(e_4)\}$$

$$T(e_1)=T(1)=\left\{\begin{matrix} a=1 \\ b=c=d=0\end{matrix}\right\}=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$$

$$T(e_2)=T(x)=\left\{\begin{matrix} b=1 \\ a=c=d=0\end{matrix}\right\}=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$$

$$T(e_3)=T(x^2)=\left\{\begin{matrix} c=1 \\ a=b=d=0\end{matrix}\right\}=\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix}$$

$$T(e_4)=T(x^3)=\left\{\begin{matrix} d=1 \\ a=b=c=0\end{matrix}\right\}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$$

ולכן $\operatorname{Im}T = span\left\{\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix}\right\}$. צמצמנו את הקבוצה הפורשת לקבוצה בת"ל

(הקבוצה בת"ל כי וקטורי הקואורדינאטות $(1,1,1,1),(0,0,1,1)$ בת"ל ב- R^4)

ולכן זהו בסיס לתמונה $\operatorname{Im}T$ ו- $\dim(\operatorname{Im}T)=2$.

ג) נמצא בסיס ומימד לגרעין $KerT$.

$$KerT=\{p(x)\in R_3[x]\ \mid\ T(p(x))=0_{R^{2\times 2}}\}=$$

$$=\left\{p(x)=a+bx+cx^2+dx^3\middle|\begin{pmatrix}a+b & a+b\\ a+b+c & a+b+c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\right\}=$$

$$=\left\{p(x)=a+bx+cx^2+dx^3\middle|\left\{\begin{matrix}a+b=0\\a+b+c=0\end{matrix}\right.\right\}=\left\{p(x)=a+bx+cx^2+dx^3\middle|\left\{\begin{matrix}b=-a\\c=0\end{matrix}\right.\right\}=$$

$$=\{p(x)=a-ax+dx^3\,|\,\{a,d\in R\}=\{p(x)=a(1-x)+dx^3\,|\,\{a,d\in R\}=span\{1-x,x^3\}$$

הקבוצה $\{1-x,x^3\}$ קבוצה פורשת לגרעין $KerT$ וגם בת"ל

(כי וקטורי הקואורדינטות $(1,-1,0,0),(0,0,0,1)$ בת"ל ב- R^4)

ולכן $\{1-x,x^3\}$ בסיס לגרעין $KerT$ ו- $\dim(KerT)=2$.

ד) נחשב את מימד החיתוך $\dim(Ker(TD)\cap KerT)$.

ראשית נציג את ההרכבה TD באופן מפורש.

$$(TD)(p(x))=T(D(p(x)))=T(p'(x));\quad \forall p(x)\in R_3[x]$$

$$\Downarrow$$

$$(TD)(a+bx+cx^2+dx^3)=T\left[\left(a+bx+cx^2+dx^3\right)'\right]=T\left[b+2cx+3dx^2\right]=\begin{pmatrix}b+2c & b+2c\\ b+2c+3d & b+2c+3d\end{pmatrix}$$

כלומר $(TD)(p(x))=(TD)(a+bx+cx^2+dx^3)=\begin{pmatrix}b+2c & b+2c\\ b+2c+3d & b+2c+3d\end{pmatrix}$

נמצא בסיס לגרעין $Ker(TD)$:

$$Ker(TD)=\{p(x)\in R_3[x] \mid (TD)(p(x))=0_{R^{2\times 2}}\}=$$
$$=\left\{p(x)=a+bx+cx^2+dx^3 \,\middle|\, \begin{pmatrix} b+2c & b+2c \\ b+2c+3d & b+2c+3d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right\}=$$
$$=\left\{p(x)=a+bx+cx^2+dx^3 \,\middle|\, \begin{cases} b+2c=0 \\ b+2c+3d=0 \end{cases}\right\}=\left\{p(x)=a+bx+cx^2+dx^3 \,\middle|\, \begin{cases} b=-2c \\ d=0 \end{cases}\right\}=$$
$$=\{p(x)=a-2cx+cx^2 \mid a,d\in R\}=\{p(x)=a\cdot 1+c\cdot(x^2-2x) \mid a,c\in R\}=span\{1,x^2-2x\}$$

הקבוצה $\{1,x^2-2x\}$ קבוצה פורשת לגרעין $Ker(TD)$ וגם בת"ל
(כי וקטורי הקואורדינאטות $(1,0,0,0),(0,-2,1,0)$ בת"ל ב- R^4)
ולכן $\{1,x^2-2x\}$ בסיס לגרעין $Ker(TD)$.

$$KerT\cap Ker(TD)=\{v\in R_3[x] \mid v\in KerT \wedge v\in Ker(TD)\}=$$
$$=\{v\in R_3[x] \mid v=a\cdot(1-x)+b\cdot x^3 \wedge v=c\cdot 1+d\cdot(x^2-2x)\}=$$
$$=\{v\in R_3[x] \mid v=a\cdot(1-x)+b\cdot x^3=c\cdot 1+d\cdot(x^2-2x)\}=$$
$$=\{v\in R_3[x] \mid (a-c)+(2d-a)x-dx^2+bx^3=0\}=$$
$$=\{v\in R_3[x] \mid a-c=0\wedge 2d-a=0\wedge -d=0\wedge b=0\}=$$
$$=\{v\in R_3[x] \mid a=b=c=d=0\}=\{v=0\cdot(1-x)+0\cdot x^3=0\cdot 1+0\cdot(x^2-2x)=0_V\}$$

קיבלנו , אם כן $(Ker(TD)\cap KerT)=\{0_V\}$ ולכן $\dim(Ker(TD)\cap KerT)=0$.

שאלה 3

נשים ♥ כי $B=\{(1,-3),(-1,4)\}$ מהווה בסיס עבור $V=\Re^2$. נציג את $(2,-7)$ כצירוף ליניארי של איברי B:

$$a=1,\ b=-1 \Leftarrow \begin{cases} 2=a-b \\ -7=-3a+4b \end{cases} \Leftarrow (2,-7)=a(1,-3)+b(-1,4)$$

כלומר $(2,-7)=(1,-3)-(-1,4)$ לפיכך -

$$T(2,-7)=\underset{\text{לפי מקדמי הצ"ל שמצאנו}}{\underset{\downarrow}{T(1(1,-3)-1(-1,4))}}=\underset{\text{T העתקה ליניארית}}{\underset{\downarrow}{T(1,-3)-T(-1,4)}}=\underset{\text{לפי הנתון}}{\underset{\downarrow}{(1,-2)-(2,6)}}=(-1,-8)$$

שאלה 4

א) $T:\Re^3\to\Re^5$ המקיימת $\dim(\mathrm{Im}(T))=4$. הדבר לא יתכן. לפי משפט :
$\dim(V)=\dim(\ker(T))+\dim(\mathrm{Im}(T))$ - במקרה שלנו $\underbrace{\dim(V)}_{=3}=\dim(\ker(T))+\underbrace{\dim(\mathrm{Im}(T))}_{=4}$,

וכך נובע כי $\dim(\ker(T))=-1$, וזה לא יתכן.

ב) $T:\Re^3 \to \Re^5$ העתקת איזומורפיזם, המקיימת $\dim(\mathrm{Im}(T))=2$. שוב, לא יתכן.
$\underbrace{\dim(V)}_{=3}=\dim(\ker(T))+\underbrace{\dim(\mathrm{Im}(T))}_{=2}$. כך נובע כי $\dim(\ker(T))=1$. אולם – כדי ש- T תהיה איזומורפיזם צריך להתקיים $\ker(T)=\{0_v\}$, וכידוע- $\dim(\{0_v\})=0$. כלומר צריך להתקיים $\dim(\ker(T))=0$, בסתירה לכך ש- $\dim(\ker(T))=1$.

ג) $T:\Re_3[x]\to \Re^{2\times 2}$ העתקת איזומורפיזם. הדבר אפשרי, כיוון ש- $\dim(\Re_3[x])=\dim(\Re^{2\times 2})=4$. (בין כל 2 מ"ו מאותו מימד ניתן להגדיר איזומורפיזם, ע"י העברת איברי בסיס של המרחב האחד אל איברי הבסיס של המרחב האחר, באופן חח"ע ועל)
נגדיר למשל : לכל $a+bx+cx^2+dx^3\in \Re_3[x]$: $T(a+bx+cx^2+dx^3)=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. קל לבדוק כי זוהי העתקת איזומורפיזם.

שאלה 5

א) נראה כי $\forall X\in \mathbf{R}^{2\times 2}\quad T(X):=MX-XM$ מהווה הע"ל, כאשר $M=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\in \mathbf{R}^{2\times 2}$.

ראשית – נשכתב את ההגדרה. תהי $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\in \Re^{2\times 2}$. אזי
$T\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}=....=2\begin{pmatrix} c-b & d-a \\ a-d & b-c \end{pmatrix}$. כלומר- ניתן לנסח את ההעתקה כך : $T\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right)=2\begin{pmatrix} c-b & d-a \\ a-d & b-c \end{pmatrix}$.

תהיינה $\begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}\in \Re^{2\times 2}$. אזי

$$T\left(\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}\right)=T\begin{pmatrix} a_1+a_2 & b_1+b_2 \\ c_1+c_2 & d_1+d_2 \end{pmatrix}=2\begin{pmatrix} (c_1+c_2)-(b_1+b_2) & (d_1+d_2)-(a_1+a_2) \\ (a_1+a_2)-(d_1+d_2) & (b_1+b_2)-(c_1+c_2) \end{pmatrix}$$
$$=2\begin{pmatrix} (c_1)-(b_1) & (d_1)-(a_1) \\ (a_1)-(d_1) & (b_1)-(c_1) \end{pmatrix}+2\begin{pmatrix} (c_2)-(b_2) & (d_2)-(a_2) \\ (a_2)-(d_2) & (b_2)-(c_2) \end{pmatrix}=T\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}+T\begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}$$

יהיו $\alpha\in\Re$, $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\in \Re^{2\times 2}$. אזי

$$T\left(\alpha\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right)=T\begin{pmatrix} \alpha a & \alpha b \\ \alpha c & \alpha d \end{pmatrix}=2\begin{pmatrix} \alpha c-\alpha b & \alpha d-\alpha a \\ \alpha a-\alpha d & \alpha b-\alpha c \end{pmatrix}=2\begin{pmatrix} \alpha(c-b) & \alpha(d-a) \\ \alpha(a-d) & \alpha(b-c) \end{pmatrix}=$$
$$\alpha 2\begin{pmatrix} c-b & d-a \\ a-d & b-c \end{pmatrix}=\alpha T\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right)$$

סה"כ – T היא העתקה ליניארית.

ב) נמצא בסיס לתמונה של T : לכל $\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\in\Re^{2\times2}$ מתקיים

$T\left(\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\right)=2\begin{pmatrix}c-b & d-a\\ a-d & b-c\end{pmatrix}$. לכן, אם נסמן $y=\frac{1}{2}(d-a)$, $x=\frac{1}{2}(c-b)$, מקבלים ש-

תמונת T היא מטריצה מהצורה $\begin{pmatrix}x & y\\ -y & -x\end{pmatrix}$. כלומר- $\operatorname{Im}(T)=\left\{\begin{pmatrix}x & y\\ -y & -x\end{pmatrix}\mid x,y\in\Re\right\}$,

ובסיס עבור מרחב זה יכול להיות : $\left\{\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\right\}$.

לפי משפט, $\dim(V)=\dim(\ker(T))+\dim(\operatorname{Im}(T))$, ובמקרה שלנו $\underbrace{\dim(V)}_{=4}=\dim(\ker(T))+\underbrace{\dim(\operatorname{Im}(T))}_{=2}$. לכן $\dim(\ker(T))=2$.

<u>הערה :</u> ניתן , כמובן למצוא בסיס למרחב הגרעין ולהראות ישירות כי $\dim(\ker(T))=2$. אם $\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\in\ker(T)$ אזי $T\left(\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\right)=2\begin{pmatrix}c-b & d-a\\ a-d & b-c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$, וזה קורה כאשר $b=c,\ a=d$. כלומר- בסיס עבור מרחב התמונה יהיה $\left\{\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\right\}$.

<u>שאלה 6</u>

הפונקציה אינה מהווה מכפלה פנימית, כי לא מתקיים התנאי הרביעי. דוגמא – ניקח $V=\Re^{2\times2}$, . $A=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 1 & 0\end{pmatrix}\in V$. אזי $f(A,A)=trace\left(\begin{pmatrix}1 & -2\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -2\\ 1 & 0\end{pmatrix}\right)=trace\begin{pmatrix}-1 & -2\\ 1 & -2\end{pmatrix}=-3<0$.

<u>שאלה 7</u>

א) נוכיח כי הפונקציה $f(\vec{x},\vec{y})=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i y_i \quad \forall\vec{x}=(x_1,\dots,x_n),\ \vec{y}=(y_1,\dots,y_n)$ מהווה מכפלה פנימית על $V=\Re^n$ כאשר $\lambda_1,\dots,\lambda_n\in\Re$ קבועים חיוביים.

1) יהיו $\vec{x}=(x_1,\dots,x_n),\ \vec{y}=(y_1,\dots,y_n)\ \vec{z}=(z_1,\dots,z_n)\in\Re^n$.

אזי

$$f(\vec{x}+\vec{y},\vec{z})=f((x_1,\dots,x_n)+(y_1,\dots,y_n),(z_1,\dots,z_n))=$$

$$f((x_1+y_1,\dots,x_n+y_n),(z_1,\dots,z_n))=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i(x_i+y_i)z_i=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i z_i+\sum_{i=1}^{n}\lambda_i y_i z_i$$

↵ חוק הפילוג, שינוי סדר סכימה (= חילוף החיבור ב-$\Re$)

2) יהיו $\vec{x}=(x_1,\dots,x_n),\ \vec{y}=(y_1,\dots,y_n)\in\Re^n$. אזי

$$f(\vec{x},\vec{y})=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i y_i=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i y_i x_i=\overline{\sum_{i=1}^{n}\lambda_i y_i x_i}$$

מעל הממשיים   חילוף כפל ממשיים

3) יהיו $\vec{x}=(x_1,...,x_n)\ ,\ \vec{y}=(y_1,...,y_n)\in\Re^n$ ותהי $\alpha\in\Re$. אזי

$$f(\alpha\vec{x},\vec{y})=f(\alpha(x_1,...,x_n),(y_1,...,y_n))=f((\alpha x_1,...,\alpha x_n),(y_1,...,y_n))=$$
$$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i(\alpha x_i)y_i=\sum_{i=1}^{n}\alpha\lambda_i x_i y_i=\alpha\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i y_i$$

חוק הפילוג   חילוף כפל ממשיים

4) א) יהי $\vec{x}=(x_1,...,x_n)\in\Re^n$. אזי

$$f(\vec{x},\vec{x})=f((x_1,...,x_n),(x_1,...,x_n))=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i x_i=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i(x_i)^2\ \ge 0$$

לכל $1\le i\le n$ $\lambda_i(x_i)^2\ge 0$, משום ש- $(x_i)^2\ge 0$, $\lambda_i>0$. לכן גם הסכום כולו אי שלילי.

ב) עבור $0_v=(0,...,0)\in\Re^n$ מתקיים $f(0_v,0_v)=f((0,...,0),(0,...,0))=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i(0)^2=0$

יהי $\vec{x}=(x_1,...,x_n)\in\Re^n$ המקיים $f(\vec{x},\vec{x})=0$. אזי

$0=f(\vec{x},\vec{x})=f((x_1,...,x_n),(x_1,...,x_n))=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i x_i=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i(x_i)^2$. מאחר שזהו סכום של מחוברים אשר כל אחד מהם אי שלילי – הסכום יתאפס רק כאשר כל המחוברים ישוו ל – 0.

כלומר- לכל $1\le i\le n$ $\lambda_i(x_i)^2=0$. מאחר ש-לכל $1\le i\le n$ $\lambda_i>0$, זה אומר שלכל $1\le i\le n$ מתקיים $(x_i)^2=0$, כלומר- שלכל $1\le i\le n$ $x_i=0$ - וזה אומר $\vec{x}=(x_1,...,x_n)=(0,...,0)=0_v$.

ב) כאשר מוותרים על התנאי ש- $\lambda_1,...,\lambda_n>0$ הפונקציה המתקבלת אינה מהווה מכפלה פנימית. דוגמא נגדית – ניקח $V=\Re^2$, $\lambda_1=\lambda_2=-1$, ו- $v=(1,1)\in V$. אזי $f(v,v)=f((1,1),(1,1))=(-1\cdot(1\cdot1))+(-1\cdot(1\cdot1))=-2<0$ ועל כן לא מתקיים התנאי הרביעי.

שאלה 8

יהי V ממ"פ מעל שדה F.

א) נראה $\langle u,0_v\rangle=\langle 0_v,u\rangle=0_F$ $\forall u\in V$. יהי $u\in V$. הוכחנו בעבר כי $0_F\cdot u=0_v$. לכן $\langle 0_v,u\rangle=\langle 0_F\cdot u,u\rangle=0_F\langle u,u\rangle=0_F$ $\forall u\in V$. כמו כן $\langle u,0_v\rangle=\langle u,0_F\cdot u\rangle=\overline{0_F}\langle u,u\rangle=0_F$ $\forall u\in V$.

ב) נראה $\langle\alpha u,\beta v\rangle=\alpha\overline{\beta}\langle u,v\rangle$ $\alpha,\beta\in F\ ,\ \forall u,v\in V$. יהיו $\alpha,\beta\in F\ ,\ u,v\in V$. אזי

$$\langle\alpha u,\beta v\rangle=\alpha\langle u,\beta v\rangle=\alpha\overline{\langle\beta v,u\rangle}=\alpha\overline{\beta}\cdot\overline{\langle v,u\rangle}=\alpha\overline{\beta}\cdot\langle u,v\rangle$$

החוג למדעי המחשב- אלגברה ליניארית

סמסטר א'- תשס"ה

תרגיל בית 3 (מטריצות)

1. נתון: $A=\begin{pmatrix}2&-3&-5\\-1&4&5\\1&-3&-4\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}-1&3&5\\1&-3&-5\\-1&3&5\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}2&-2&-4\\-1&3&4\\1&-2&-3\end{pmatrix}$

א) הראה כי $AB=BA=0$, $AC=A$, $CA=C$.

ב) השתמש בסעיף א' כדי להראות:

- $ACB=CBA$.
- $A^2-B^2=(A-B)(B+A)$ (רמז- התחל לפתח מאגף ימין)
- $(A\pm B)^2=A^2+B^2$

2. הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:

א. סכום שתי מטריצות משולשות מאותו סדר הוא מטריצה משולשת (מטריצה משולשת הינה מטריצה משולשת עליונה או תחתונה).

ב. סכום שתי מטריצות משולשות עליונות מאותו סדר הוא מטריצה משולשת עליונה.

ג. סכום של שתי מטריצות אלכסוניות מאותו סדר הוא מטריצה אלכסונית.

ד. סכום של שתי מטריצות יחידה מאותו סדר הוא מטריצת יחידה.

3. תהי $A=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$, מצא את קבוצת כל המטריצות של מספרים ממשיים המקיימות- $AB=BA$.

4. מצא מטריצה ריבועית A מסדר 2 המקיימת : $A^2=\begin{pmatrix}1&3\\0&1\end{pmatrix}$.

5. האם קיימת מטריצה A מגודל 2×2 המקיימת $A^2=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$?

6. תהיינה A, B מטריצות ריבועיות סימטריות מאותו סדר. הוכח כי ABA סימטרית.

7. אם A,B מטריצות מסדר $m\times n$ אזי A^tB-B^tA אנטי סימטרית.

8. הוכח או הפרך : אם B,A מטריצות ריבטעיות, אז $tr(AB)=tr(A)\cdot tr(B)$.

תאריך הגשה אחרון: 11.11.04

בהצלחה!

פתרונות לתרגיל בית 3

1. א)
$$A=\begin{pmatrix}2&-3&-5\\-1&4&5\\1&-3&-4\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}-1&3&5\\1&-3&-5\\-1&3&5\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}2&-2&-4\\-1&3&4\\1&-2&-3\end{pmatrix}$$

$$AB=\begin{pmatrix}2&-3&-5\\-1&4&5\\1&-3&-4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1&3&5\\1&-3&-5\\-1&3&5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2-3+5&6+9-15&10+15-25\\1+4-5&-3-12+15&-5-20+25\\-1-3+4&3+9-12&5+15-20\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$$BA=\begin{pmatrix}-1&3&5\\1&-3&-5\\-1&3&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&-3&-5\\-1&4&5\\1&-3&-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2-3+5&3+12-15&5+15-20\\2+3-5&-3-12+15&-5-15+20\\-2-3+5&3+12-15&5+15-20\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}.\qquad \Leftarrow AB=BA=0.$$

$$AC=\begin{pmatrix}2&-3&-5\\-1&4&5\\1&-3&-4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2&-2&-4\\-1&3&4\\1&-2&-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4+3-5&-4-9+10&-8-12+15\\-2-4+5&2+12-10&4+16-15\\2+3-4&-2-9+8&-4-12+12\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&-3&-5\\-1&4&5\\1&-3&-4\end{pmatrix}$$

$\Leftarrow AC=A$

$$CA=\begin{pmatrix}2&-2&-4\\-1&3&4\\1&-2&-3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2&-3&-5\\-1&4&5\\1&-3&-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4+2-4&-6-8+12&-10-10+16\\-2-3+4&3+12-12&5+15-16\\2+2-3&-3-8+9&-5-10+12\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&-2&-4\\-1&3&4\\1&-2&-3\end{pmatrix}$$

$\Leftarrow CA=C$

1. ב)

- נפתח את שני האגפים: אגף שמאל- $ACB=(AC)B=(A)B=AB=0$ (כי $AC=A$). אגף ימין- $CBA=C(BA)=C(0)=0$. (כי $CA=C$).

  $\Leftarrow$ $ACB=0=CBA$.
- $(A-B)(B+A)=(A-B)\cdot B+(A-B)\cdot A=AB-B^2+A^2-BA=A^2+AB-BA-B^2$

  מאחר ש- $AB=BA=0$ נקבל A^2-B^2 .
- צ"ל $(A+B)^2=A^2+B^2$, וגם $(A-B)^2=A^2+B^2$.

$\left(A+B\right)^2 = A^2 + BA + AB + B^2 = A^2 + B^2$ (כי- $AB = BA = 0$).

$\left(A-B\right)^2 = A^2 - BA - AB + B^2 = A^2 + B^2$ (כי- $AB = BA = 0$) .

2. א) סכום שתי מטריצות משולשות מאותו סדר הוא מטריצה משולשת. <u>הטענה אינה</u>

<u>נכונה</u> נציג דוגמא נגדית- $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ זוהי מטריצה משולשית תחתונה,

$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ זוהי מטריצה משולשית עליונה. אבל $A + b = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ אינה

מטריצה משולשית, כי לא מתקיים שכל איבריה מעל (ולא מתחת) לאלכסון שווים

לאפס.

ב) סכום שתי מטריצות משולשות עליונות מאותו סדר הוא מטריצה משולשת עליונה.

<u>הטענה נכונה</u> . נוכיח : תהיינה $A = \left(a_{ij}\right), B = \left(b_{ij}\right)$ מטריצות ריבועיות משולשיות

עליונות מסדר n . אזי $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$ ו- $B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & b_{22} & b_{23} & \cdots & b_{2n} \\ 0 & 0 & b_{33} & \cdots & b_{3n} \\ & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & b_{nn} \end{bmatrix}$ ואז

$A + B = \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & a_{13}+b_{13} & \dots & a_{1n}+b_{1n} \\ 0 & a_{22}+b_{22} & a_{23}+b_{23} & \dots & a_{2n}+b_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33}+b_{33} & \dots & a_{3n}+b_{3n} \\ . & & & & . \\ . & & & & . \\ . & & & & . \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn}+b_{nn} \end{bmatrix}$, לכן $A + B$ משולשית

עליונה.

ג) סכום של שתי מטריצות אלכסוניות מאותו סדר הוא מטריצה אלכסונית. <u>הטענה נכונה</u>

אם A, ו- B מטריצות ריבועיות אלכסוניות מסדר n , אז

$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & 0 \\ & & & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$, ו- $B = \begin{bmatrix} b_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & b_{22} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & b_{33} & \dots & 0 \\ & & & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & b_{nn} \end{bmatrix}$,

וסכומן- $A+B=\begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22}+b_{22} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33}+b_{33} & \dots & 0 \\ & & & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn}+b_{nn} \end{bmatrix}$

ד) סכום של שתי מטריצות יחידה מאותו סדר הוא מטריצת יחידה. **הטענה אינה נכונה**.

דוגמא נגדית- n=2 : $\begin{pmatrix}2&0\\0&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$, וזו אינה מטריצת היחידה.

3. $A=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$ ונסמן : $B=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$. נחשב את AB ואת BA :

$AB=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a+c&b+d\\c&d\end{pmatrix}$.

$BA=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&a+b\\c&c+d\end{pmatrix}$. צריך להתקיים $AB=BA$, כלומר:

$\begin{pmatrix}a+c&b+d\\c&d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&a+b\\c&c+d\end{pmatrix}$. מקבלים את מערכת המשוואות הבאה: $\begin{cases}a=a+c\\a+b=b+d\\c=c\\c+d=d\end{cases}$

נפשט: $\begin{cases}0=c\\a=d\\c=c=0\\c=0\end{cases}$, כלומר- לא התקבלו דרישות כלשהן על b , וצריך להתקיים: $\begin{cases}a=d\\c=0\end{cases}$, על

כן מדובר בקבוצה : $\left\{\begin{pmatrix}a&b\\0&a\end{pmatrix},\ a,b\in\Re\right\}$.

4. עלינו למצוא מטריצה המקיימת : $A^2=\begin{pmatrix}1&3\\0&1\end{pmatrix}$. נסמן- $A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$, ונחשב את A^2 :

$A^2=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a^2+bc&ab+bd\\ac+dc&cb+d^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a^2+bc&b(a+d)\\c(a+d)&cb+d^2\end{pmatrix}$ צריך להתקיים :

$\begin{pmatrix}1&3\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a^2+bc&b(a+d)\\c(a+d)&cb+d^2\end{pmatrix}$, כלומר-

$$\begin{cases} a^2+bc=1 \\ b(a+d)=3 \\ c(a+d)=0 \\ bc+d^2=1 \end{cases} \Leftarrow$$ מהמשוואה השלישית נובע כי $c=0$, או $a=-d$.

(לא נבדוק את כל הפתרונות של מערכת המשוואות, היות שמטרתנו למצוא מטריצה אחת המקיימת את הנדרש, ולא את אוסף כל המטריצות. לכן בכל הזדמנות נוכל לבחון רק מקרה אחד, ולא את כל המקרים.)

אם c=0 , אזי מהמשוואה הראשונה והרביעית נקבל: $a^2=1,\ \ d^2=1$, כלומר- $a,d=\pm1$.

מהמשוואה השנייה נובע כי לא יתכן של- a ול- d סימנים מנוגדים (כי אז 0=3). לכן נוכל לקחת למשל- $a=d=1$, כאמור- $c=0$, ומהצבה במשוואה השנייה נקבל: $b(1+1)=3$,

כלומר- $b=\frac{3}{2}$. אז- $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 3/2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, ואכן :

$$A^2=\begin{pmatrix} 1 & 3/2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 3/2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

הערה: קיימות מטריצות נוספות, התשובה אליה הגעת יכולה להיות שונה, ובכל זאת נכונה.

5. נחפש מטריצה מהצורה: $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ המקיימת $A^2=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

$A^2=\begin{pmatrix} a^2+bc & b(a+d) \\ c(a+d) & cb+d^2 \end{pmatrix}$, וכך נקבל את מערכת המשוואות הבאה : $\begin{cases} a^2+bc=0 \\ b(a+d)=0 \\ c(a+d)=0 \\ bc+d^2=1 \end{cases}$

מהמשוואה השלישית אנו מקבלים : $c=0$ או- $a=-d$ (כאן אנו בודקים את כל המקרים, בעודנו מחפשים אחר מטריצה המקיימת את הנדרש.)

מקרה א'- $c=0$: ממשוואה 1- מקבלים : $a^2=0$, כלומר- $a=0$. מערכת המשוואות המתקבלת ממשוואות 2, 4 : $\begin{cases} bd=0 \\ d^2=1 \end{cases}$, כלומר- $b=0$, ו- $d=\pm1$ **.**

כלומר- המטריצות שבהן - $a=b=c=0,\ d=\pm1$ מקיימות את הנדרש. עד כה מצאנו, אם כן, שתי מטריצות המקיימות את תנאי התרגיל , והן - $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, ו- $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. ניתן להפסיק כאן, שכן השאלה הייתה "האם קיימת מטריצה ..." ותשובתנו הייתה- כן.

אבל – לשם התרגול נוסיף ונבדוק את המקרה השני:

מקרה ב' $a=-d$: ממשוואה 1 מקבלים : $a^2=-bc$, כלומר- $bc=-a^2$, לכן נציב במשוואה הרביעית $-a^2$ במקום bc , ואז $-a^2+d^2=1$. אבל- $a^2=d^2 \Leftarrow a=-d$, ואז אנו מקבלים : 0=1 . על כן- <u>מקרה ב' לא אפשרי</u>, ומכאן- אין מטריצות נוספות המהוות פתרון למערכת המשוואות, פרט לאלה שמצאנו במקרה א'.

6. עלינו להראות כי $(ABA)^t=ABA$.

(תזכורת : אם A ו- B מטריצות מגדלים מתאימים להכפלה, אזי $(*)$ $(AB)^t=B^tA^t$)

$$(ABA)^t=((AB)(A))^t=\underset{\text{לפי }(*)}{\underbrace{A^t(AB)^t}}=\underset{\text{לפי }(*)}{\underbrace{A^tB^tA^t}}=\underset{\text{A, B סימטריות.}}{\underbrace{ABA}}$$

7. עלינו להראות כי $(A^tB-B^tA)^t=-(A^tB-B^tA)$. ראשית- הגדלים מתאימים להכפלה, כי - A היא מגודל $m\times n$ ולכן- A^t היא מגודל- $n\times m$. (וכנ"ל לגבי B).

$$(A^tB-B^tA)^t=(A^tB)^t-(B^tA)^t=B^tA^{t^t}-A^tB^{t^t}=B^tA-A^tB=-(A^tB-B^tA)$$

8. הטענה אינה נכונה. דוגמא נגדית : $A=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$. אז $tr(A)=tr(B)=1$,

ולכן- $tr(A)\cdot tr(B)=1$, אבל מאחר ש- $AB=[0]$, נובע כי $tr(AB)=0$.

החוג למדעי המחשב

סמסטר א' תשס"ה

תרגיל בית מספר 4

1. הוכח כי אם A מטריצה סימטרית, אזי A^2 מטריצה סימטרית.

2. א) קבע את דרגת המטריצה $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & -4 & 3 \\ 2 & 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ ב) העבר לצורה מצומצמת שורות.

3. עבור אילו ערכים של $a \in \Re$ המטריצה הבאה הפיכה: $\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$?

4. יהיו $a,b,c \in \Re$. דרג את המטריצה הבאה וקבע מהי דרגתה:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b+c & c+a & a+b \\ bc & ac & ab \end{pmatrix}$$ (יש מספר אפשרויות) .

5. תהי A המטריצה : $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. חשב את A^{-1} .

6. תהי $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. מצא שלם k המקיים : $A^k = A^{-1}$.

7. הראה כי אם A מטריצה הפיכה, אזי A^t הפיכה .

8. כזכור- מטריצה אלכסונית היא מהצורה : $\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$. מתי מטריצה אלכסונית היא הפיכה? מצא את המטריצה ההופכית.

בהצלחה!

תאריך הגשה אחרון: 18.11.04

פתרונות לתרגיל בית 4

שאלה 1

אם $A=(a_{ij})_{1\le i,j\le n}$ מטריצה סימטרית, אזי לכל $1\le i,j\le n$ מתקיים $a_{ij}=a_{ji}$.

נסמן $A^2=C=(c_{ij})_{1\le i,j\le n}$.

נזכיר את הגדרת כפל מטריצות : (תהיינה $A_{k\times n},\ B_{n\times t}$ מטריצות , אזי מטריצת המכפלה $C=AB$, $C_{k\times t}=\lfloor c_{ij}\rfloor$ מוגדרת ע"י $c_{ij}=\sum_{h=1}^{n}a_{ih}b_{hj}$ לכל $1\le i\le k$, ולכל $1\le j\le t$).

עלינו להראות כי המטריצה $A^2=C=(c_{ij})_{1\le i,j\le n}$ סימטרית, כלומר ש $c_{ij}=c_{ji}$ לכל $1\le i,j\le n$. על פי ההגדרה-

$$c_{ij}=\sum_{h=1}^{n}a_{ih}b_{hj}=\sum_{h=1}^{n}a_{ih}a_{hj}=\sum_{h=1}^{n}a_{hi}a_{jh}=\sum_{h=1}^{n}a_{jh}a_{hi}=c_{ji}$$

A סימטרית

אצלנו B=A , ולכן- $a_{ij}=b_{ij}$, לכל $1\le i,j\le n$.

לכן - $A^2=C=(c_{ij})_{1\le i,j\le n}$ סימטרית .

שאלה 2:

א)ראשית נדרג את המטריצה: $\begin{pmatrix}0&1&3&-2\\2&1&-4&3\\2&3&2&-1\end{pmatrix}$: נתחיל בעמודה השמאלית

$$\begin{pmatrix}0&1&3&-2\\2&1&-4&3\\2&3&2&-1\end{pmatrix}\xrightarrow{R_1\leftrightarrow R_2}\begin{pmatrix}2&1&-4&3\\0&1&3&-2\\2&3&2&-1\end{pmatrix}\xrightarrow{R_3\leftarrow R_3-R_1}\begin{pmatrix}2&1&-4&3\\0&1&3&-2\\0&2&6&-4\end{pmatrix}$$

נעבור לטפל בעמודה השנייה משמאל-

$$\begin{pmatrix}2&1&-4&3\\0&1&3&-2\\0&2&6&-4\end{pmatrix}\xrightarrow{R_3\leftarrow R_3-2R_2}\begin{pmatrix}2&1&-4&3\\0&1&3&-2\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

עד כה התקבלה מטריצה מצורה מדורגת. אנו רואים כי הדרגה, כלומר מספר השורות השונות מאפס לאחר דירוג הוא 2, ולכן $rank(A)=2$.

ב) נעביר את המטריצה $\begin{pmatrix}2&1&-4&3\\0&1&3&-2\\0&0&0&0\end{pmatrix}$ לצורה מצומצמת שורות : ע"י כך שנדאג שכל

מקדם מוביל יהיה שווה ל- 1, ויהיה היחיד השונה מאפס בעמודתו.

המקדם המוביל בשורה הראשונה הוא 2. נכפיל את השורה הראשונה ב- $\frac{1}{2}$.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -4 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \leftarrow \frac{1}{2}R_1} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -2 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

. כעת- המקדם המוביל הוא ממילא היחיד השונה מאפס בעמודתו.

המקדם המוביל בשורה השנייה- הינו 1. לכן נותר רק לדאוג כי הוא יהיה היחיד השונה מאפס בעמודתו. כלומר- עלינו לאפס את האיבר שמעליו.

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -2 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \leftarrow R_1 - \frac{1}{2}R_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3.5 & 2.5 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

המטריצה מצומצמת השורות היא - $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3.5 & 2.5 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

שאלה 3

נדרג את המטריצה : $\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$: נטפל תחילה בטור הראשון. ראשית, כדי להימנע מחלוקה אסורה באפס, נחליף את השורות, כך שהשורה הראשונה תכיל מספר, ולא פרמטר.

$$\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

. כעת : נאפס את איברים a_{21}, a_{31} :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3 \leftarrow R_3 - a\cdot R_1]{R_2 \leftarrow R_2 - R_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & a-1 & 1-a \\ 0 & 1-a & 1-a^2 \end{pmatrix}$$

. כעת נטפל בעמודה השנייה, כלומר- נאפס את a_{32}:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & a-1 & 1-a \\ 0 & 1-a & 1-a^2 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \leftarrow R_3 + R_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & a-1 & 1-a \\ 0 & 0 & -a^2-a+2 \end{pmatrix}$$

על מנת שהמטריצה תהיה הפיכה דרגתה צריכה להיות 3. כלומר- איברי האלכסון צריכים להיות שונים מ- 0 : כלומר- (*) $-a^2-a+2 \neq 0$, וגם (**) $a-1 \neq 0$.

מ- (*) אנו מקבלים $a \neq 1,-2$, ומ- (**) אנו מקבלים $a \neq 1$. לכן בסה"כ המטריצה תהייה הפיכה עבור $a \neq 1,-2$.

שאלה 4

ראשית- נדרג את המטריצה : $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b+c & c+a & a+b \\ bc & ac & ab \end{pmatrix}$. נתחיל עם הטור השמאלי:

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b+c & c+a & a+b \\ bc & ac & ab \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3 \leftarrow R_3 - (bc)R_1]{R_2 \leftarrow R_2 - (b+c)R_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & a-b & a-c \\ 0 & c(a-b) & b(a-c) \end{pmatrix}$. נעבור אל הטור השני:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & a-b & a-c \\ 0 & c(a-b) & b(a-c) \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \leftarrow R_3 - c \cdot R_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & a-b & a-c \\ 0 & 0 & (b-c)(a-c) \end{pmatrix}$$

כעת נבחן את האפשרויות השונות עבור הדרגה, ע"י כך שנבדוק את האפשרויות לכך שמתאפס איבר על האלכסון: איבר האלכסון בשורה הראשונה שונה מ- 0 .

- נסתכל על איבר האלכסון בשורה השנייה: $a-b=0 \quad \Leftarrow \quad a=b$.

במקרה זה המטריצה תראה כך : $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & a-c \\ 0 & 0 & (a-c)^2 \end{pmatrix}$. נבצע : $R_3 \leftarrow R_3 - (a-c)R_2$, ואז

נקבל : $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & a-c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. כעת : יש לנו שני מקרים - $a \neq c$ או $a=c$

אם $a=c$ מקבלים $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, ואז הדרגה היא 1. כלומר- כאשר $a=b=c$ הדרגה היא 1.

אם $a \neq c$ אזי הדרגה היא 2, כי $a_{23} = a-c \neq 0$. לכן- כאשר $c \neq a = b$ הדרגה היא 2.

- נסתכל על איבר האלכסון בשורה השלישית : $(b-c)(a-c)$. איבר זה מתאפס כאשר- $a=c$ או $b=c$

- אם $a=c$ אז מקבלים - $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & a-b & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, ואז- אם a=b הדרגה היא 1 (מקרה זה כבר נספר קודם לכן - $a=b=c$) , ואחרת- 2. לכן אם $b \neq a = c$ הדרגה היא 2.

- אם $b=c$, מקבלים - $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & a-b & a-b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, ושוב- אם a=b נקבל דרגה 1, ואחרת- הדרגה היא 2. כלומר- כאשר- $a \neq b = c$ הדרגה היא 2.

סיכום של כל המקרים :

דרגה 0	דרגה 1	דרגה 2	דרגה 3
אין אפשרות כזו	$a=b=c$	$b \neq a = c$	$c \neq a \neq b$
		$a \neq b = c$	
		$c \neq a = b$	

שאלה 5

נחשב את המטריצה ההופכית של המטריצה $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$: העמודה השמאלית תקינה.

לכן נעבור אל העמודה השנייה.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{l_1 \leftarrow l_1 - 2\cdot l_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -7 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

נאפס את האיברים שמעל ל- 1 בעמודה הימנית: את a_{23} :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -7 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{l_2 \leftarrow l_2 - 2\cdot l_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -7 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

נאפס את a_{13} :

$$\xrightarrow{l_1 \leftarrow l_1 + 7\cdot l_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -2 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

על כן - $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 7 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

שאלה 6

נמצא את המטריצה ההופכית של A ע"י בעזרת המטריצה המורחבת $(A|I)$: (נבצע פעולות מותרות כדי להפוך את המטריצה שמשמאל למטריצת היחידה. כל פעולה שתתבצע על המטריצה משמאל- תבוצע במקביל על המטריצה מימין, עד שהמטריצה משמאל תהפוך ל- I. המטריצה שתתקבל מימין תהיה המטריצה ההופכית ל- A.)

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

- נתחיל מהטור השמאלי של A: יש לדאוג שהאפסים יהיו מתחת לאיברים השונים מאפס. לכן- נחליף את השורה הראשונה בשלישית:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{l_1 \leftrightarrow l_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

. כעת- נעבור לטור השני, ונחליף את השורה השנייה בשלישית, שוב- כדי שאיברים שהינם אפס ימוקמו מתחת לאיברים שאינם אפס:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{l_2 \leftrightarrow l_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

, כעת קבלנו משמאל את מטריצת היחידה, וכך מקבלים ש- $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

נמצא k שעבורו- $A^k = A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

עבור $k=1$, השוויון אינו מתקיים.

עבור $k=2$ נקבל ש- $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = A^{-1}$, לכן $k=2$ מקיים את הנדרש. (מבחינת השאלה, ניתן להפסיק כאן, היות שמצאנו K כנדרש.)

נבדוק מה קורה עבור $k=3$: $A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

עבור $k=4$ מקבלים: $A^4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

עבור $k=5$ מקבלים : $\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}$ $A^5 =$.

בגלל שורות האפסים 1, ו- 3, אנו מקבלים שבכל הכפלה נוספת, השורות 1, ו- 3 תשארנה שורות אפסים. בשורה השנייה- ייתכנו 1- ים , כל פעם במקום אחר. כלומר- אין ערך נוסף של k שעבורו שוב נקבל את המטריצה $A^{-1}=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$

שאלה 7

תהי A מטריצה הפיכה. עלינו להראות כי המטריצה A^t הפיכה. כלומר- עלינו למצוא מטריצה C כך ש- $A^t\cdot C=C\cdot A^t=I$. ניקח את C להיות $C=\left(A^{-1}\right)^t$.

(A^{-1} קיימת , כי A הפיכה).

כעת : $A^t\cdot C=A^t\cdot\left(A^{-1}\right)^t=\left(A^{-1}\cdot A\right)^t=\left(I\right)^t=I$

$\downarrow$

תזכורת : $B^tA^t=\left(AB\right)^t$

וכמו כן : $C\cdot A^t=\left(A^{-1}\right)^t\cdot A^t=\left(A\cdot A^{-1}\right)^t=\left(I\right)^t=I$.

לכן- C הנ"ל משמשת כמטריצה ההופכית של A^t , ולכן A^t הפיכה.

מסקנה:

$\left(A^t\right)^{-1}=\left(A^{-1}\right)^t$.

שאלה 8

מטריצה אלכסונית היא מהצורה- $A=\begin{bmatrix}a_{11}&0&0&\dots&0\\0&a_{22}&0&\dots&0\\0&0&a_{33}&\dots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&0&\dots&a_{nn}\end{bmatrix}$. לפי משפט מטריצה מסדר n הפיכה אמ"ם דרגתה n . כלומר- אין לה אף שורת אפסים.

במקרה שלנו השורות מכילות אפסים בלבד, פרט לאיבר על האלכסון. לכן- שורת אפסים תתקבל במקרה שאחד מאיברי האלכסון יתאפס.

סה"כ : המטריצה תהיה הפיכה אמ"ם לכל $1 \le i \le n \quad a_{ii} \neq 0,$.

במקרה זה המטריצה ההופכית תהיה : $A^{-1} = \begin{bmatrix} a_{11}^{-1} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22}^{-1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33}^{-1} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn}^{-1} \end{bmatrix}$, כיוון ש-

$A \cdot A^{-1} = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_{11}^{-1} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22}^{-1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33}^{-1} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn}^{-1} \end{bmatrix}$, וניתן לראות כי

מתקבלת מטריצה אלכסונית חדשה, שאיברי האלכסון הם : $a_{ii} \cdot a_{ii}^{-1} = 1$, כלומר-

$A \cdot A^{-1} = I$.

הסבר נוסף, ויותר מפורט- על פי הגדרת כפל מטריצות, אם $C_{n \times n} = \lfloor c_{ij} \rfloor$ היא מטריצת

המכפלה של $C = A \cdot A^{-1}$, אזי לכל $1 \le i, j \le n$ האיבר c_{ij} מוגדר כך : $c_{ij} = \sum_{h=1}^{n} a_{ih} b_{hj}$, כאשר

$A = (a_{ij}),\ \ A^{-1} = (b_{ij})$ מאחר ש- A ו- A^{-1} אלכסוניות מקבלים ש- c_{ij} יהיה שונה מאפס אמ"ם

$a_{ih} \neq 0$, וגם $b_{hj} \neq 0$ וזה מתקיים אמ"ם $i = j = h$, ואז $c_{ij} = \begin{cases} 0 & i \neq j \text{ אם} \\ a_{ii} b_{ii} & i = j \text{ אם} \end{cases}$, ומאחר ש-

$b_{ii} = a_{ii}^{-1}$, לכל $1 \le i \le n$, נקבל ש- $c_{ii} = a_{ii} \cdot a_{ii}^{-1} = 1$, כלומר- $C = I$.

החוג למדעי המחשב,
אלגברה ליניארית
סמסטר א' תשס"ה

תרגיל בית 5

1. פתור את מערכת המשוואות הבאה בעזרת שיטת גאוס- ג'ורדן: $\begin{cases} x-2y+3z=-1 \\ 2x-y+2z=2 \\ 3x+y+2z=3 \end{cases}$.

2. מצא את כל המספרים $c \in R$ כך שלמערכת המשוואות : $\begin{cases} x_1+x_2-x_3=1 \\ x_1+c\cdot x_2+3x_3=2 \\ 2x_1+3x_2+c\cdot x_3=3 \end{cases}$:

- קיים פתרון יחיד
- קיימים אינסוף פתרונות
- אין פתרון

3. נתונה מערכת משוואות בנעלמים x,y,z : $\begin{cases} x+2y+3z=1 \\ 3x+4y+5z=m \\ 4x+5y+az=n \end{cases}$

א) עבור איזה a יש פתרון לא טריוויאלי למערכת ההומוגנית המתאימה ?

ב) עבור a שמצאת בסעיף א'- מהם ערכי m,n כך שיהיה פתרון למערכת הנתונה ?

4. תן פתרון כללי למערכת : $\begin{cases} x+y+z+w=0 \\ x+3y+2z+4w=0 \\ 2x+z-w=0 \end{cases}$

5. פתור את מערכת המשוואות הליניאריות (המרוכבות) הבאה בעזרת שיטת גאוס :

$$\begin{cases} (3-i)z_1+(4+2i)z_2=2+6i \\ (4+2i)z_1+(-2-3i)z_2=5+4i \end{cases}$$

<u>תאריך הגשה אחרון</u> : 25.11.04

ב-ה-צ-ל-ח-ה !!

פתרון תרגיל בית 5

שאלה 1 נרשום את המערכת בצורה מטריציונית : $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right)$. נדרג את המטריצה:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3 \leftarrow R_3 - 3R_1]{R_2 \leftarrow R_2 - 2R1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & 7 & -7 & 6 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 \leftarrow R_3 - \frac{7}{3}R_2}$$

$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 7 & -10 \end{array}\right)$. כעת המטריצה מדורגת, ועלינו להביאה להיות מצומצמת שורות,

כלומר- שכל איבר מוביל בה יהיה 1, וכן- יחיד בעמודתו. נדאג לכך ש- $a_{22} = 1, \quad a_{33} = 1$:

$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 7 & -10 \end{array}\right) \xrightarrow[R_2 \leftarrow \frac{1}{3}R_2]{R_3 \leftarrow \frac{1}{7}R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & \frac{-4}{3} & \frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-10}{7} \end{array}\right)$. כעת נדאג לאפס את האיברים

שמעל האיברים המובילים- $a_{22} \ , \ a_{33}$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & \frac{-4}{3} & \frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-10}{7} \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 \leftarrow R_1 + 2R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{5}{3} \\ 0 & 1 & \frac{-4}{3} & \frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-10}{7} \end{array}\right) \xrightarrow[R_1 \leftarrow R_1 - \frac{1}{3}R_3]{R_2 \leftarrow R_2 + \frac{4}{3}R_3}$$

$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{15}{7} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{4}{7} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-10}{7} \end{array}\right)$. קבלנו את הצורה המצומצמת שורות של המטריצה המורחבת המייצגת

את המערכת, לכן- פתרון למערכת הוא : $z = -\frac{10}{7}$, $y = -\frac{4}{7}$, $x = \frac{15}{7}$. או בצורה וקטורית-

$\left(\frac{15}{7}, \frac{-4}{7}, \frac{-10}{7}\right)^t$ הוא הפתרון היחיד של המערכת.

שאלה 2 נאפס את האיברים בשורה השנייה והשלישית, של העמודה הראשונה:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & c & 3 & 2 \\ 2 & 3 & c & 3 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3 \leftarrow R_3 - 2R_1]{R_2 \leftarrow R_2 - R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & c-1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & c+2 & 1 \end{array}\right)$$

כעת נרצה לאפס את האיבר ה- a_{32}. לכאורה עלינו לבצע $R_3 \leftarrow R_3 - \frac{1}{c-1} R_2$. אבל- מאחר

ש- c פרמטר, ערכו יכול להיות שווה ל- 1, ואז הביטוי $1 - c = 0$. כדי להימנע מפעולה

אסורה של חילוק ב- 0 נבצע החלפה של השורה השנייה והשלישית:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & -1 & 1\\ 0 & c-1 & 4 & 1\\ 0 & 1 & c+2 & 1\end{array}\right)\xrightarrow{R_2\leftrightarrow R_3}\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & c+2 & 1\\ 0 & c-1 & 4 & 1\end{array}\right)$$

. כעת ביצוע של הפעולה:

$R_3 \leftarrow R_3-(c-1)R_2$ מותר, שכן אם $1-c=0$ למעשה ביצענו $R_3 \leftarrow R_3$, כלומר לא בצענו דבר.

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & c+2 & 1\\ 0 & c-1 & 4 & 1\end{array}\right)\xrightarrow{R_3\leftarrow R_3-(c-1)R_2}\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & c+2 & 1\\ 0 & 0 & 4-(c-1)(c+2) & 2-c\end{array}\right)$$

נפשט את האיבר a_{33} ונקבל : $a_{33}=4-(c-1)(c+2)=-c^2-c+6=(-c+2)(c+3)$

כלומר- המטריצה המורחבת לאחר דירוג תראה כך :
$$\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & c+2 & 1\\ 0 & 0 & (c+3)(-c+2) & 2-c\end{array}\right)$$

כעת נבחן מהו מספר הפתרונות למערכת :

<u>פתרון יחיד :</u> מתקבל כאשר $Rank(A)=3$, כאשר A היא מטריצת המקדמים.

הדרגה תהיה 3 אם כל איברי האלכסון יהיו שונים מאפס. איבר האלכסון היחיד המכיל ביטוי פרמטרי הוא a_{33} , ולכן - $a_{33}\neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad (-c+2)(c+3)\neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad c\neq 2,-3$.

<u>אינסוף פתרונות:</u> מצב המתקבל כאשר $Rank(A)=Rank(A|b)<3$, כלומר- כאשר כל האיברים בשורה האחרונה במטריצת המקדמים המורחבת מתאפסים :

$$\begin{cases} c-2=0 \\ (-c+2)(c+3)=0\end{cases} \Leftarrow c=2 \text{ וגם } (c=2, \text{ או } c=-3) \quad \Leftarrow \quad c=2 \; .$$

<u>אין פתרון</u>: מצב המתקבל כאשר: $Rank(A)<Rank(A|b)$, כלומר- איברי המטריצה A, מטריצת המקדמים מתאפסים בשורה האחרונה, אבל האיבר האחרון בוקטור המקדמים החופשיים – שונה מאפס :
$$\begin{cases} c-2\neq 0 \\ (-c+2)(c+3)=0\end{cases} \Leftarrow \begin{cases} c\neq 2 \\ (-c+2)(c+3)=0\end{cases} \Leftarrow$$

$c\neq 2$ וגם $(c=2, \text{ או } c=-3)$, כלומר- $c=-3$.

<u>**שאלה 3**</u> א) המערכת ההומוגנית המתאימה היא : $\begin{cases} x+2y+3z=0 \\ 3x+4y+5z=0 \\ 4x+5y+az=0\end{cases}$,

כלומר- $\begin{pmatrix}1&2&3\\3&4&5\\4&5&a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$. נדרג את מטריצת המקדמים: $\begin{pmatrix}1&2&3\\3&4&5\\4&5&a\end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\3&4&5\\4&5&a\end{pmatrix}\xrightarrow[R_3\leftarrow R_3-4R_1]{R_2\leftarrow R_2-3R_1}\begin{pmatrix}1&2&3\\0&-2&-4\\0&-3&a-12\end{pmatrix}\xrightarrow{R_3\leftarrow R_3-\frac{3}{2}R_2}\begin{pmatrix}1&2&3\\0&-2&-4\\0&0&a-6\end{pmatrix}$$

המטריצה המדורגת היא, אם כן- $\begin{pmatrix}1&2&3\\0&-2&-4\\0&0&a-6\end{pmatrix}$. מתי נקבל פתרון טריוויאלי למערכת ?

אם $a-6\neq 0$, מקבלים שעל מנת שיתקיים $(a-6)z=0$ *בהכרח* $z=0$. מהצבה בכל אחת מהמשוואות העליונות (שורה 1, 2) מקבלים- $x=y=0$, כלומר- נקבל את הפתרון הטריוויאלי.

לכן : עבור $a=6$ אנו מקבלים פתרון לא טריוויאלי למערכת ההומוגנית , כי כך z יכול להיות מספר כלשהו. כלומר- אנו חופשיים לבחור את ערכו של z , והערכים של x- ו y ייקבעו כתוצאה מכך.

ב) נציב $a=6$ במערכת המשוואות המקורית - $\begin{cases}x+2y+3z=1\\3x+4y+5z=m\\4x+5y+6z=n\end{cases}$. נדרג את המטריצה המורחבת :

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&3&1\\3&4&5&m\\4&5&6&n\end{array}\right)\xrightarrow[R_3\leftarrow R_3-4R_1]{R_2\leftarrow R_2-3R_1}\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&3&1\\0&-2&-4&m-3\\0&-3&-6&n-4\end{array}\right)\xrightarrow{R_3\leftarrow R_3-\frac{3}{2}R_2}$$

$\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&3&1\\0&-2&-4&m-3\\0&0&0&n+\frac{1-3m}{2}\end{array}\right)$. כעת כדי שיהיה פתרון צריך להתקיים : $n+\frac{1-3m}{2}=0$ (אחרת- אין פתרון). כלומר- $\left\{(m,n):\ n=\frac{3m-1}{2}\right\}$ הוא האוסף שעבורו יש פתרון למשוואה. כלומר- כל זוג מהצורה (m,n) המקיים את המשוואה: $2n-3m=1$.

<u>שאלה 4</u> מטריצת המקדמים של המערכת ההומוגנית הנ"ל היא : $\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&3&2&4\\2&0&1&-1\end{pmatrix}$.נדרג אותה-

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3 \leftarrow R_3 - 2R_1]{R_2 \leftarrow R_2 - R_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & -1 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \leftarrow R_3 + R_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

כעת- נעביר את המטריצה להיות מצומצמת שורה-

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \leftarrow \frac{1}{2} \cdot R_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

, נאפס את האיבר מעל לאיבר המוביל בשורה השנייה-

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \leftarrow R_1 - R_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

<u>הערה-</u> אין הכרח להעביר את המטריצה לצורה מצמצמת שורות.

מקבלים $y + \frac{z}{2} + \frac{3w}{2} = 0$, כלומר- $y = -\frac{z}{2} - \frac{3w}{2}$, וכן - $x = -\frac{z}{2} + \frac{w}{2}$.

לכן, אם נציב $z = t, w = s$ (נובע כי יש לנו שתי דרגות חופש) מקבלים: $x = -\frac{t}{2} + \frac{s}{2}$, $y = -\frac{t}{2} - \frac{3s}{2}$. הפתרון הכללי למערכת הוא: $\left(-\frac{t}{2} + \frac{s}{2},\ -\frac{t}{2} - \frac{3s}{2},\ t,\ s\right)^t$. (ונשים ♥ כי הפתרון הטריוויאלי ביניהם, ואין זה מפתיע, שכן המערכת טריוויאלית.)

<u>**שאלה 5**</u> נכתוב את המערכת בצורה מטריציונית: $\left(\begin{array}{cc|c} 3-i & 4+2i & 2+6i \\ 4+2i & -2-3i & 5+4i \end{array}\right)$. נדרג:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 3-i & 4+2i & 2+6i \\ 4+2i & -2-3i & 5+4i \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \leftarrow R_2 - \frac{4+2i}{3-i} R_1} \left(\begin{array}{cc|c} 3-i & 4+2i & 2+6i \\ 0 & * & ** \end{array}\right)$$

כאשר- $* = -2-3i - \frac{(4+2i)^2}{3-i} = -2-3i - \frac{12+16i}{3-i} = -2-3i - \frac{12+16i}{3-i} \cdot \frac{3+i}{3+i}$

$\downarrow$

הכפלה בצמוד $= -2-3i - \frac{20+60i}{10} = -2-3i-2-6i = -4-9i$

ו- $** = 5+4i - \frac{4+2i}{3-i} \cdot (2+6i) = 5+4i - \frac{-4+28i}{3-i} = 5+4i + \frac{4-28i}{3-i} \cdot \frac{3+i}{3+i}$

$= 5+4i + \frac{40-80i}{10} = 5+4i+4-8i = 9-4i$.

כלומר- המטריצה המדורגת נראית כך: $\left(\begin{array}{cc|c} 3-i & 4+2i & 2+6i \\ 0 & -4-9i & 9-4i \end{array}\right)$

על כן מקבלים- $-(4+9i)z_2 = 9-4i$, כלומר- $z_2 = \frac{9-4i}{-(4+9i)} = \frac{-9+4i}{4+9i} =$

$$z_2 = \frac{9-4i}{-(4+9i)} = \frac{-9+4i}{4+9i} = \frac{-9+4i}{4+9i} \cdot \frac{4-9i}{4-9i} = \frac{-36+81i+16i+36}{16+81} = \frac{97i}{97} = i$$

וכן- $(3-i)z_1 + (4+2i)i = 2+6i$

$\hookleftarrow$ $z_2 = i$

כלומר- $(3-i)z_1+4i-2=2+6i$ או - $(3-i)z_1=4+2i$, ולכן

$$z_1=\frac{4+2i}{3-i}\ \frac{4+2i}{3-i}\cdot\frac{3+i}{3+i}=\frac{12+4i+6i-2}{10}=\frac{10+10i}{10}=1+i\ .$$

לסיכום- $z_2=i$ $z_1=1+i$

תרגיל בית 6- דטרמיננטים (להגשה עד- 2.12.04)

1. חשב א) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$ ב) $\begin{vmatrix} \sin\alpha+\sin\beta & \cos\beta+\cos\alpha \\ \cos\beta-\cos\alpha & \sin\alpha-\sin\beta \end{vmatrix}$

2. יהי n שלם חיובי. נניח כי קיימת מטריצה A מסדר n של מספרים ממשיים כך ש- $A^2+I=[0]$, (כאשר I מטריצת היחידה, ו- $[0]$ היא מטריצת האפס.) הוכח כי n זוגי.

3. ידוע כי המספרים : 23028, 31882, 86469, 6327, 61902 מתחלקים כולם ב- 19. הראה בעזרת תכונות הדטרמיננט (ללא חישוב ישיר של ערכו) כי הדטרמיננט הבא- $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 & 2 & 8 \\ 3 & 1 & 8 & 8 & 2 \\ 8 & 6 & 4 & 6 & 9 \\ 0 & 6 & 3 & 2 & 7 \\ 6 & 1 & 9 & 0 & 2 \end{vmatrix}$ מתחלק אף הוא ב- 19 .

4. חשב את הדטרמיננט הבא : $\begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 1 & 0 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 1 & 2 & 0 & \cdots & n-1 & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & 0 & n \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & 0 \end{vmatrix}$.

5. תהיינה A, B מטריצות מסדר n , כך ש- $|A|=2, |B|=3$. חשב את הדטרמיננטים הבאים : $\det(A^2B^3)$, $\det(A^{-1}B^2)$, $\det((A^t)^2(B^t)^{-1})$.

6. ידוע כי : $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 2-x & \cdots & 1 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & n-x \end{vmatrix}=0$ מצא את x .

7. תהי A מטריצה אנטי סימטרית מסדר אי זוגי. האם המטריצה $(A^t)^7\cdot A^9$ הפיכה?

בהצלחה!

<u>פתרונות לתרגיל בית 6</u>

1. א) לחישוב $\begin{vmatrix}1&-1&1&1\\1&-1&-1&-1\\1&1&-1&-1\\1&1&1&-1\end{vmatrix}$ ביתר קלות- נבצע ראשית את הפעולה הבאה :

$R_1 \leftarrow R_1 + R_3$, ונקבל : $\begin{vmatrix}2&0&0&0\\1&-1&-1&-1\\1&1&-1&-1\\1&1&1&-1\end{vmatrix}$. נפתח את הדטרמיננט לפי השורה הראשונה,

ובעקבות כל האפסים מקבלים רק : $\begin{vmatrix}2&0&0&0\\1&-1&-1&-1\\1&1&-1&-1\\1&1&1&-1\end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix}-1&-1&-1\\1&-1&-1\\1&1&-1\end{vmatrix}$. נבצע את הפעולה

: $R_1 \leftarrow R_1 + R_3$ ונקבל : $2\begin{vmatrix}-1&-1&-1\\1&-1&-1\\1&1&-1\end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix}0&0&-2\\1&-1&-1\\1&1&-1\end{vmatrix} =$

נפתח לפי השורה הראשונה ונקבל - $= 2\begin{vmatrix}0&0&-2\\1&-1&-1\\1&1&-1\end{vmatrix} = 2\cdot(-2)\begin{vmatrix}1&-1\\1&1\end{vmatrix} = -4\cdot(1+1) = -8$

ב) $\begin{vmatrix}\sin\alpha+\sin\beta & \cos\beta+\cos\alpha\\ \cos\beta-\cos\alpha & \sin\alpha-\sin\beta\end{vmatrix}$

$$= (\sin\alpha+\sin\beta)(\sin\alpha-\sin\beta) - (\cos\beta-\cos\alpha)(\cos\beta+\cos\alpha)$$

$$\sin^2\alpha - \sin^2\beta - (\cos^2\beta - \cos^2\alpha) = \sin^2\alpha - \sin^2\beta - \cos^2\beta + \cos^2\alpha$$

$$= \underbrace{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha}_{1} - \underbrace{(\sin^2\alpha + \cos^2\beta)}_{1} = 1 - 1 = 0$$

2. נובע כי $A^2 = -I$. לכן $|A^2| = |-I|$. עפ"י החוק : $|A\cdot B| = |A|\cdot|B|$ מקבלים $|A^2| = |A|^2$.

נשים לב כי $-I = \begin{pmatrix}-1&0&0&\dots&0\\0&-1&0&\dots&0\\0&0&-1&\dots&0\\\vdots&&&\ddots&\vdots\\0&0&0&\dots&-1\end{pmatrix}$, ועל כן $|-I| = (-1)^n$. (מכיוון שהדטרמיננט

מתקבל ע"י הכפלת איברי האלכסון, אשר כל אחד מהם שווה ל- -1 , ויש n כאלה.)

עד כה מקבלים - $|A|^2=(-1)^n$. מאחר ש- $|A|$ מספר ממשי אי שלילי (במטריצה היו מספרים ממשיים בלבד), נובע כי בהכרח $(-1)^n$ חייב להיות אי שלילי, שכן אין פתרון למשוואה: $x^2=$ שלילי מעל הממשיים. כלומר- בהכרח- $(-1)^n=1$, וזה מתקיים אמ"ם n זוגי.

3. נחשב את $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 & 2 & 8 \\ 3 & 1 & 8 & 8 & 2 \\ 8 & 6 & 4 & 6 & 9 \\ 0 & 6 & 3 & 2 & 7 \\ 6 & 1 & 9 & 0 & 2 \end{vmatrix}$ בהסתמך על כך ש-

$23028=10000\cdot 2+1000\cdot 3+100\cdot 0+10\cdot 2+1\cdot 8$,

$31882=10000\cdot 3+1000\cdot 1+100\cdot 8+10\cdot 8+1\cdot 2$,

$86469=10000\cdot 8+1000\cdot 6+100\cdot 4+10\cdot 6+1\cdot 9$,

$6327=10000\cdot 0+1000\cdot 6+100\cdot 3+10\cdot 2+1\cdot 7$,

$61902=10000\cdot 6+1000\cdot 1+100\cdot 9+10\cdot 0+1\cdot 2$.

לפיכך- נבצע את הפעולה האלמנטרית הבאה:

$C_5 \leftarrow C_5+10C_4+100C_3+1000C_2+10000C_1$

כך אנו מקבלים: $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 & 2 & 23028 \\ 3 & 1 & 8 & 8 & 31882 \\ 8 & 6 & 4 & 6 & 86469 \\ 0 & 6 & 3 & 2 & 6327 \\ 6 & 1 & 9 & 0 & 61902 \end{vmatrix}$. על פי הנתון- כל אחד מהמספרים 23028, 31882, 86469, 6327, 61902 , הנמצאים בעמודה החמישית – מתחלק ב- 19. לכן ניתן לכתוב: $19\cdot\begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 & 2 & 23028:19 \\ 3 & 1 & 8 & 8 & 31882:19 \\ 8 & 6 & 4 & 6 & 86469:19 \\ 0 & 6 & 3 & 2 & 6327:19 \\ 6 & 1 & 9 & 0 & 61902:19 \end{vmatrix}$, כאשר כל המספרים בעמודה החמישית, ובכלל- במטריצה, הם שלמים. לכן- הדטרמיננטה הינו מהצורה: $19\cdot k$, כאשר k שלם, כלומר- הדטרמיננט מתחלק ב- 19 .

4. $\begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 1 & 0 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 1 & 2 & 0 & \cdots & n-1 & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & 0 & n \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & 0 \end{vmatrix}$. נחבר את השורה הראשונה לכל שורה אחרת :

$\begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 & 4 & \cdots & n-1 & n \\ 1 & 2 & 6 & 8 & \cdots & 2(n-1) & 2n \\ 1 & 4 & 3 & 8 & \cdots & 2(n-1) & 2n \\ 1 & 4 & 6 & 4 & \cdots & 2(n-1) & 2n \\ \vdots & & & & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 4 & 6 & 8 & \cdots & 2(n-1) & 2n \\ 1 & 4 & 6 & 8 & \cdots & 2(n-1) & n \end{vmatrix}$, נחסיר את השורה האחרונה מכל אחת מהשורות :

$\begin{vmatrix} -1 & -2 & -3 & -4 & \cdots & -(n-1) & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & n \\ 0 & 0 & -3 & 0 & \cdots & 0 & n \\ 0 & 0 & 0 & -4 & \cdots & 0 & n \\ \vdots & & & & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -(n-1) & n \\ 1 & 4 & 6 & 8 & \cdots & 2(n-1) & n \end{vmatrix}$. נחבר לשורה האחרונה את השורה הראשונה-

$\begin{vmatrix} -1 & -2 & -3 & -4 & \cdots & -(n-1) & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & n \\ 0 & 0 & -3 & 0 & \cdots & 0 & n \\ 0 & 0 & 0 & -4 & \cdots & 0 & n \\ \vdots & & & & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -(n-1) & n \\ 0 & 2 & 3 & 4 & \cdots & (n-1) & n \end{vmatrix}$. נחבר כל אחת מהשורות $2,3,\ldots,n-1$ אל השורה

האחרונה ונקבל - $\begin{vmatrix} -1 & -2 & -3 & -4 & \cdots & -(n-1) & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & n \\ 0 & 0 & -3 & 0 & \cdots & 0 & n \\ 0 & 0 & 0 & -4 & \cdots & 0 & n \\ \vdots & & & & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -(n-1) & n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & n+(n-2)n \end{vmatrix}$ (האיבר a_{nn} התקבל

מהוספת $n-2$ פעמים n ל- n שהיה שם מלכתחילה.)

$$\begin{vmatrix} -1 & -2 & -3 & -4 & \cdots & -(n-1) & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & n \\ 0 & 0 & -3 & 0 & \cdots & 0 & n \\ 0 & 0 & 0 & -4 & \cdots & 0 & n \\ \vdots & & & & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -(n-1) & n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & n^2-n \end{vmatrix} =$$

המטריצה אלכסונית, ועל כן הדטרמיננט

יתקבל מהכפלת האיברים על האלכסון הראשי : $=(-1)^{n-1}1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot (n-1)\cdot (n^2-n)$

כלומר- $=(-1)^{n-1}1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot (n-1)\cdot n\cdot (n-1)=(-1)^{n-1}\cdot n!\cdot (n-1)$

סה"כ : $(-1)^{n-1}\cdot n!\cdot (n-1)$.

5. $\det(A^2B^3)=|A^2|\cdot|B^3|=|A|^2|B|^3=4\cdot 27=108$

$\det(A^{-1}B^2)=|A^{-1}|\cdot|B^2|=|A|^{-1}\cdot|B|^2=\frac{1}{2}\cdot 9=4.5$.

$\det((A^t)^2(B^t)^{-1})=|A^t|^2\cdot|B^t|^{-1}=|A|^2\cdot|B|^{-1}=\frac{4}{3}$

6. נפתח את הדטרמיננט : $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 2-x & \cdots & 1 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & n-x \end{vmatrix}$: נחסיר את השורה הראשונה מכל

שאר השורות ונקבל - $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & -x & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1-x & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1-x \end{vmatrix}$. זוהי מטריצה אלכסונית, ולכן

הדטרמיננט הוא מכפלת האיברים על האלכסון : $1\cdot(-x)(1-x)(2-x)\cdot\ldots\cdot(n-1-x)$. לפי

הנתון הדטרמיננט היה שווה ל- 0, ולכן - $1\cdot(-x)(1-x)(2-x)\cdot\ldots\cdot(n-1-x)=0$. מכאן ש-

x יכול לקבל כל אחד מהערכים הבאים : $0,1,2,\ldots,n-1$.

7. נשים ♥ כי מדובר במטריצה אנטי סימטרית, **ולכן** - $A^t = -A$. מכאן ש- $\left|A^t\right| = |-A|$.

הכפלת מטריצה בסקלר 1- מתבצעת ע"י הכפלת כל אחת מ- n השורות של A בסקלר זה,

ולכן תשפיע על הדטרמיננט באופן הבא : $\left|A^t\right| = |-A| = (-1)^n |A|$.

במקרה שלנו n אי זוגי , **ולכן** – מקבלים $\left|A^t\right| = -|A|$. כעת -

$\det\left(\left(A^t\right)^7 A^9\right) = \left|A^t\right|^7 \cdot |A|^9 = (-1)^7 \cdot |A|^7 \cdot |A|^9 = -|A|^{16}$. מצד שני- מאחר ש- $\left|A^t\right| = |A|$ אנו

מקבלים - $\det\left(\left(A^t\right)^7 A^9\right) = \left|A^t\right|^7 \cdot |A|^9 = |A|^7 \cdot |A|^9 = |A|^{16}$.

כלומר- $\det\left(\left(A^t\right)^7 A^9\right) = -|A|^{16} = |A|^{16}$, **ומכאן ש-** $|A|^{16} = 0$, (ובפרט- $|A| = 0$.) **לכן –**

המטריצה $\left(A^t\right)^7 \cdot A^9$ אינה הפיכה.

תרגיל בית 9

1. יהי $V=\Re_{(2\times 2)}$, ויהי $W=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\quad a,b\in\Re\right\}$. הראה כי תתי המרחבים הבאים מהווים משלים של W ב- V :

א) $U'=\left\{\begin{pmatrix} c & c \\ c & d \end{pmatrix}, c,d\in\Re\right\}$

ב) $U''=\left\{\begin{pmatrix} 0 & d \\ c & d \end{pmatrix}, c,d\in\Re\right\}$

2. יהי $V=\Re[x]$, ו- $W=\{(x^3+x+1)\cdot q(x),\ q(x)\in\Re[x]\}$ (הראנו בתרגיל בית 8, שאלה 5, שאוסף מסוג זה מהווה תת מרחב של V). מצא משלים ל- W ב- V.

3. האם הוקטורים : $f_1(x)=\ln\left(\frac{(x^2+1)^3}{x^4+7}\right)$, $f_2(x)=\ln\left(\sqrt{x^2+1}\right)$, $f_3(x)=\ln(x^4+7)$ תלויים ליניארית במרחב הוקטורים $V=\{f:R\to R\,|\,\text{רציפה } f\}$?

4. האם הקבוצה $\{2+x,\ 1+x^2,\ x^2+x^3, x^2-x^3\}$ מהווה בסיס ל- $\Re_3[x]$?

5. יהי V מ"ו מעל שדה F ממימד n , ו- W_1,W_2 שני תתי מרחבים של V, השונים זה מזה, כל אחד ממימד n-1. מהו המימד של $W_1\cap W_2$?

6. מטריצה נקראת **מטריצת טפליץ** אם איבריה קבועים לכל אורך כל אלכסון המקביל לאלכסון הראשי. לדוגמא - $\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & a & b \\ e & d & a \end{pmatrix}$ היא מטריצת טפליץ מסדר 3. הראה כי קבוצת מטריצות הטפליץ מסדר n מהווה תת מרחב של $\Re^{n\times n}$, ומצא את מימדו.

7. מהו יחס ההכלה בין המרחבים - $W=Span\{(-1,3,2),(-2,-1,1)\}$, ו- $U=Span\{(-7,0,5),(0,7,3)\}$ (כתתי מרחבים של $\Re^3$).

8. הראה כי תת הקבוצה $\{(\cos(t)+i\sin(t),1)\ ,\ (1,\cos(t)-i\sin(t))\}$ של C^2 תלויה ליניארית לכל $t\in\Re$.

להגשה עד : 2.1.05

בהצלחה!!

פתרונות תרגיל בית 9

שאלה 1

$W=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad a,b\in\Re\right\}$.

א) נראה כי $U'=\left\{\begin{pmatrix} c & c \\ c & d \end{pmatrix}, c,d\in\Re\right\}$ מהווה משלים של W ב- V:

$\underline{V=U'+W}$: נניח כי $v=\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}\in\Re_{(2\times 2)}$. נסתכל על המטריצות $u'=\begin{pmatrix} z & z \\ z & w \end{pmatrix}$, ו-

$w=\begin{pmatrix} x-z & y-z \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. נובע כי $w\in W \quad u'\in U'$, וכן $v=u'+w$.

$\underline{U'\cap W=\{0_v\}}$: תהי $A\in U'\cap W=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. אזי $A\in U'=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ וגם

$A\in W=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. מ- $A\in U'=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ אנו מקבלים כי בהכרח $a=b=c$, ומכך ש-

$A\in W=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ אנו קבלים ש- $c=d=0$. לכן מחיתוך שני התנאים הנ"ל אנו מקבלים -

$a=b=c=d=0$, ומכאן ש- $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

ב) $\underline{V=U''+W}$: $U''=\left\{\begin{pmatrix} 0 & d \\ c & d \end{pmatrix}, c,d\in\Re\right\}$. נניח כי $v=\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}\in\Re_{(2\times 2)}$. נסתכל על

המטריצות $u''=\begin{pmatrix} 0 & w \\ z & w \end{pmatrix}$, ו- $w=\begin{pmatrix} x & y-w \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. נובע כי $w\in W \quad u''\in U''$, וכן $v=u''+w$.

$\underline{U''\cap W=\{0_v\}}$: תהי $A\in U''\cap W=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. אזי $A\in U''=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ וגם

$A\in W=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. מ- $A\in U''=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ אנו מקבלים כי בהכרח $a=0\wedge \quad b=d$, ומכך ש-

$A\in W=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ אנו קבלים ש- $c=d=0$. לכן מחיתוך שני התנאים הנ"ל אנו מקבלים -

$a=b=c=d=0$, ומכאן ש- $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

שאלה 2

המרחב $U=\Re_2[x]$ מ"ו, וכמו כן $U\subseteq V$. לכן U תת מרחב של V. נראה כי U משלים של W ב- V, כלומר נראה כי $V=U\oplus W$

$V=U+W$: לכל $p(x)\in V$ ניתן למצוא פולינומים יחידים $q(x),r(x)$ כך ש- $p(x)=(x^3+x+1)q(x)+r(x)$, כאשר מעלת $r(x)$ קטנה ממעלת (x^3+x+1), כידוע מחלוקת פולינומים. נשים לב ש-

$$p(x)=\underbrace{(x^3+x+1)q(x)}_{\in W}+\underbrace{r(x)}_{\in U}$$

הפולינום הראשון בסכום שייך ל- W , כיוון שהוא מהצורה של איברי W.

הפולינום השני שייך ל- U שכן הוא ממעלה קטנה או שווה ל- 2, כיוון שמעלת $r(x)$ קטנה ממעלת (x^3+x+1).

על כן- כל איבר ב- V ניתן לייצג כסכום של איבר מ- W ואיבר מ- U .

$U\cap W=\{0_v\}$: אם $p(x)\in U\cap W$ מצד אחד , מאחר ש- $p(x)\in U$, הוא ממעלה קטנה שווה מ- 2.

אז מצד שני $p(x)=(x^3+x+1)q(x)$, שכן $p(x)\in W$. לפיכך הוא ממעלה 3 לפחות, אלא אם כן $q(x)$=0 .

האפשרות היחידה ששני התנאים יתקיימו היא ש- $q(x)$=0 , ואז - $p(x)=0$.

סה"כ - $V=U\oplus W$, ולכן – U משלים של W ב- V.

שאלה 3

נתון - $f_1(x)=\ln\left(\frac{(x^2+1)^3}{x^4+7}\right)$, $f_2(x)=\ln\left(\sqrt{x^2+1}\right)$, $f_3(x)=\ln(x^4+7)$. הוקטורים f_1, f_2, f_3 תלויים ליניארית, במ"ו $V=\{f:R\to R\,|\,f \text{ רציפה}\}$, שכן – ניתן לקחת את הסקלרים $\alpha_1=1,\ \alpha_2=-6,\ \alpha_3=1$, ולקבל ש-

$$\alpha_1 f_1+\alpha_2 f_2+\alpha_3 f_3=\ln\left(\frac{(x^2+1)^3}{x^4+7}\right)-6\ln\left(\sqrt{x^2+1}\right)+\ln(x^4+7)=0$$

הסבר - אנו מחפשים $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3$, כך ש- $\alpha_1 f_1+\alpha_2 f_2+\alpha_3 f_3=0$.

$$0=\alpha_1 f_1+\alpha_2 f_2+\alpha_3 f_3=\alpha_1\ln\left(\frac{(x^2+1)^3}{x^4+7}\right)+\alpha_2\ln\left(\sqrt{x^2+1}\right)+\alpha_3\ln(x^4+7).$$

$$0=\alpha_1\ln(x^2+1)^3-\alpha_1\ln(x^4+7)+\alpha_2\ln(x^2+1)^{\frac{1}{2}}+\alpha_3\ln(x^4+7)$$

$$0 = 3\alpha_1 \ln(x^2+1) - \alpha_1 \ln(x^4+7) + \tfrac{1}{2}\alpha_2 \ln(x^2+1) + \alpha_3 \ln(x^4+7)$$

$$\Leftrightarrow \qquad 3\alpha_1 \ln(x^2+1) - \alpha_1 \ln(x^4+7) = -\tfrac{1}{2}\alpha_2 \ln(x^2+1) - \alpha_3 \ln(x^4+7)$$

לכן ניתן לקחת - $\begin{cases} 3\alpha_1 = -\frac{1}{2}\alpha_2 \\ -\alpha_1 = -\alpha_3 \end{cases}$, כלומר- $\alpha_1 = \alpha_3 = -\frac{1}{6}\alpha_2$. כך ניתן לקחת למשל- $\alpha_1 = 1,\ \alpha_2 = -6,\ \alpha_3 = 1$. כלומר- הפתרון הטריוויאלי הוא לא הפתרון היחיד למערכת המשוואות $\begin{cases} 3\alpha_1 = -\frac{1}{2}\alpha_2 \\ -\alpha_1 = -\alpha_3 \end{cases}$, ומכאן שהווקטורים תלויים ליניארית.

שאלה 4

כידוע, מימד $\Re_3[x]$ הוא 4, כפי שיעיד הבסיס הסטנדרטי בן 4 האיברים - $\{1, x, x^2, x^3\}$.

לכן- לגבי האוסף הנתון, די לנו לבדוק כי היא קבוצה בת"ל, שכן- במרחב וקטורים ממימד 4, כל קבוצה בת"ל בת 4 איברים היא גם קבוצה פורשת.

נראה כי הקבוצה $\{2+x,\ 1+x^2,\ x^2+x^3, x^2-x^3\}$ **בת"ל**:

אם נפתור $a(2+x)+b(1+x^2)+c(x^2+x^3)+d(x^2-x^3)=0$ נקבל $a=b=c=d=0$.

דרך ב'- נוכל לבנות מטריצה שבה כל שורה מייצגת את מקדמי הפולינום (הווקטור):

$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ לאחר דירוג נקבל את המטריצה - $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$, אשר דרגתה 4,

ומכאן שהווקטורים בת"ל.

שאלה 5

ידוע כי (*) $\dim(W_1+W_2) = \dim(W_1) + \dim(W_2) - \dim(W_1 \cap W_2)$.

מאחר ש- W_1, W_2 שני תתי מרחבים של V, השונים זה מזה, ו- V נובע כי

$(i=1,2) \qquad \dim(W_1+W_2) > \dim(W_i) = n-1$. מצד שני – מאחר ש- $W_1, W_2 \subseteq V$, גם

$W_1+W_2 \subseteq V$, ולכן $\dim(W_1+W_2) \le \dim(V) = n$. בסה"כ - $\dim(W_1+W_2) = n$.

כעת- נציב בנוסחה (*) את כל הידוע עד כה - $n = (n-1)+(n-1)-\dim(W_1 \cap W_2)$ כלומר-

$n-2 = \dim(W_1 \cap W_2)$.

שאלה 6

נראה **סגירות לחיבור** : תהיינה
$$A=\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ b_1 & a_1 & a_2 & \ddots & a_{n-1} \\ b_2 & b_1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & a_2 \\ b_{n-1} & \cdots & b_2 & b_1 & a_1 \end{pmatrix}$$
ו-
$$B=\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_{n-1} & x_n \\ y_1 & x_1 & x_2 & \ddots & x_{n-1} \\ y_2 & y_1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & x_2 \\ y_{n-1} & \cdots & y_2 & y_1 & x_1 \end{pmatrix}$$
מטריצות טפליץ מסדר n.

נשים ♥ כי האינדקס של ה- a ים, (או ה- x ים) מגיע עד n , ואילו האינדקס של ה- b ים (או ה- y ים) מגיע עד n-1, וזאת משום שעל האלכסון הראשי יש לנו a ים, ומספר האלכסונים המקבילים לאלכסון הראשי הוא n-1 מעל האלכסון הראשי , ו- n-1 מתחת לאלכסון הראשי.

אזי
$$A+B=\begin{pmatrix} a_1+x_1 & a_2+x_2 & \cdots & a_{n-1}+x_{n-1} & a_n+x_n \\ b_1+y_1 & a_1+x_1 & a_2+x_2 & \ddots & a_{n-1}+x_{n-1} \\ b_{2+}y_2 & b_1+y_1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & a_2+x_2 \\ b_{n-1}+y_{n-1} & \cdots & b_2+y_2 & b_1+y_1 & a_1+x_1 \end{pmatrix}$$
, וזו מטריצת טפליץ.

נראה **סגירות לכפל בסקלר**-

אם
$$A=\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ b_1 & a_1 & a_2 & \ddots & a_{n-1} \\ b_2 & b_1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & a_2 \\ b_{n-1} & \cdots & b_2 & b_1 & a_1 \end{pmatrix}$$
מטריצת טפליץ, ו- $\alpha\in\Re$, אזי
$$\alpha A=\begin{pmatrix} \alpha a_1 & \alpha a_2 & \cdots & \alpha a_{n-1} & \alpha a_n \\ \alpha b_1 & \alpha a_1 & \alpha a_2 & \ddots & \alpha a_{n-1} \\ \alpha b_2 & \alpha b_1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \alpha a_2 \\ \alpha b_{n-1} & \cdots & \alpha b_2 & \alpha b_1 & \alpha a_1 \end{pmatrix}$$
, וזו מטריצת טפליץ .

על כן – סה"כ אוסף מטריצות הטפליץ מהווה תת מרחב של אוסף המטריצות מסדר n מעל הממשיים.

בנוגע למספר האיברים בבסיס- כל בחירה של $\{a_1,a_2,...,a_n,b_1,b_2,...,b_{n-1}\in\Re\}$ תגדיר לנו מטריצת טפליץ. דוגמא לבסיס : האוסף של המטריצות הבאות -

$$\begin{pmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a_1 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_2 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix},......,\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & a_n \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ b_1 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & b_1 & 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ b_2 & & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & b_2 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix},......,\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ b_{n-1} & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(ניתן לבחור את כל ה- a ים וה- b ים להיות 1.)

(הערה טכנית- כל המטריצות הן באותו גודל (מאותו סדר), גם אם זה לא נראה כך בשרטוט.)

שאלה 7

נסמן $S_1=\{(-1,3,2),(-2,-1,1)\}$, $S_2=\{(-7,0,5),(0,7,3)\}$

ראשית כל, בדיקה קצרה מעלה שכל אחת מהקבוצות הללו - S_1,S_2 היא בת"ל.

לכן S_1 מהווה בסיס ל- W, ו- S_2 מהווה בסיס ל- U. (אין צורך לבדוק קבוצה פורשת, כי W ו- U הוגדרו כקבוצות הנפרשות ע"י S_1 , ו- S_2 בהתאמה.)

נראה כי כל וקטור ב- W ניתן להציג כצ"ל של איברי S_2 , ואז ינבע כי S_2 בסיס ל- W.

כמו כן נראה כי כל וקטור ב- W ניתן להציג כצ"ל של איברי S_1 , ואז ינבע כי S_1 בסיס ל- U.

בסה"כ – מקבלים U=W.

<u>שלב א':</u> נראה כי כל וקטור ב- W ניתן להציג כצ"ל של איברי S_2 , ואז ינבע כי S_2 בסיס ל- W. נראה זאת רק על איברי הבסיס של W - S_1 , שכן אם איברי הבסיס ניתנים להצגה כצ"ל של איברי S_2 , וכל וקטור ב- W ניתן להצגה כצ"ל של איברי S_1 , נקבל שכל איבר ב- W ניתן להצגה כצ"ל של איברי S_2 .

$(-1,3,2)=a(-7,0,5)+b(0,7,3) \quad\Leftarrow\quad a=\frac{1}{7}\,,\ b=\frac{3}{7}$.

$(-2,-1,1)=a(-7,0,5)+b(0,7,3) \quad\Leftarrow\quad a=\frac{2}{7}\,,\ b=\frac{-1}{7}$.

שלב ב': נראה כי כל וקטור ב- U ניתן להציג כצ"ל של איברי S_1, ואז ינבע כי S_1 בסיס ל- U.

נראה זאת רק על איברי הבסיס של U - S_2 , שכן אם איברי הבסיס ניתנים להצגה כצ"ל של איברי S_1, וכל וקטור ב- W ניתן להצגה כצ"ל של איברי S_2, נקבל שכל איבר ב- W ניתן להצגה כצ"ל של איברי S_1.

$(-7,0,5)=a(-1,3,2)+b(-2,-1,1) \quad \Leftarrow \quad a=1,\ b=3$.

$(0,7,3)=a(-1,3,2)+b(-2,-1,1) \quad \Leftarrow \quad a=2,\ b=-1$.

שאלה 8

נסמן $u=(\cos(t)+i\sin(t),\ 1),\quad v=(1,\cos(t)-i\sin(t))$. ננסה להביע את v ככפולה של u .

כלומר- נחפש סקלר a , כך ש- $v=au$, ואז אם ניקח $\alpha=1,\ \beta=-a$ מקבלים $\alpha v+\beta u=v-au=au-au=0$, ומכאן התלות הליניארית. ((*) – נותר להראות ש- α,β אינם מתאפסים בו זמנית, ונראה זאת בסוף).

$au=a(\cos(t)+i\sin(t),\ 1)=(a\cos(t)+ai\sin(t),a)$. אנו רוצים שהביטוי האחרון ישווה ל- $v=(1,\cos(t)-i\sin(t))$.

הרמז שלנו הוא שכדי שהקואורדינטה הראשונה תהיה 1- אנו נעזרים בעובדה ש-

$(\cos(t)-i\sin(t))\cdot(\cos(t)+i\sin(t))=\left(\cos^2(t)-(i)^2\sin^2(t)\right)=\left(\cos^2(t)+\sin^2(t)\right)=1$

וזאת לכל $t\in\Re$.

נשים לב כי אם ניקח $a=\cos(t)-i\sin(t)$ נקבל את הנדרש שכן -

$au=a(\cos(t)+i\sin(t),\ 1)\ (\cos(t)-i\sin(t))\ (\cos(t)+i\sin(t),\ 1)=(1,\cos(t)-i\sin(t))=v$

חשוב עוד לציין כי $a=\cos(t)-i\sin(t)\neq 0$ לכל $t\in\Re$, שכן לא יתכן $\cos(t)=\sin(t)=0$.

המקרה היחיד שבו מתקיים השוויון $\cos(t)=\sin(t)$ הוא כאשר $t=\frac{\pi}{4}+2\pi k$, (k שלם) ולגביו

$\cos(t)=\sin(t)=\frac{\sqrt{2}}{2}\neq 0$.

תרגיל בית 10

1. מצא בסיס ומימד למרחב הפתרונות של המערכת : $\begin{cases} x+y+z+w=0 \\ x+3y+2z+4w=0 \\ 2x+z-w=0 \end{cases}$

2. מצא בסיס ומימד עבור המ"ו הבאים :

- $V=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| \ a,b,c,d\in R,\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}=0\right\}$

3. תהי $f:R^{2\times2}\to R_2[x]$ העתקה ליניארית ונתון:

$$f\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right)=1+x^2 \ ,\ f\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\right)=1+x+x^2 \ ,\ f\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right)=2 \ ,\ f\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right)=2x^2$$

א. חשב $f\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right)$

ב. חשב $\forall v\in R^{2\times2} \quad f(v)$.

ג. מצא בסיס ומימד ל- $\mathrm{Im}(f),\ker(f)$.

4. תהי $T:\Re^{2\times2}\to\Re^{2\times2}$ העתקה ליניארית המקיימת $T(AB)=T(A)\cdot T(B)$, לכל $A,B\in\Re^{2\times2}$. הראה כי $T\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right)\neq I$.

5. עבור כל מספר ממשי d נגדיר $T:\Re^2\to\Re^2$ באופן הבא :
$T(a,b)=(a+b+d^2+1,a)$. האם קיים ערך של d שעבורו ההעתקה T תהיה העתקה ליניארית ?

6. יהיו $a_1,a_2,...,a_n$ מספרים ממשיים שונים מאפס (קבועים), ושונים זה מזה. נסתכל על ההעתקה : $T:\Re_{n-1}[x]\to\Re^n$ המוגדרת באופן הבא :
$T(p(x))=(p(a_1),p(a_2),...,p(a_n))$ לכל $p(x)\in\Re_{n-1}[x]$.

- האם ההעתקה הנ"ל מהווה העתקה ליניארית ?
- האם ההעתקה הנ"ל מהווה איזומורפיזם ?

להגשה עד : 10.1.05

בהצלחה!

פתרונות לתרגיל בית 10

שאלה 1

(פתרנו מערכת זו במסגרת תרגיל בית 5.)

מטריצת המקדמים של המערכת ההומוגנית הנ"ל היא : $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. נדרג אותה-

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3 \leftarrow R_3 - 2R_1]{R_2 \leftarrow R_2 - R_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & -1 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \leftarrow R_3 + R_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

כעת- נעביר את המטריצה לצורה מצומצמת שורות-

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \leftarrow \frac{1}{2} \cdot R_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, נאפס את האיבר מעל לאיבר המוביל בשורה השנייה-

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \leftarrow R_1 - R_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

הערה- אין הכרח להעביר את המטריצה לצורה מצמצמת שורות.

מקבלים $y + \frac{z}{2} + \frac{3w}{2} = 0$, כלומר- $y = -\frac{z}{2} - \frac{3w}{2}$, וכן - $x = -\frac{z}{2} + \frac{w}{2}$.

לכן , אם נציב $z = t, w = s$ (נובע כי יש לנו שתי דרגות חופש) מקבלים : $x = -\frac{t}{2} + \frac{s}{2}$, $y = -\frac{t}{2} - \frac{3s}{2}$. הפתרון הכללי למערכת הוא: $\left(-\frac{t}{2} + \frac{s}{2},\ -\frac{t}{2} - \frac{3s}{2},\ t,\ s\right)^t$. (ונשים ♥ כי הפתרון הטריוויאלי ביניהם, ואין זה מפתיע, שכן המערכת טריוויאלית.)

לכן מרחב הפתרונות הוא $\{\left(-\frac{t}{2} + \frac{s}{2},\ -\frac{t}{2} - \frac{3s}{2},\ t,\ s\right)^T,\ t, s \in \Re\}$.

(הוכחנו בעבר כי מרחב פתרונות של מערכת הומוגנית מהווה תמיד תת מרחב של $\Re^n$).

כעת, מימד המרחב הוא כמספר דרגות החופש, 2.

מאחר ש- s, ו- t אינם תלויים זה בזה נוכל לייצג כל ווקטור במרחב הפתרונות כצ"ל של שני וקטורים, האחד "מוודא" שהקשר בין הביטויים התלויים ב- s יהיה כנדרש, והשני "מוודא" שהקשר בין הביטויים התלויים ב- t יהיה כנדרש.

בסיס למרחב הפתרונות - $\{(1,1,-2,0),(1,-3,0,2)\}$. בסיס זה התקבל ע"י הצבה $\frac{-t}{2} = 1,\ \frac{s}{2} = 1$.

שאלה 2

הסעיף הראשון כלל אינו מהווה מרחב ווקטורים, זוהי טעות, אבקש את סליחתכם.

נמצא בסיס ומימד עבור המרחב: $V=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| \; a,b,c,d\in R, \; \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}=0\right\}$

נתאר ראשית, את איברי V באופן ברור יותר:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a+4b & 4a+b \\ c+4d & 4c+d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\Leftarrow \begin{cases} a+4b=0 \\ 4a+b=0 \\ c+4d=0 \\ 4c+d=0 \end{cases}$ מקבלים משתי המשוואות הראשונות $a=b=0$, ומשתי המשוואות

האחרונות : $c=d=0$.

לכן - $V=\{0_v\}$, כלומר- זהו מרחב האפס. לפי הגדרה - $Span\{\phi\}=\{0_v\}$, ומכאן – אין בסיס

למרחב זה, שכן מימדו הוא 0.

שאלה 3

נבחין בכך שהאוסף : $\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right\}$ בת"ל, ומאחר שהוא מכיל 4

איברים, הוא מהווה בסיס ל- $\Re^{2\times 2}$.

על פי הנתון התנהגות ההעתקה על איברי הבסיס היא :

$$f\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right)=2x^2 \;,\; f\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right)=2 \;,\; f\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\right)=1+x+x^2 \;,\; f\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right)=1+x^2$$

כידוע, מאחר שכל איבר במרחב ניתן לייצג כצ"ל של איברי הבסיס, ומאחר שההעתקה היא העתקה ליניארית, מספיק לדעת את התנהגות ההעתקה על איברי הבסיס, כדי לדעת את דרך פעולתה על כל איבר ואיבר.

נענה על סעיף ב', ובעזרתו על סעיף א'.

אם $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\in\Re^{2\times 2}$ אז :

נבצע השוואת מקדמים: $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=\alpha\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}+\gamma\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}+\delta\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} a=\alpha+\beta+\delta \\ b=\alpha+\beta \\ c=\beta+\gamma+\delta \\ d=2\beta+\gamma \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha=-a+2b+c-d \\ \beta=a-b-c+d \\ \gamma=-2a+2b+2c-d \\ \delta=a-b \end{cases}$$

לכן -
$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=\alpha\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}+\gamma\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}+\delta\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}=$$

$$(-a+2b+c-d)\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}+(a-b-c+d)\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}+(-2a+2b+2c-d)\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}+(a-b)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

מכיוון ש- f העתקה ליניארית נקבל : $f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=$

$$f\left((-a+2b+c-d)\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}+(a-b-c+d)\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}+(-2a+2b+2c-d)\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}+(a-b)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right)$$

$$= f\left((-a+2b+c-d)\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right)+f\left((a-b-c+d)\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\right)+f\left((-2a+2b+2c-d)\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right)+f\left((a-b)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right)$$

$$=(-a+2b+c-d)f\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}+(a-b-c+d)f\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}+(-2a+2b+2c-d)f\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}+(a-b)f\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}=$$

$$=(-a+2b+c-d)(1+x^2)+(a-b-c+d)(1+x+x^2)+(-2a+2b+2c-d)(2)+(a-b)(2x^2)$$

$$=(2a-b)x^2+(a-b-c+d)x+(-4a+5b+4c-2d)$$

לכן , לכל $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\in\Re^{2\times 2}$

$f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=(2a-b)x^2+(a-b-c+d)x+(-4a+5b+4c-2d)$, וזוהי נוסחת

ההעתקה.

כעת, על מנת לחשב את $f\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right)$ נציב $a=1,\ b=c=d=0$ בנוסחה שקבלנו, ונקבל כי

$$f\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right)=(2)x^2+(1)x+(-4)=2x^2+x-4$$

<u>נמצא בסיס לגרעין ההעתקה:</u>

גרעין ההעתקה הוא אוסף המטריצות שההעתקה מתאימה להם את פולינום האפס.

$$\ker(f)=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}:\quad (2a-b)x^2+(a-b-c+d)x+(-4a+5b+4c-2d)=0\right\}$$

כלומר- $\begin{cases} 2a-b=0 \\ a-b-c+d=0 \\ -4a+5b+4c-2d=0 \end{cases}$.

כבר לפני שניגש לפתור את המערכת, אנו מבחינים בכך שיש שם 3 משוואות, ו- 4 נעלמים.

לכן- לפחות דרגת חופש אחת.

מקבלים מהמערכת את האילוצים הבאים : $\begin{cases} b=2a \\ c=-2a \\ d=-a \end{cases}$, לכן- יש דרגת חופש אחת. נקבע

$a=t$, ונקבל כי $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} t & 2t \\ -2t & -t \end{pmatrix}$. מכאן ש- $\ker(f)=Span\left\{\begin{pmatrix} t & 2t \\ -2t & -t \end{pmatrix},\ t\in\Re\right\}$,

ובסיס עבור הגרעין יוכל להיות : $\left\{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}\right\}$. מימד הגרעין הוא 1.

<u>נמצא בסיס לתמונת ההעתקה:</u>

מאחר ש- $\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right\}$ בסיס ל- $\Re^{2\times2}$, אזי

$\left\{ f\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, f\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, f\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, f\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right\}$ פורש את $\operatorname{Im}(f)$.

$$\{1+x^2,\ 1+x+x^2,\ 2,\ 2x^2\}=\left\{ f\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, f\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, f\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, f\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right\}$$

ננפה את האוסף הנ"ל, כך שיהיה בת"ל :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\dots} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

לכן : $\{1+x^2,\ x,\ 2\}$ מהווה בסיס לתמונת ההעתקה, ומימד התמונה הוא 3.

<u>הערה :</u> ניתן להבחין בנכונות המשפט: $\dim(V)=\dim(\ker(f))+\dim(\operatorname{Im}(f))$, שכן :

4=1+3.

שאלה 4

נניח בשלילה כי (*) $T\left(\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}\right)=I$. על פי הנתון, אם נציב $A=B=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}$ נקבל ש-

$$T\left(\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}^2\right)=T\left(\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}\right)\cdot T\left(\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}\right).$$

נציב את (*) באגף ימין, ונקבל כי הביטוי באגף ימין שווה ל-

$$T\left(\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}\right)\cdot T\left(\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}\right)=I\cdot I=I$$

נחשב את אגף שמאל :

$$T\left(\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}^2\right)=T\left(\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$$

$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow$$

כי : $\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$ תמיד $T(0_v)=0_w$

מהשוואת אגף שמאל וימין נקבל כי $I=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$, וזו **סתירה !** .

לכן $T\left(\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}\right)\neq I$.

שאלה 5

יהיו $(a_1,b_1),(a_2,b_2)\in\Re^2$. אם T העתקה ליניארית צריך להתקיים -

$$T(a_1,b_1)+T(a_2,b_2)=T(a_1+a_2,b_1+b_2).$$

נפתח את אגף שמאל –

$$T(a_1,b_1)+T(a_2,b_2)=(a_1+b_1+d^2+1,a_1)\,(a_2+b_2+d^2+1,a_2)$$

$$(a_1+a_2+b_1+b_2+2d^2+2,a_1+a_2)$$

נפתח את אגף ימין –

$$T(a_1+a_2,b_1+b_2)=(a_1+a_2+b_1+b_2+d^2+1,a_1+a_2)$$

כדי שיתקיים שוויון בין האגפים צריך שיתקיים -

$$(a_1+a_2+b_1+b_2+2d^2+2,a_1+a_2)=(a_1+a_2+b_1+b_2+d^2+1,a_1+a_2)$$

כלומר- $2d^2+2=d^2+1$, ובמילים אחרות - $d^2=-1$.

אבל – כידוע, אין מספר ממשי d שעבורו $d^2 = -1$. לכן עבור כל d ממשי ההעתקה T אינה העתקה ליניארית.

שאלה 6

ההעתקה המוגדרת מהווה העתקה ליניארית עבור כל n טבעי, שכן לכל $p(x), q(x) \in \Re_{n-1}[x]$ מתקיים –

$$T(p(x)+q(x)) = ((p+q)(a_1),\ (p+q)(a_2), \dots,\ (p+q)(a_n))$$

$= (p(a_1)+q(a_1),\ \ p(a_2)+q(a_2), \dots, p(a_n)+q(a_n))$ (לפי הגדרת פעולת החיבור במרחב $\Re_{n-1}[x]$).

$= (p(a_1), p(a_2), \dots, p(a_n)) + (q(a_1), q(a_2), \dots, q(a_n))$ (לפי הגדרת פעולת החיבור במרחב $\Re^n$).

$$= T(p(x)) + T(Q(x))$$

כמו כן – לכל סקלר $\alpha \in \Re$ מתקיים $T(\alpha p(x)) = (\alpha p(a_1),\ \alpha p(a_2), \dots, \alpha p(a_n))$

$$= \alpha(p(a_1), p(a_2), \dots, p(a_n)) = \alpha \cdot T(p(x))$$

כעת נברר מתי העתקה זו תהיה איזומורפיזם.

על פי משפט: $T : \Re_{n-1}[x] \to \Re^n$ איזומורפיזם $\Leftrightarrow$

1. $\dim(\Re_{n-1}[x]) = \dim(\Re^n)$.
2. $\ker(T) = \{0_v\}$

התנאי הראשון יתקיים לכל n טבעי. (ההפרש של 1 נובע מהמקדם החופשי.)

נבדוק את קיום התנאי השני - $\ker(T) = \{0_v\}$.

כידוע, לכל פולינום ממעלה n במקדמים ממשיים, יש לכל היותר n שורשים ממשיים.

אם $p(x)$ פולינום בעל n שורשים ממשיים $x_1, x_2, \dots, x_n$, אז ניתן יהיה לכתוב את הפולינום כך: $p(x) = (x-x_1)(x-x_2)\cdot \dots \cdot (x-x_n)$, ומתקיים - $p(x_1) = p(x_2) = \dots = p(x_n) = 0$.

נרצה למצוא את $\ker(T)$. מתי $p(x) \in \ker(T)$? לפי הגדרת גרעין ההעתקה $p(x) \in \ker(T)$ אמ"ם $T(p(x)) = (0,0,\dots,0)$. כלומר- $T(p(x)) = (p(a_1), p(a_2), \dots, p(a_n)) = (0,0,\dots,0)$

מאחר ש- $a_1, a_2, ..., a_n$ שונים מאפס ושונים זה מזה, פולינום $p(x)$ כלשהו יקיים

$p(a_1) = p(a_2) = ... = p(a_n) = 0$ רק אם $p(x)$ הוא פולינום האפס, או ש- $p(x)$ הוא מהצורה

$p(x) = (x - a_1)(x - a_2) \cdot ... \cdot (x - a_n) \cdot q(x)$, ($q(x)$ הינו פולינום ממעלה כלשהי, יתכן 0,

ואז זהו סקלר.)

אבל – אנו רואים שפולינום כזה הוא ממעלה n לכל הפחות, ועל כן $p(x) \notin \Re_{n-1}[x]$, המכיל

פולינומים ממעלה n-1 לכל היותר.

(הסבר- לכל $p(x) \in \Re_{n-1}[x]$ יהיה רכיב כלשהו בווקטור המתקבל ע"י ההעתקה T השונה

מאפס.)

לכן $p(x) \in \ker(T)$ אמ"ם $p(x)$ הוא פולינום האפס, כלומר $p(x) = 0$.

תרגיל בית 11

1. נגדיר על C^2 (=אוסף הזוגות של מספרים מרוכבים) את הפונקציה הבאה :
$f:C^2\times C^2\to R$ המוגדרת ע"י $\langle (c_1,c_2),\ (d_1,d_2)\rangle = c_1\bar{d}_1+c_2\bar{d}_2$.
   א) הראה כי פונקציה זו מהווה מכפלה פנימית על C^2 .
   ב) מהו $\{\langle vA,v\rangle :\ v\in D\}$ כאשר D הוא אוסף כל ווקטורי היחידה ב- C^2, ו-
$A=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$?

2. יהי V מרחב כל הפונקציות הרציפות מעל הממשיים. האם הפונקציה הבאה :
$\langle f,g\rangle = f(1)+g(1)$ מהווה מכפלה פנימית של V מעל הממשיים ?

3. חשב את הזווית בין הווקטורים בממ"פ הבאים :
   א) בין הווקטורים $f(x)=5x^2$, $g(x)=3x$, במרחב הפונקציות הממשיות
הרציפות מ- $[0,1]$ ל- $\Re$, עם המכפלה הפנימית : $\langle f,g\rangle = \int_0^1 f(x)g(x)dx$
   ב) בין הווקטורים $A=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&1\\-1&1\end{pmatrix}$ במרחב המטריצות $\Re^{2\times 2}$, עם
המכפלה הפנימית $\langle A,B\rangle = tr(B^tA)$.

4. יהי $V=\Re^4$, ועליו המכפלה הפנימית המקובלת.
($\forall x,y\in\Re^4,\quad \langle x,y\rangle = \langle (x_1,x_2,x_3,x_4),(y_1,y_2,y_3,y_4)\rangle = \sum_{i=1}^{4} x_iy_i$)
מצא ווקטור נורמלי ב- V שיהיה ניצב לכל אחד מהווקטורים הבאים :
$(2,1,1,3),\ (1,-1,-1,1),\ (1,1,1,1)$.

5. נתון לנו כי קבוצת הווקטורים $\{(1,2,0,3),(4,0,5,8),\ (8,1,5,6)\}$ בת"ל ב- $V=\Re^4$, ועל
כן היא מהווה בסיס עבור תת מרחב כלשהו W של V. מצא בסיס אורתונורמלי ל- W.

6. יהי V ממ"פ מעל $\Re$. הוכח כי $\langle u,v\rangle = \frac{1}{4}\|u+v\|^2-\frac{1}{4}\|u-v\|^2$ לכל $u,v\in V$.

תאריך הגשה אחרון :

20.1.05

בהצלחה!!

פתרונות תרגיל בית 11

שאלה 1

סעיף א'

המכפלה הפנימית המקובלת ב- C^n היא :

$\langle x,y\rangle = \langle (x_1,x_2,...,x_n),(y_1,y_2,...,y_n)\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i\bar{y}_i \quad ,\forall x,y\in C^n$, ולכן גם עבור $n=2$ זו

תהיה מכפלה פנימית.

נבדוק את התנאים לשם התרגול :

- נראה $\langle u+v,w\rangle = \langle u,w\rangle + \langle v,w\rangle \qquad \forall u,v,w\in V$:

$\forall u,v,w\in C^2$: אם $u=(a,b),\ v=(c,d),\ w=(e,f)$ (יש לזכור ש- $a,b,c,d,e,f\in C$)

נקבל ש-

$$\langle u+v,w\rangle = \langle (a+c,\ b+d),\ (e,f)\rangle = (a+c)\bar{e} + (b+d)\bar{f} = a\bar{e}+c\bar{e}+b\bar{f}+d\bar{f} =$$

$$a\bar{e}+b\bar{f}+c\bar{e}+d\bar{f} = \langle (a,b),(e,f)\rangle + \langle (c,d),(e,f)\rangle = \langle u,w\rangle + \langle v,w\rangle \ .$$

- נראה $\langle \alpha u,v\rangle = \alpha\langle u,v\rangle \quad \forall u,v\in V,\ \alpha\in F$.

$\alpha\in\Re\ ,\forall u,v\in C^2$ נקבל שאם $u=(a,b),\ v=(c,d)$:

$$\langle \alpha u,v\rangle = \langle (\alpha a,\alpha b),(c,d)\rangle = \alpha a\bar{c}+\alpha b\bar{d} = \alpha\langle (a,b),(c,d)\rangle = \alpha\langle u,v\rangle$$

- נראה $\langle u,v\rangle = \overline{\langle v,u\rangle} \quad \forall u,v\in V$: אם $u=(a,b),\ v=(c,d)$

$$\langle u,v\rangle = a\bar{c}+b\bar{d} = \overline{\bar{a}c+\bar{b}d} = \overline{c\bar{a}+d\bar{b}} = \overline{\langle v,u\rangle}\ .$$

- נראה $\langle u,u\rangle \geq 0 \qquad \forall u\in V$, וכן $\langle u,u\rangle = 0 \quad \Leftrightarrow \quad u=0_v$.

לכל $u\in C^2$ אם $u=(a,b)$ אז $\langle u,u\rangle = \langle (a,b),(a.b)\rangle = a\cdot\bar{a}+b\cdot\bar{b} = |a|^2+|b|^2 \geq 0$.

כעת, אם $u=0_v=(0,0)$ אזי $\langle u,u\rangle = |(0,0)|^2+|(0,0)|^2 = 0$.

מצד שני, אם $\langle u,u\rangle = 0$, נניח $u=(a,b)$, מקבלים

$\langle u,u\rangle = \langle (a,b),(a.b)\rangle = a\cdot\bar{a}+b\cdot\bar{b} = |a|^2+|b|^2 = 0$, והדבר ייתכן רק כאשר

$|b|^2=0\ ,\ |a|^2=0$, כלומר $|b|=0\ ,\ |a|=0$, לכן שני המספרים המרוכבים a,b שווים

לאפס, ומכאן ש- $u=0_v=(0,0)$.

סעיף ב'

יהי $v \in D$. אזי $v \in C^2$ ומתקיים $\|v\|=1$. נניח $v=(z,w)$, כאשר $z,w \in C$.

$$\langle vA, v\rangle = \left\langle (z,w)\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}, (z,w)\right\rangle = \langle (z,0), (z,w)\rangle = z\cdot\bar{z}+0=|z|^2$$

מהנתון ש- $\|v\|=1$ אנו יודעים כי $\|v\| = \langle (z,w),(z,w)\rangle = z\bar{z}+w\bar{w}=|z|^2+|w|^2=1$

לכן - $|z|^2=1-|w|^2$. מצד שני ראינו ש- $\langle vA,v\rangle = |z|^2$.

לכן - (*) $\langle vA,v\rangle = 1-|w|^2$.

ידוע כי $0\le |w|^2$ (שכן נורמה היא מספר ממשי אי שלילי).

כמו כן : $0\le |w|^2 \le 1$ (כי $|z|^2+|w|^2=1$, לכן $|w|^2\le 1$)

מקבלים ש- (**) $0\le 1-|w|^2\le 1$ (למשל ע"י הכפלת אי השוויון האחרון ב- 1-, ולאחר מכן הוספת 1 לשני האגפים.)

מציבים את (*) ב- (**) ומקבלים ש- $0\le\langle vA,v\rangle\le 1$, לכל $v\in D$.

לכן $\{\langle vA,v\rangle :\ v\in D\} = \{t\in\Re,\ \ 0\le t\le 1\}$.

שאלה 2

לא, נציג דוגמא נגדית עבור התנאי הרביעי. ניקח את $g(x)=-x$. פונקציה זו רציפה מעל הממשיים, ולכן שייכת למרחב. אבל – לא מקיימת את התנאי הרביעי, שכן -

$\langle g,g\rangle = g(1)+g(1) = -1+(-1) = -2<0$, בעוד שצריך להתקיים : $\langle g,g\rangle\ge 0,\ \ \forall g\in V$.

שאלה 3

א) נחשב את $\langle f,g\rangle$, $\|g\|$, $\|f\|$, ונציב כל זאת בנוסחה : $\cos(t)=\dfrac{\langle f,g\rangle}{\|f\|\cdot\|g\|}$, כאשר $t\in[0,\pi]$.

$$\|f\| = \sqrt{\langle f,f\rangle} = \sqrt{\int_0^1 f^2(x)dx} = \sqrt{\int_0^1 25x^4dx} = \sqrt{25\frac{x^5}{5}\Big|_0^1} = \sqrt{5}$$

$$\|g\| = \sqrt{\langle g,g\rangle} = \sqrt{\int_0^1 g^2(x)dx} = \sqrt{\int_0^1 9x^2dx} = \sqrt{9\frac{x^3}{3}\Big|_0^1} = \sqrt{3}$$

$$\langle f,g\rangle=\int_0^1 f(x)g(x)dx=\int_0^1 15x^3dx=15\frac{x^4}{4}\Big|_0^1=\frac{15}{4}$$

לכן - $\cos(t)=\frac{\langle f,g\rangle}{\|f\|\cdot\|g\|}=\frac{\frac{15}{4}}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{15}}{4}$, ומתקיים : $t=14.47^\circ$.

ב) נחשב את $\langle A,B\rangle$, $\|B\|$, $\|A\|$, ונציב בנוסחה : $\cos(t)=\frac{\langle A,B\rangle}{\|A\|\cdot\|B\|}$:

$$\|A\|=\sqrt{\langle A,A\rangle}=\sqrt{tr\left(\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}\right)}=\sqrt{tr\begin{pmatrix}2&2\\2&2\end{pmatrix}}=\sqrt{4}=2$$

$$\|B\|=\sqrt{\langle B,B\rangle}=\sqrt{tr\left(\begin{pmatrix}1&-1\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\-1&1\end{pmatrix}\right)}=\sqrt{tr\begin{pmatrix}2&0\\0&2\end{pmatrix}}=\sqrt{4}=2$$

$$\langle A,B\rangle=tr\left(\begin{pmatrix}1&-1\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}\right)=tr\begin{pmatrix}0&0\\2&2\end{pmatrix}=2$$

$\cos(t)=\frac{\langle A,B\rangle}{\|A\|\cdot\|B\|}=\frac{2}{2\cdot 2}=\frac{1}{2}$, לכן - $t=\frac{\pi}{3}$.

שאלה 4

נסמן : $v_1=(2,1,1,3),\quad v_2=(1,-1,-1,1),\quad v_3=(1,1,1,1)$.

נחפש $v\in V$ המקיים : $\langle v,v_i\rangle=0$, לכל $1\le i\le 3$, ולבסוף ננרמל אותו.

נניח $v=(a,b,c,d)$.

$$\langle v,v_1\rangle=0 \;\Rightarrow\; 2a+b+c+3d=0$$

$$\langle v,v_2\rangle=0 \;\Rightarrow\; a-b-c+d=0$$

$$\langle v,v_3\rangle=0 \;\Rightarrow\; a+b+c+d=0$$

מתקבלת מערכת משוואות , מפשטים ומקבלים : $a=-d,\ b=-c$. יש כאן שתי דרגות חופש. נבחר $d=c=-1$, ונקבל $a=b=1$. לכן $v=(a,b,c,d)=(1,1,-1,-1)$.

v הנ"ל אורתוגונלי לכל הווקטורים הנתונים. ננרמל אותו: (ע"י חלוקה בנורמה שלו, שהיא 2)

$\|v\|=\sqrt{\langle v,v\rangle}=\sqrt{\langle(1,1,-1,-1),(1,1,-1,-1)\rangle}=\sqrt{1+1+1+1}=\sqrt{4}=2$.

לכן $\hat{v}=\frac{v}{\|v\|}=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{-1}{2},\frac{-1}{2}\right)$ יקיים את הנדרש.

(הערה : ניתן היה למצוא ווקטורים אחרים, ע"י בחירה שונה של ערך המשתנים החופשיים).

שאלה 5

נסמן : $v_1=(1,2,0,3), v_2=(4,0,5,8),\ \ v_3=(8,1,5,6)$. נפעיל את תהליך גרם שמידט.

$$u_1=v_1=(1,2,0,3)$$

$$u_2=v_2-\frac{\langle v_2,u_1\rangle}{\|u_1\|^2}\cdot u_1=(4,0,5,8)-\frac{\langle(4,0,5,8)(1,2,0,3)\rangle}{\langle(1,2,0,3),(1,2,0,3)\rangle}\cdot(1,2,0,3)=(4,0,5,8)-\frac{28}{14}(1,2,0,3)$$

$$=(4,0,5,8)-(2,4,0,6)=(2,-4,5,2)$$

$$u_3=v_3-\frac{\langle v_3,u_1\rangle}{\|u_1\|^2}\cdot u_1-\frac{\langle v_3,u_2\rangle}{\|u_2\|^2}\cdot u_2$$

$$=(8,1,5,6)-\frac{\langle(1,2,0,3),(8,1,5,6)\rangle}{\langle(1,2,0,3),(1,2,0,3)\rangle}\cdot(1,2,0,3)-\frac{\langle(8,1,5,6),(2,-4,5,2)\rangle}{\langle(2,-4,5,2),(2,-4,5,2)\rangle}\cdot(2,-4,5,2)$$

$$=(8,1,5,6)-\frac{28}{14}\cdot(1,2,0,3)-\frac{49}{49}\cdot(2,-4,5,2)=(8,1,5,6)-(2,4,0,6)-(2,-4,5,2)=(4,1,0,-2)$$

סה"כ קבלנו : $u_1=(1,2,0,3)$, $u_2=(2,-4,5,2)$, $u_3=(4,1,0,-2)$.

האוסף הנ"ל מהווה בסיס אורתוגונלי ל –W . נגרמל את הווקטורים כדי למצוא בסיס אורתונורמלי. $\|u_1\|=\sqrt{14}$, $\|u_2\|=\sqrt{49}=7$, $\|u_3\|=\sqrt{21}$.

בסיס אורתונורמלי: $\left\{\frac{1}{\sqrt{14}}(1,2,0,3),\ \frac{1}{7}(2,-4,5,2),\ \frac{1}{\sqrt{21}}(4,1,0,-2)\right\}$.

שאלה 6

(הערה : ההוכחה נראית ארוכה, אבל זה רק בגלל שהיא מפורטת. חשוב לעבור עליה.)

נשתמש בתכונות המכפלה הפנימית כדי להוכיח כי : $\langle u,v\rangle=\frac{1}{4}\|u+v\|^2-\frac{1}{4}\|u-v\|^2$.

נזכור כי המכפלה הפנימית הוגדרה מעל הממשיים. (נתון).

יהיו $u,v\in V$, אזי $\frac{1}{4}\|u+v\|^2-\frac{1}{4}\|u-v\|^2=\frac{1}{4}\left(\sqrt{\langle u+v,u+v\rangle}\right)^2-\frac{1}{4}\left(\sqrt{\langle u-v,u-v\rangle}\right)^2$

$$=\frac{1}{4}\langle u+v,u+v\rangle-\frac{1}{4}\langle u-v,u-v\rangle=\frac{1}{4}\langle u,u+v\rangle+\frac{1}{4}\langle v,u+v\rangle-\frac{1}{4}\langle u-v,u-v\rangle=$$

↲ הפעלת החוק: $\langle x+y,z\rangle=\langle x,z\rangle+\langle y,z\rangle$.

$=\frac{1}{4}\langle u+v,u\rangle+\frac{1}{4}\langle u+v,v\rangle-\frac{1}{4}\langle u-v,u-v\rangle$ (מאחר שהמכפלה היא מעל הממשיים מתקיים $\langle x,y\rangle=\langle y,x\rangle\quad\forall x,y\in V$).

$$=\frac{1}{4}\langle u,u\rangle+\frac{1}{4}\langle v,u\rangle+\frac{1}{4}\langle u,v\rangle+\frac{1}{4}\langle v,v\rangle-\frac{1}{4}\langle u-v,u-v\rangle=$$

$$=\frac{1}{4}\|u\|^2+\frac{1}{4}\langle u,v\rangle+\frac{1}{4}\langle u,v\rangle+\frac{1}{4}\|v\|^2-\frac{1}{4}\langle u-v,u-v\rangle=$$

$$=\frac{1}{4}\|u\|^2+\frac{1}{2}\langle u,v\rangle+\frac{1}{4}\|v\|^2-\frac{1}{4}\left(\langle u,u-v\rangle-\langle v,u-v\rangle\right)=$$

↲ הפעלת החוקים : $\langle x+y,z\rangle=\langle x,z\rangle+\langle y,z\rangle$, ו- $\langle \alpha x,y\rangle=\alpha\langle x,y\rangle$, עם $\alpha=-1$.

$$=\frac{1}{4}\|u\|^2+\frac{1}{2}\langle u,v\rangle+\frac{1}{4}\|v\|^2-\frac{1}{4}\left(\langle u-v,u\rangle-\langle u-v,v\rangle\right)=$$

↲ הפעלת החוק: $\langle x,y\rangle=\langle y,x\rangle \quad \forall x,y\in V$, שתקף מעל הממשיים.

$$=\frac{1}{4}\|u\|^2+\frac{1}{2}\langle u,v\rangle+\frac{1}{4}\|v\|^2-\frac{1}{4}\left(\langle u,u\rangle-\langle v,u\rangle-\langle u,v\rangle+\langle v,v\rangle\right)=$$

$$=\frac{1}{4}\|u\|^2+\frac{1}{2}\langle u,v\rangle+\frac{1}{4}\|v\|^2-\frac{1}{4}\left(\|u\|^2-2\langle v,u\rangle+\|v\|^2\right)$$

$$=\frac{1}{4}\|u\|^2+\frac{1}{2}\langle u,v\rangle+\frac{1}{4}\|v\|^2-\frac{1}{4}\|u\|^2+\frac{1}{2}\langle v,u\rangle-\frac{1}{4}\|v\|^2$$

$$=+\frac{1}{2}\langle u,v\rangle+\frac{1}{2}\langle v,u\rangle=\frac{1}{2}\langle u,v\rangle+\frac{1}{2}\langle u,v\rangle=\langle u,v\rangle$$

↲ $\langle x,y\rangle=\langle y,x\rangle \quad \forall x,y\in V$ מעל הממשיים.

תרגיל מס' 1 - מספרים מרוכבים

הגשה עד: 9.11.2003 .

א. מודול, ארגומנט וצורה קוטבית:

מצאו מודול וארגומנט של המספרים הבאים והעבירו אותם לצורה קוטבית.

1. $z = 3-3i$
2. $z = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$
3. $z = -25i$
4. $z = 9$
5. $z = 1 + (\cot\alpha)i$, α פרמטר כלשהוא

ב. פעולות יסודיות במרוכבים:

יהיו $p = 2+i$, $v = 3$, $u = 2i$, $w = 5-2i$, $z = 1+4i$. חשבו:

1. $p - 3w + \frac{u}{p+v}$
2. $\bar{z} + |w| - 3p$
3. z^3
4. יהיו $w = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$, $z = 2-2i$. חשבו $\arg\left(\frac{z^3\overline{w}}{\bar{z}w}\right)$.

ג. פתרון משוואות במספרים מרוכבים:

מצאו לכל משוואה את כל פתרונותיה.

1. $2z^2 = 3\bar{z}$
2. $3z^2 + 2z + 1 = 0$
3. $|z| + z = 2 + i$

ד. מקומות גיאומטריים:

מהו המקום הגיאומטרי של כל המספרים המרוכבים המקיימים:

1. $\mathrm{Im}(z) < 6$
2. $2 < |z-5| < 3$
3. $-\frac{\pi}{3} < \arg z < \frac{\pi}{2}$

ה.תכונות המספרים המרוכבים:

1. הוכיחו כי לכל $z \in C$, $\mathrm{Im}(z) = \frac{z-\bar{z}}{2i}$.
2. הוכיחו או הפריכו: לכל z_1, z_2 מרוכבים, קיים k ממשי כך ש- $z_1\bar{z}_2 - \bar{z}_1 z_2 = ki$.

ו.תכונות המספרים המרוכבים - המשך:

את השאלות בסעיף זה יש לפתור ללא ביצוע הצבות מן הצורה $z = a + bi$, אלא בעזרת תכונות מספרים מרוכבים בלבד!

1. הוכיחו כי הביטוי $(z+1-2i)^{2003} + (\bar{z}+1+2i)^{2003}$ ממשי טהור לכל z מרוכב.
2. הוכיחו או הפריכו: לכל z,w מרוכבים כך ש- $\mathrm{Im}(w) \neq 0$ הביטוי $\frac{z \cdot w + \bar{z} \cdot \overline{w}}{w - \overline{w}}$ הוא מדומה טהור.
3. הוכח או הפרך: אם $0 \neq z \in C$ ו- $w = \bar{z}$ אזי $\frac{w}{z^2} - \frac{z}{w^2}$ מדומה טהור.
4. יהיו t ו- w שני מספרים מרוכבים המקיימים $t \neq w$ ו- $|t| = |w|$. הוכיחו כי $\frac{(t+w)}{(t-w)}$ הוא מספר מדומה טהור.

בהצלחה!

(1)

פתרון תרגיל מס' 1

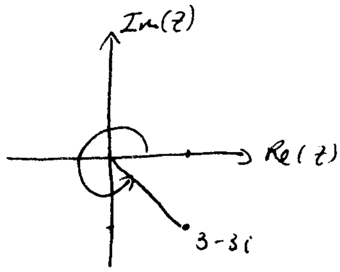
א.

1.

$|z| = \sqrt{3 + (-3)^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$

$tg(\arg z) = \frac{-3}{3} = -1 \Rightarrow \arg z = \frac{7\pi}{4}$

$z = 3\sqrt{2}\, e^{\frac{7\pi}{4} i}$



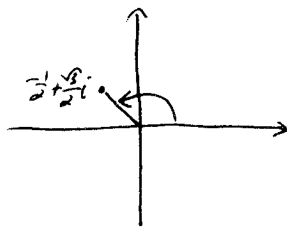
2.

$|z| = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 1$

$tg(\arg z) = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{1}{2}} = -\sqrt{3}$

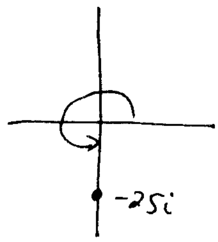
$\arg z = \frac{2\pi}{3}$

$z = e^{\frac{2\pi}{3} i}$



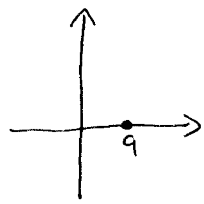
3.

$\left.\begin{array}{l} |z| = 25 \\ \arg z = \frac{3\pi}{2} \end{array}\right\} \quad z = 25 e^{\frac{3\pi}{2} i}$



4.

$\left.\begin{array}{l} |z| = 9 \\ \arg z = 0 \end{array}\right\} \quad z = 9 e^{0i}$



5.

$|z| = \sqrt{1 + \cot^2\alpha} = \frac{1}{\sin\alpha}$

$tg(\arg z) = \frac{\cot\alpha}{1} = \cot\alpha = tg\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \Rightarrow \arg z = \frac{\pi}{2} - \alpha$

ב. 1.

$p - 3w + \frac{4}{p+v} = (2+i) - 3(5-2i) + \frac{2i}{(2+i)+3} =$

$= 2 + i - 15 + 6i + \frac{2i\,(5-i)}{(5+i)(5-i)} = -13 + 7i + \frac{10i + 2}{25+1} =$

$= -13 + 7i + \frac{5}{13} i + \frac{1}{13} = -12\frac{12}{3} + 7\frac{5}{13} i$

2

ב.

$$\bar{z}+|w|-3p = \overline{1+4i} + |5-2i| - 3(2+i) =$$
$$= 1-4i+\sqrt{25+4}-6-3i = (-5+\sqrt{29})-7i$$

ג.

$$z^3 = (1+4i)^3 = 1+12i-48-64i = -47-52i$$

$$\boxed{(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3b^2a+b^3}$$

ד.

$$t = \frac{z^3\bar{w}}{\bar{z}w} = \frac{z^4(\bar{w})^2}{|z|^2\cdot|w|^2} = \frac{[(2-2i)^2]^2\cdot\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^2}{(4+4)\left(\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\right)} =$$

נכפול מונה ומכנה
ב $z\bar{w}$

$$= \frac{(\cancel{4}-8i-\cancel{4})^2\cdot\left(\frac{1}{4}-\frac{\sqrt{3}}{2}i-\frac{3}{4}\right)}{8} =$$

$$= \frac{-\overset{8}{\cancel{64}}\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)}{\cancel{8}} = 4+4\sqrt{3}i$$

ה. 1.

$$2z^2 = 3\bar{z}$$

נציב $z=a+bi$

$$2(a+bi)^2 = 3(a-bi)$$
$$2(a^2+2abi-b^2) = 3(a-bi)$$
$$2a^2+4abi-2b^2 = 3a-3bi$$

לכן:

$$\begin{cases} 2a^2-2b^2 = 3a \\ 4ab = -3b \Rightarrow b(4a+3)=0 \Rightarrow b=0 \text{ או } a=-\frac{3}{4} \end{cases}$$

* אם $b=0$: משוואה I

$$2a^2=3a$$
$$a(2a-3)=0$$
$$a=0 \text{ או } a=\frac{3}{2}$$

* אם $a=-\frac{3}{4}$: משוואה I

$$2\cdot\frac{9}{16}-2b^2=-\frac{9}{4}$$
$$2b^2=\frac{27}{8}$$
$$b^2=\frac{27}{4} \Rightarrow b=\pm\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

לכן הפתרונות הם:

$$z_1=0,\ z_2=\frac{3}{2},\ z_{3,4}=-\frac{3}{4}\pm\frac{3\sqrt{3}}{134}i$$

3

2.

$$3z^2+2z+1=0$$

$$z_{1,2}=\frac{-2\pm\sqrt{4-12}}{6}=\frac{-2\pm\sqrt{-8}}{6}=\frac{-1\pm\sqrt{-2}}{3}=\frac{-1\pm\sqrt{2i^2}}{3}=$$

$$=\frac{-1\pm\sqrt{2}i}{3} \to z_1=\frac{-1+\sqrt{2}i}{3}, \quad z_2=\frac{-1-\sqrt{2}i}{3}$$

3.

$$|z|+z=2+i$$

נציב $z=a+bi$:

$$|a+bi|+a+bi=2+i$$

$$\sqrt{a^2+b^2}=(2-a)+(1-b)i$$

לכן:

$$\begin{cases}\sqrt{a^2+b^2}=2-a \\ 0=1-b \Rightarrow b=1\end{cases}$$

נציב $b=1$ במשוואה I:

$$\sqrt{a^2+1}=2-a \quad / (\;)^2$$

$$a^2+1=(2-a)^2$$

$$\cancel{a^2}+1=4-4a+\cancel{a^2}$$

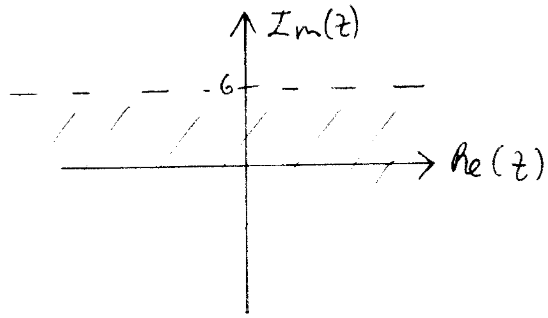
$$4a=3 \Rightarrow a=\frac{3}{4}$$

לכן $z=\frac{3}{4}+i$

3.

1.

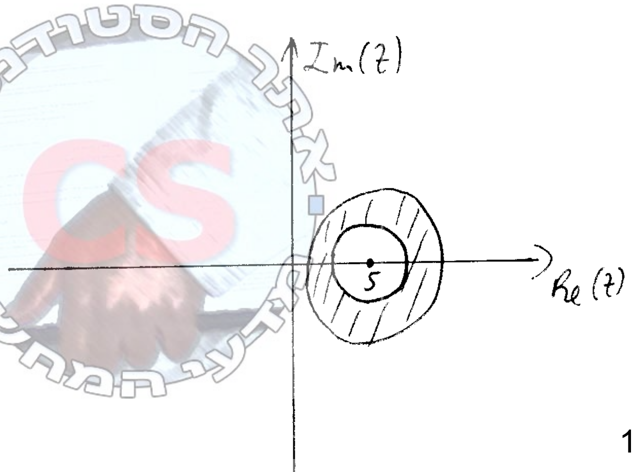
$Im(z)<6$



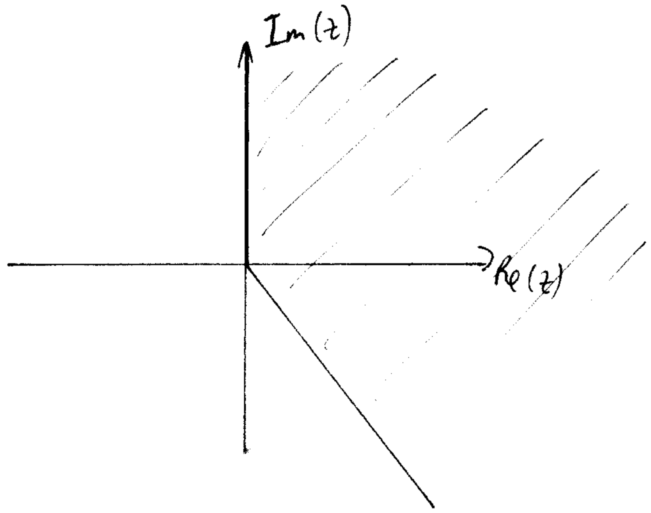
2.

$2<|z-5|<3$

אלו הנקודות הנמצאות בין שני המעגלים, האחד ברדיוס 2 והשני ברדיוס 3 שמרכזם בנק' $z=5+0i$



4



3. $-\frac{\pi}{3} < \arg t < \frac{\pi}{2}$

ה) 1.

ב) הטענה נכונה. הוכחה:

נסמן $t = z_1\overline{z_2}$, אזי

$$z_1\overline{z_2} - \overline{z_1}z_2 = z_1\overline{z_2} - \overline{z_1\overline{z_2}} = t - \bar{t} = Im(t)\cdot 2i$$

לכן נבחר $k = 2Im(t)$! וזה הינו ממשי ולכן הטענה נכונה.

מש"ל.

ו) 1. הוכחה:

נסמן $w = (z+1-2i)^{2003} + (\bar{z}+1+2i)^{2003}$.

נראה כי $Im(w) = 0$:

$$\bar{w} = \overline{(z+1-2i)^{2003} + (\bar{z}+1+2i)^{2003}} =$$

$$\underset{\boxed{\overline{t+s} = \bar{t}+\bar{s}}}{=} \overline{(z+1-2i)^{2003}} + \overline{(\bar{z}+1+2i)^{2003}} \underset{\boxed{\overline{ts} = \bar{t}\bar{s}}}{=} \left(\overline{z+1-2i}\right)^{2003} + \left(\overline{\bar{z}+1+2i}\right)^{2003}$$

$$= (\bar{z}+1+2i)^{2003} + (z+1-2i)^{2003} = w$$

קיבלנו כי $\bar{w} = w$ ולכן

$$Im(w) = \frac{w - \bar{w}}{2i} = \frac{0}{2i} = 0$$

מש"ל.

(5)

2. הטענה נכונה. הוכחה:

ראשית נשים לב שהביטוי מוגדר כיון שנתון ש $Im(w)\neq 0$ ולכן $w-\bar{w}\neq 0$.

נסמן
$$t=\frac{zw+\bar{z}\bar{w}}{w-\bar{w}}$$

נחשב את $\bar{t}$:

$$\bar{t}=\overline{\left(\frac{zw+\bar{z}\bar{w}}{w-\bar{w}}\right)}\underset{\boxed{\overline{\left(\frac{p}{s}\right)}=\frac{\bar{p}}{\bar{s}}}}{=}\frac{\overline{(zw+\bar{z}\bar{w})}}{\overline{(w-\bar{w})}}\underset{\boxed{\bar{p}+\bar{s}=\overline{(p+s)}}}{=}\frac{\overline{zw}+\overline{\bar{z}\bar{w}}}{\bar{w}-\bar{\bar{w}}}=$$

$$\underset{\boxed{\overline{ps}=\bar{p}\bar{s},\ \bar{\bar{p}}=p\ !}}{=}\frac{\bar{z}\bar{w}+zw}{\bar{w}-w}=-\frac{zw+\bar{z}\bar{w}}{w-\bar{w}}=-t$$

קיבלנו כי $\bar{t}=-t$ ולכן

$$Re(t)=\frac{t+\bar{t}}{2}=\frac{t-t}{2}=0\Longrightarrow$$ t מדומה טהור

מש"ל.

3. הטענה נכונה. הוכחה:

ראשית נשים לב כי $z\neq 0$ ונתון $\bar{z}=w$ ולכן גם $w\neq 0$ ולכן הביטוי מוגדר.

נסמן:

$$t=\frac{w}{z^2}-\frac{z}{w^2}\underset{\boxed{w=\bar{z}\ \text{נתון}}}{=}\frac{\bar{z}}{z^2}-\frac{z}{(\bar{z})^2}=\frac{\bar{z}^3-z^3}{(z\bar{z})^2}=$$

$$\underset{\boxed{z\bar{z}=|z|^2}}{=}\frac{\bar{z}^3-z^3}{|z|^4}$$

נראה כי $Re(t)=0$:

$$\bar{t}=\overline{\left(\frac{\bar{z}^3-z^3}{|z|^4}\right)}\underset{\boxed{\frac{\bar{p}}{\bar{s}}=\overline{\left(\frac{p}{s}\right)}}}{=}\frac{\overline{\bar{z}^3-z^3}}{\overline{|z|^4}}\underset{\boxed{\bar{p}+\bar{s}=\overline{ps},\ |z|=\overline{|z|}\ !}}{=}\frac{z^3-\bar{z}^3}{|z|^4}=-t$$

$$Re(t)=\frac{t+\bar{t}}{2}=\frac{t-t}{2}=0$$

קיבלנו כי $\bar{t}=-t$ ולכן

ולכן t מדומה טהור.

מש"ל.

(ט)

(4.) הוכחה:

נסמן $z = \dfrac{t+w}{t-w}$ אזי:

$$Re(z) = \frac{z+\bar{z}}{2} = \frac{\frac{t+w}{t-w} + \overline{\left(\frac{t+w}{t-w}\right)}}{2} \underset{\substack{\downarrow\\ \text{תכונות הצמוד}}}{=} \frac{\frac{t+w}{t-w} + \frac{\bar{t}+\bar{w}}{\bar{t}-\bar{w}}}{2} =$$

$$= \frac{(t+w)(\bar{t}-\bar{w}) + (\bar{t}+\bar{w})(t-w)}{2(t-w)(\bar{t}-\bar{w})} =$$

$$= \frac{(t\bar{t} + \cancel{w\bar{t}} - \cancel{t\bar{w}} - w\bar{w}) + (\bar{t}t + \cancel{\bar{w}t} - \cancel{\bar{t}w} - \bar{w}w)}{2(t-w)\overline{(t-w)}} =$$

$$= \frac{\cancel{2}t\bar{t} - \cancel{2}w\bar{w}}{\cancel{2}(t-w)\overline{(t-w)}} \underset{\substack{\downarrow\\ \boxed{z\bar{z}=|z|^2}}}{=} \frac{|t|^2-|w|^2}{|t-w|^2} \underset{\substack{\downarrow\\ \boxed{|t|=|w|}}}{=} \frac{0}{|t-w|^2} = 0$$

$Re(z)=0$ ולכן z מדומה טהור.

מש"ל.

החוג למדעי המחשב – אלגברה לינארית , סמסטר א' תשס"ד

תרגיל מס' 2

הגשה עד: 13.11.2003 .

<u>מספרים מרוכבים:</u>

1. חשבו: **א.** $(1+\sqrt{3}i)^{12}$ **ב.** $\left(\frac{1+i}{i}\right)^{8}$

2. מצאו את כל הפתרונות של המשוואות הבאות:

א. $(z+3)^5 = 243$

ב. $z^3(1+i)+i-1=0$

3. נתון כי $z=1-i$ **. חשבו את הביטוי** $\frac{z^8-z^6+z^4-z^2+1}{z^8+z^6-z^4+z^2-1}$.

4. נתון כי $|z_1|=|z_2|=|z_3|=|z_1+z_2+z_3|=2$ **. חשבו:** $|z_1z_2+z_1z_3+z_2z_3|$

<u>מטריצות:</u>

5. הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:
א. סכום שתי מטריצות משולשות מאותו סדר הוא מטריצה משולשת (מטריצה משולשת הינה מטריצה משולשת עליונה או תחתונה).
ב. סכום שתי מטריצות משולשות עליונות מאותו סדר הוא מטריצה משולשת עליונה.
ג. סכום שתי מטריצות משולשות תחתונות מאותו סדר הוא מטריצה משולשת תחתונה.
ד. סכום של שתי מטריצות אלכסוניות מאותו סדר הוא מטריצה אלכסונית.
ה. סכום של שתי מטריצות יחידה מאותו סדר הוא מטריצת יחידה.

6. נתון כי A מטריצה סימטרית ואנטי-סימטרית. מהי A ?

7. הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:
א. קבוצת המטריצות הסימטריות מסדר n (n פרמטר כלשהוא) סגורה תחת חיבור וכפל בסקלר.
ב. קבוצת המטריצות האנטי-סימטריות מסדר n (n פרמטר כלשהוא) סגורה תחת חיבור וכפל בסקלר.

הערה:
קבוצת מטריצות S סגורה תחת חיבור אם לכל $A,B\in S$ גם $A+B\in S$.
קבוצת מטריצות S סגורה תחת כפל בסקלר אם לכל $A\in S$ ולכל סקלר $\alpha\in R$ גם $\alpha A\in S$.

<u>בהצלחה!</u>

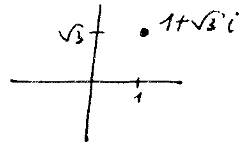
1

פתרון תרגיל מס 2

1. א. נסיון

$z = 1+\sqrt{3}i$

$|z| = \sqrt{1+3} = 2$



$tg(\arg z) = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3} \Rightarrow \arg z = \frac{\pi}{3}$

$z = 2e^{\pi/3\, i}$

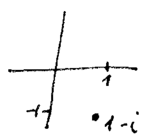
$z^{12} = \left(2e^{\frac{\pi}{3}i}\right)^{12} = 2^{12} e^{\frac{12\pi}{3}i} = 2^{12} e^{4\pi i} = 2^{12}\cdot\left(e^{2\pi i}\right)^2 =$

$= 2^{12}\cdot 1^2 = 2^{12}$

ב.

$z = \frac{1+i}{i} = \frac{(1+i)\cdot(-i)}{i\cdot(-i)} = \frac{-i+1}{1} = 1-i$

$|z| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$, $tg(\arg z) = -1 \Longrightarrow \arg z = \frac{7\pi}{4}$



$z^8 = \left(\sqrt{2}e^{\frac{7\pi}{4}i}\right)^8 = (\sqrt{2})^8\cdot e^{\frac{7\pi\cdot 8}{4}i} = 16\cdot e^{14\pi i} =$

$= 16\cdot\left(e^{2\pi i}\right)^7 = 16\cdot 1^7 = 16$

2. א.

$(z+3)^5 = 243$

$t^5 = 243$ נציב $t = z+3$ ונקבל

$t^5 = 243 = 243e^{0i}$

$t_0 = \sqrt[5]{243}\, e^{\frac{0+2\pi\cdot 0}{5}i} = 3$

$t_1 = \sqrt[5]{243}\, e^{\frac{0+2\pi\cdot 1}{5}i} = 3e^{\frac{2\pi}{5}i} = 3\left(\cos\frac{2\pi}{5} + i\sin\frac{2\pi}{5}\right)$

$t_2 = 3e^{\frac{0+2\pi\cdot 2}{5}i} = 3e^{\frac{4\pi}{5}i} = 3\left(\cos\frac{4\pi}{5} + i\sin\frac{4\pi}{5}\right)$

$t_3 = 3e^{\frac{0+2\pi\cdot 3}{5}i} = 3e^{\frac{6\pi}{5}i} = 3e^{\pi i}\cdot e^{\frac{\pi}{5}i} = -3e^{\pi/5\, i} = -3\left(\cos\frac{\pi}{5} + i\sin\frac{\pi}{5}\right)$

$t_4 = 3e^{\frac{0+2\pi\cdot 4}{5}i} = 3e^{\frac{8\pi}{5}i} = 3e^{\frac{3\pi}{5}i}\cdot e^{\pi i} = -3e^{\frac{3\pi}{5}i} =$

$= -3\left(\cos\frac{3\pi}{5} + i\sin\frac{3\pi}{5}\right)$

②

סה״כ לכן:

$z_i = t_i - 3 \qquad 0 \le i \le 4$ לכל

ב.

$$z^3(1+i) + i - 1 = 0$$

$$z^3 = \frac{1-i}{1+i} = \frac{(1-i)^2}{(1+i)(1-i)} = \frac{1-2i-1}{1+1} = -i = 1e^{\frac{3\pi}{2}i}$$

$$z_0 = \sqrt[3]{1}\, e^{\frac{\frac{3\pi}{2}+2\pi\cdot 0}{3}i} = e^{\frac{\pi}{2}i} = \underbrace{\cos\frac{\pi}{2}}_{0} + i\underbrace{\sin\frac{\pi}{2}}_{1} = i$$

$$z_1 = 1\, e^{\frac{\frac{3\pi}{2}+2\pi\cdot 1}{3}i} = e^{\frac{7\pi}{6}i} = -e^{\frac{\pi}{6}i} = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$$

$$z_2 = 1\, e^{\frac{\frac{3\pi}{2}+2\pi\cdot 2}{3}i} = e^{\frac{11\pi}{6}i} = -e^{\frac{5\pi}{6}i} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$$

3.

$$z^2 = (1-i)^2 = 1-2i-1 = -2i$$

$$z^4 = (1-i)^4 = (-2i)^2 = -4$$

$$z^6 = (1-i)^6 = (-2i)^3 = (-2)^3 \cdot i^3 = (-8)\cdot(-i) = 8i$$

$$z^8 = (1-i)^8 = (-2i)^4 = 16$$

לכן:

$$\frac{z^8 - z^6 + z^4 - z^2 + 1}{z^8 + z^6 - z^4 + z^2 - 1} = \frac{16 - 8i - 4 + 2i + 1}{16 + 8i + 4 - 2i - 1} = \frac{13 - 6i}{19 + 6i} =$$

$$= \frac{(13-6i)(19-6i)}{(19+6i)(19-6i)} = \frac{247 - 114i - 78i - 36}{361 + 36} = \frac{211 - 192i}{397} =$$

$$= \frac{211}{397} - \frac{192}{397}i$$

4.

$$|z_1 z_2 + z_1 z_3 + z_2 z_3| = \left|\frac{z_1 z_2 z_3}{z_3} + \frac{z_1 z_2 z_3}{z_2} + \frac{z_1 z_2 z_3}{z_1}\right| =$$

$$= \left|z_1 z_2 z_3\left(\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \frac{1}{z_3}\right)\right| \underset{\boxed{|x||y|=|xy|}}{=} |z_1|\cdot|z_2|\cdot|z_3|\cdot\left|\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \frac{1}{z_3}\right| =$$

$$\underset{\boxed{(*)\ |z_1|=|z_2|=|z_3|=2}}{=} 8\left|\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \frac{1}{z_3}\right| =$$

③

$$= 8\cdot\left|\frac{\bar z_1}{|z_1|^2}+\frac{\bar z_2}{|z_2|^2}+\frac{\bar z_3}{|z_3|^2}\right| = 8\cdot\left|\frac{\bar z_1}{4}+\frac{\bar z_2}{4}+\frac{\bar z_3}{4}\right| =$$

ידוע $z\cdot\bar z=|z|^2$ ולכן $\frac{1}{z}=\frac{\bar z}{|z|}$. שמותר כי נתון $|z_1|=|z_2|=|z_3|=2\neq0$

$|z_1|=|z_2|=|z_3|=2$ נתון

$$= 8\cdot\left|\frac{1}{4}(\bar z_1+\bar z_2+\bar z_3)\right| = 8\cdot\left|\frac{1}{4}\right|\cdot\left|\bar z_1+\bar z_2+\bar z_3\right| =$$

$|x|\cdot|y|=|xy|$

$$= 8\cdot\frac{1}{4}\cdot\left|\overline{z_1+z_2+z_3}\right| = 2\cdot\overline{|z_1+z_2+z_3|} = 2\cdot\bar 2 =$$

$\bar x+\bar y=\overline{x+y}$

$|\bar z|=|z|$

$$= 2\cdot 2 = 4$$

5. א. הטענה אינה נכונה. נביא דוגמא נגדית:

$A=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$ משולשת (עליונה) ! $B=\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}$ משולשת (תחתונה)

אבל $A+B=\begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix}$ אינה משולשת!

ב. הטענה נכונה. הוכחה:

תהיינה $A=[a_{ij}]$, $a_{ij}=0\ \forall i>j$

$B=[b_{ij}]$, $b_{ij}=0\ \forall i>j$

מט' ריבועיות משולשות עליונות מסדר n.

אזי מתקיים:

$A+B=[a_{ij}]+[b_{ij}]=[a_{ij}+b_{ij}]$, $\underbrace{a_{ij}+b_{ij}=0+0=0}_{\text{ולכן } A+B \text{ משולשת עליונה.}}$ $\forall i>j$

מש"ל.

ג. הטענה נכונה. הוכחה:

תהיינה $A=[a_{ij}]$, $a_{ij}=0\ \forall i<j$

$B=[b_{ij}]$, $b_{ij}=0\ \forall i<j$

מט' ריבועיות משולשות תחתונות מסדר n. אזי:

$A+B=[a_{ij}]+[b_{ij}]=[a_{ij}+b_{ij}]$, $\underbrace{a_{ij}+b_{ij}=0+0=0}_{\text{ולכן } A+B \text{ משולשת תחתונה.}}$ $\forall i<j$

מש"ל.

(4)

ד. הטענה נכונה. הוכחה:

תהיינה

$$A = [a_{ij}] \,, \quad a_{ij} = 0 \quad \forall\, i \neq j$$
$$B = [b_{ij}] \,, \quad b_{ij} = 0 \quad \forall\, i \neq j$$

מט' אלכסוניות מסדר n.

אזי מתקיים:

$$A+B = [a_{ij}] + [b_{ij}] = [a_{ij} + b_{ij}] \,, \quad a_{ij}+b_{ij} = 0+0=0 \quad \forall\, i \neq j$$

ולכן $A+B$ מט' אלכסונית.

ה. הטענה אינה נכונה. נביא דוגמא נגדית:

$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ מט' יחידה אבל

$$I_2 + I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

אינה מט' יחידה.

באופן כללי:

$$I_n + I_n = 2I_n = \begin{bmatrix} 2 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 2 \end{bmatrix}$$

אינה מט' יחידה.

6. תהי A מט' סימטרית ואנטי סימטרית.

A סימטרית ולכן $A^t = A$.

A אנטי סימטרית ולכן $A^t = -A$.

קיבלנו $A^t = A = -A \quad \Leftarrow \quad A = -A$

$\Leftarrow \quad 2A = [0] \quad \Leftarrow \quad A = [0]$.

לכן A היא בהכרח מט' האפס.

(5)

7. א. הטענה נכונה. הוכחה:

תהי S קבוצת המט' הסימטריות מסדר n עבור n כלשהו.

* נראה כי S סגורה תחת חיבור מט':

תהיינה $A,B\in S$ כלשהן. אזי

$$\underbrace{(A+B)^t = A^t+B^t}_{\boxed{\text{תכונות מט' משוחלפת}}} \underbrace{=}_{\boxed{A,B\in S \text{ ולכן סימטריות}}} A+B$$

$\Leftarrow$ $A+B\in S$

$\Leftarrow$ S סגורה תחת חיבור מט'.

* נראה כי S סגורה תחת כפל בסקלר:

יהי $\alpha\in\mathbb{R}$ סקלר כלשהו ותהי $A\in S$ כלשהי.

$A\in S$ ולכן A סימטרית, כלומר,

$$A=[a_{ij}] \qquad \forall\, 1\le i,j\le n \qquad a_{ij}=a_{ji}$$

$\Leftarrow$ לכל $1\le i,j\le n$ $\alpha a_{ij}=\alpha a_{ji}$

ולכן $\alpha A=\alpha[a_{ij}]=[\alpha a_{ij}]$ $\forall\, 1\le i,j\le n$ $\alpha a_{ij}=\alpha a_{ji}$

$\Leftarrow$ αA סימטרית.

$\Leftarrow$ S סגורה תחת כפל בסקלר.

ב. הטענה נכונה. הוכחה:

תהי S קב' המט' האנטי סימטריות מסדר n עבור n כלשהו.

* נראה כי S סגורה תחת חיבור מט':

תהיינה $A,B\in S$ כלשהן, אזי:

$$\underbrace{(A+B)^t = A^t+B^t}_{\text{תכונות מט' משוחלפת}} \underbrace{=}_{A,B\in S \text{ ולכן אנטי סימטריות}} -A-B = -(A+B)$$

$\Leftarrow$ $A+B\in S$

$\Leftarrow$ S סגורה תחת חיבור מט'.

6

(*) נראה כי S סגורה תחת כפל בסקלר:

יהי $\alpha \in \mathbb{R}$ סקלר כלשהו ותהי $A \in S$ כלשהי.

$A \in S$ ולכן אנטי-סימטרית, כלומר,

$$A = [a_{ij}] \quad \forall\, 1 \le i,j \le n \quad a_{ij} = -a_{ji}$$

$\Leftarrow$ לכל $1 \le i,j \le n$

$$\alpha a_{ij} = \alpha(-a_{ji}) = -(\alpha a_{ji})$$

ולכן

$$\alpha A = \alpha[a_{ij}] = [\alpha a_{ij}] \quad \forall\, 1 \le i,j \le n \quad \alpha a_{ij} = -\alpha a_{ij}$$

$\Leftarrow$ αA אנטי-סימטרית.

$\Leftarrow$ S סגורה תחת כפל בסקלר.

מש"ל.

החוג למדעי המחשב – אלגברה לינארית , סמסטר א' תשס"ד

תרגיל מס' 3

הגשה עד: 23.11.2003 .

.1

נתון: $C=\begin{pmatrix}0&-1&0\\1&2&-2\\3&1&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-1&2&-3\\1&0&1\end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix}1&2&-1&0\\1&0&2&1\end{pmatrix}$

חשבו: א. A^tBC^t ב. B^tB-I ג. B^tA^t

2. מצאו את קבוצת כל המטריצות A מסדר 2×2 המתחלפות בכפל עם המטריצה $B=\begin{pmatrix}2&-1\\1&0\end{pmatrix}$.

3. תהי $A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$ כך ש- $A^2=A$. מהם הערכים האפשריים ל- $a+d$?

4. הוכיחו:

א. אם A,B מטריצות מסדר $m\times n$ אזי A^tB-B^tA אנטי סימטרית.

ב. אם A,B מטריצות ריבועיות מאותו סדר ו- A סימטרית אזי B^tAB-I סימטרית.

ג. אם A,B מטריצות ריבועיות סימטריות מאותו סדר אזי ABA סימטרית.

5. הוכיחו כי אם A מטריצה ריבועית המקיימת $AA^t=A$ אזי $A^2=A$.

6. הוכיחו או הפריכו: קיימת מטריצה $A\in R(2\times 3)$ כך שמתקיים $AA^t=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$.

7. למה שווה $\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}^n$ עבור $n\in N$ כלשהוא? הוכיחו. (רמז: הוכחה באינדוקציה)

8. הוכיחו או הפריכו: לכל A,B מטריצות ריבועיות מסדר n כלשהוא אם $AC=BC$ עבור $C\neq[0]$ מטריצה ריבועית מסדר n, אזי $A=B$.

9. חשבו את דרגת המטריצה:

א. $\begin{pmatrix}0&1&2&0\\1&0&2&-1\\-1&2&4&1\\2&1&3&-2\end{pmatrix}$

ב. $\begin{pmatrix}0&3&1&1&4\\1&0&4&10&1\\-1&1&7&17&3\\2&2&2&4&3\end{pmatrix}$

בהצלחה!

1

פתרון תרגיל 3

1. א.

$$A^tBC^t=\begin{pmatrix}1&1\\2&0\\-1&2\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&2&-3\\1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&3\\-1&2&1\\0&-2&1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}0&2&-2\\-2&4&-6\\3&-2&5\\1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&3\\-1&2&1\\0&-2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2&8&0\\-4&18&-8\\2&-11&12\\0&-1&4\end{pmatrix}$$

ב.

$$B^tB-I=\begin{pmatrix}-1&1\\2&0\\-3&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&2&-3\\1&0&1\end{pmatrix}-I=$$

$$=\begin{pmatrix}2&-2&4\\-2&4&-6\\4&-6&10\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-2&4\\-2&3&-6\\4&-6&9\end{pmatrix}$$

ג. B מסדר 2×3 ולכן B^t מסדר 3×2

A " 2×4 " A^t " 4×2

$\Leftarrow$ הכפל של B^t ב- A^t משמאל אינו מוגדר.

2. נסמן $A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$.

$$AB=BA\implies\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&-1\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&-1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$$

$$\implies\begin{pmatrix}2a+b&-a\\2c+d&-c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2a-c&2b-d\\a&b\end{pmatrix}$$

②

לכן:

$$\begin{cases} 2a+b = 2a-c \Rightarrow b=-c \\ -a = 2b-d \\ 2c+d = a \\ -c = b \Rightarrow b=-c \end{cases}$$

לכן $b=-c$ ועי' הצבה במשוואות II ו III נקבל:

$$\begin{cases} b=-c \\ -a = -2c-d \Rightarrow b=-c\ ,\ a=2c+d \\ 2c+d=a \end{cases}$$

לכן קב' המטריצות המתחלפות בכפל עם המט' B הינה:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 2c+d & -c \\ c & d \end{pmatrix} \middle| \ c,d \in \mathbb{R} \right\}$$

③ נסמן $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ונתון $A^2=A$ ולכן:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ca+dc & cb+d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

ולכן:

$$\begin{cases} a^2+bc = a \\ b(a+d)=b \\ c(a+d)=c \\ cb+d^2=d \end{cases}$$

$\boxed{b \neq 0}$

$$\begin{cases} a^2+bc=a \\ a+d=1 \Rightarrow a+d=1 \\ c(a+d)=c \\ cb+d^2=d \end{cases}$$

לכן המקרה זה: $a+d=1$

$\boxed{b=0}$

$$\begin{cases} a^2=a \\ c(a+d)=c \Rightarrow c=0 \text{ או } a+d=0 \\ d^2=d \end{cases}$$

$\boxed{c=0}$

$$\begin{cases} a^2=a \Rightarrow \boxed{a=0 \text{ או } a=1} \\ d^2=d \Rightarrow \boxed{d=0 \text{ או } d=1} \end{cases}$$

$\Downarrow$

המקרה זה

$a+d=0$

$a+d=1$ או

$a+d=0$

$$\begin{cases} a^2=a \rightarrow \boxed{a=0} \text{ או } \boxed{a=1} \\ d^2=d \\ c=0 \end{cases}$$

$a=0$: $\begin{cases} d^2=d \\ d=0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{d=0}$

$a=1$: $\begin{cases} d=-1 \\ \cancel{d^2=d} \end{cases}$ אין פתרון

במקרה זה $a+d=0$

3

סה"כ קיבלנו כי אם $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ו- $A^2=A$ אזי $a+d=0$ או $a+d=1$ או $a+d=2$.

(שימו לב שהמסקנה כי $b=c=0$ ו- $a=0,1$ ו- $d=0,1$,

$a+d=0 \iff a=d=0$

$a+d=1 \iff (a=0$ ו- $d=1)$ או $(a=1$ ו- $d=0)$

$a+d=2 \iff a=d=1$).

4. א.

$$(A^tB-B^tA)^t = (A^tB)^t+(-B^tA)^t = (A^tB)^t-(B^tA)^t$$

$\boxed{(C+D)^t=C^t+D^t}$ $\boxed{(\alpha A)^t=\alpha(A^t)}$

$$= B^t(A^t)^t - A^t(B^t)^t = B^tA-A^tB = -(A^tB-B^tA)$$

$\boxed{(CD)^t=D^tC^t}$ $\boxed{(C^t)^t=C}$

$\Leftarrow$ A^tB-B^tA מט' אנטי-סימטרית.

ב.

$$(B^tAB-I)^t = (B^tAB)^t+(-I)^t = (B^t(AB))^t-(I^t)$$

$\boxed{(C+D)^t=C^t+D^t}$

אסוציאטיביות כפל מט' $(\alpha A)^t=\alpha(A^t)$ ו-

$$= (AB)^t(B^t)^t-I = B^tA^tB-I = B^tAB-I$$

$C^tD^t=(CD)^t$ ו- I מט' סימטרית

$(CD)^t=C^tD^t$ ו- $(C^t)^t=C$

A מט' סימטרית (נתון)

$\Leftarrow$ B^tAB-I מט' סימטרית.

ג.

$$(ABA)^t = (A(BA))^t = (BA)^tA^t = A^tB^tA^t = ABA$$

אסוציאטיביות כפל מט'

$\boxed{(CD)^t=C^tD^t}$

A,B מט' סימטריות (נתון)

$\Leftarrow$ ABA מט' סימטרית.

מש"ל.

(4)

(5)

$$(AA^t)^t = (A^t)^t A^t = AA^t$$

$\boxed{(CD)^t = D^tC^t}$ $\boxed{(C^t)^t = C}$

⇐ AA^t מט' סימטרית

אבל נתון $A=AA^t$ ולכן A מט' סימטרית,

כלומר, $A=A^t$ ולכן $A=AA^t=A\cdot A=A^2$

⇐ $A^2=A$.

מש"ל.

(6) הטענה אינה נכונה. למעשה לא קיימת מט' $A\in R(2\times3)$ כך ש

$AA^t=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$.

נניח בשלילה שקיימת A כנ"ל. נסמן $A=\begin{pmatrix}a&b&c\\d&e&f\end{pmatrix}$.

אזי:

$$AA^t=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix}a&b&c\\d&e&f\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&d\\b&e\\c&f\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix}(a^2+b^2+c^2)&(ad+be+cf)\\(ad+be+cf)&(d^2+e^2+f^2)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases}a^2+b^2+c^2=0 & \Rightarrow a=b=c=0\\ d^2+e^2+f^2=0 & \Rightarrow d=e=f=0\\ ad+be+cf=1\end{cases} \Rightarrow ad+be+cf=0\neq1$$

סתירה למשוואה 3!

⇐ קיבלנו סתירה ולכן הנחת השלילה היא... מט' לא קיימת A כנ"ל.

מש"ל.

7. טענה: לכל $n\in\mathbb{N}$

$$\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}^n=\begin{pmatrix}2^{n-1}&2^{n-1}\\2^{n-1}&2^{n-1}\end{pmatrix}$$

נוכיח את הטענה באינדוקציה:

עבור $n=1$:

$$\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}^1=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2^0&2^0\\2^0&2^0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2^{1-1}&2^{1-1}\\2^{1-1}&2^{1-1}\end{pmatrix}\quad\checkmark$$

נניח את נכונות הטענה עבור n טבעי כלשהו ונוכיח אותה עבור $n+1$.

צ"ל:

$$\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}^{n+1}=\begin{pmatrix}2^{n}&2^{n}\\2^{n}&2^{n}\end{pmatrix}$$

נוכיח זאת:

$$\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}^{n+1}\underset{\text{אסוציאטיביות כפל מט'}}{=}\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}^{n}\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}\underset{\text{הנחת האינדוקציה}}{=}\begin{pmatrix}2^{n-1}&2^{n-1}\\2^{n-1}&2^{n-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}2^{n-1}+2^{n-1}&2^{n-1}+2^{n-1}\\2^{n-1}+2^{n-1}&2^{n-1}+2^{n-1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\cdot2^{n-1}&2\cdot2^{n-1}\\2\cdot2^{n-1}&2\cdot2^{n-1}\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}2^{n}&2^{n}\\2^{n}&2^{n}\end{pmatrix}$$

לכן הטענה מתקיימת עבור $n+1$.

מש"ל.

8. הטענה אינה נכונה. נביא דוגמא נגדית:

ניקח $A=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$! $B=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$

אזי עבור $C=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\neq[0]$ מתקיים

$$AC=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}=[0]=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}=BC$$

אבל

$$A=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}=B$$

6

9 .א

$$A=\begin{pmatrix}0&1&2&0\\1&0&2&-1\\-1&2&4&1\\2&1&3&-2\end{pmatrix}\xrightarrow{R_1\leftrightarrow R_2}\begin{pmatrix}1&0&2&-1\\0&1&2&0\\-1&2&4&1\\2&1&3&-2\end{pmatrix}\xrightarrow[R_4-2R_1\to R_4]{R_3+R_1\to R_3}$$

$$\begin{pmatrix}1&0&2&-1\\0&1&2&0\\0&2&6&0\\0&1&-1&0\end{pmatrix}\xrightarrow[R_4-R_2\to R_4]{R_3-2R_2\to R_3}\begin{pmatrix}1&0&2&-1\\0&1&2&0\\0&0&2&0\\0&0&-3&0\end{pmatrix}\xrightarrow{R_4+\frac{3}{2}R_3\to R_4}$$

$$\begin{pmatrix}1&0&2&-1\\0&1&2&0\\0&0&2&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\Longrightarrow \operatorname{rank}(A)=3$$

.ב

$$A=\begin{pmatrix}0&3&1&1&4\\1&0&4&10&1\\-1&1&7&17&3\\2&2&2&4&3\end{pmatrix}\xrightarrow{R_1\leftrightarrow R_2}\begin{pmatrix}1&0&4&10&1\\0&3&1&1&4\\-1&1&7&17&3\\2&2&2&4&3\end{pmatrix}\xrightarrow[R_4-2R_1\to R_4]{R_3+R_1\to R_3}$$

$$\begin{pmatrix}1&0&4&10&1\\0&3&1&1&4\\0&1&11&27&4\\0&2&-6&-16&1\end{pmatrix}\xrightarrow{R_2\leftrightarrow R_3}\begin{pmatrix}1&0&4&10&1\\0&1&11&27&4\\0&3&1&1&4\\0&2&-6&-16&1\end{pmatrix}\xrightarrow[R_4-2R_2\to R_4]{R_3-3R_2\to R_3}$$

$$\begin{pmatrix}1&0&4&10&1\\0&1&11&27&4\\0&0&-32&-80&-8\\0&0&-28&-70&-7\end{pmatrix}\xrightarrow[-\frac{1}{7}R_4\to R_4]{-\frac{1}{8}R_3\to R_3}\begin{pmatrix}1&0&4&10&1\\0&1&11&27&4\\0&0&4&10&1\\0&0&4&10&1\end{pmatrix}\xrightarrow{R_4-R_3\to R_4}\begin{pmatrix}1&0&4&10&1\\0&1&11&27&4\\0&0&4&10&1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\Longrightarrow \operatorname{rank}(A)=3$$

החוג למדעי המחשב – אלגברה לינארית , סמסטר א' תשס"ד

תרגיל מס' 4

הגשה עד: 30.11.2003 .

1. מצאו את המטריצה ההופכית של המטריצה $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

2. א)קבעו לכל מטריצה עבור אילו ערכי a היא הפיכה.
ב) מצאו את המטריצה ההופכית עבור a=1 (באם היא הפיכה עבור a זה).

א. $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 4 \\ a & 4 & 10 & 1 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ ב. $\begin{pmatrix} 3+a & 1 & 1-a \\ 1 & 3 & 1 \\ 1-a & 1 & 3+a \end{pmatrix}$

3. קבעו עבור אילו ערכי a המטריצה $\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$ הפיכה . חשבו את המטריצה ההופכית עבור ערכים אלו.

4. תהי $A \in R^{2n \times 2n}$ וניתן להציג את A בצורה $\begin{bmatrix} B & C \\ D & E \end{bmatrix}$ כאשר B, C, D, E מטריצות הפיכות ב- $R^{n \times n}$. הוכיחו או הפריכו: A הפיכה.

5. יהיו $A, B \in R^{n \times n}$ ו- A הפיכה. הוכיחו או הפריכו: $(A+B)A^{-1}(A-B) = (A-B)A^{-1}(A+B)$

6. א. הוכיחו כי אם A מטריצה הפיכה שסכום אברי כל שורה שלה שווה ל- 1, אזי המטריצה ההופכית שלה מקיימת את אותו התנאי.

הדרכה:

הוכיחו ראשית כי עבור $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in R^{n \times 1}$ מתקיים כי סכום אברי כל שורה ב- A שווה ל- 1 אמ"מ $AB = B$ והעזרו בכך על מנת להוכיח את הנדרש.

בהצלחה!

1

פתרון תרגיל 4

שאלה 1:

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1&1&1&1&1&0&0&0\\ 1&1&-1&-1&0&1&0&0\\ 1&-1&1&-1&0&0&1&0\\ 1&-1&-1&1&0&0&0&1 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{R_3-R_1\to R_3\\ R_4-R_1\to R_4}]{R_2-R_1\to R_2} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1&1&1&1&1&0&0&0\\ 0&0&-2&-2&-1&1&0&0\\ 0&-2&0&-2&-1&0&1&0\\ 0&-2&-2&0&-1&0&0&1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2\leftrightarrow R_3} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1&1&1&1&1&0&0&0\\ 0&-2&0&-2&-1&0&1&0\\ 0&0&-2&-2&-1&1&0&0\\ 0&-2&-2&0&-1&0&0&1 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{R_3\cdot -\frac{1}{2}\to R_3\\ R_4\cdot -\frac{1}{2}\, R_4}]{R_2\cdot -\frac{1}{2}\to R_2} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1&1&1&1&1&0&0&0\\ 0&1&0&1&\frac{1}{2}&0&-\frac{1}{2}&0\\ 0&0&1&1&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&0&0\\ 0&1&1&0&\frac{1}{2}&0&0&-\frac{1}{2} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[R_4-R_2\to R_4]{R_1-R_2\to R_1} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1&0&1&0&\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}&0\\ 0&1&0&1&\frac{1}{2}&0&-\frac{1}{2}&0\\ 0&0&1&1&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&0&0\\ 0&0&1&-1&0&0&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2} \end{array}\right) \xrightarrow[R_1-R_3\to R_1]{R_4-R_3\to R_4} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1&0&0&-1&0&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0\\ 0&1&0&1&\frac{1}{2}&0&-\frac{1}{2}&0\\ 0&0&1&1&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&0&0\\ 0&0&0&-2&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_4\cdot -\frac{1}{2}\to R_4} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1&0&0&-1&0&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0\\ 0&1&0&1&\frac{1}{2}&0&-\frac{1}{2}&0\\ 0&0&1&1&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&0&0\\ 0&0&0&1&\frac{1}{4}&-\frac{1}{4}&-\frac{1}{4}&\frac{1}{4} \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{R_2-R_4\to R_2\\ R_3-R_4\to R_3}]{R_1+R_4\to R_1} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1&0&0&0&\frac{1}{4}&\frac{1}{4}&\frac{1}{4}&\frac{1}{4}\\ 0&1&0&0&\frac{1}{4}&\frac{1}{4}&-\frac{1}{4}&-\frac{1}{4}\\ 0&0&1&0&\frac{1}{4}&-\frac{1}{4}&\frac{1}{4}&-\frac{1}{4}\\ 0&0&0&1&\frac{1}{4}&-\frac{1}{4}&-\frac{1}{4}&\frac{1}{4} \end{array}\right)$$

$$\Longrightarrow \begin{pmatrix} 1&1&1&1\\ 1&1&-1&-1\\ 1&-1&1&-1\\ 1&-1&-1&1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4}&\frac{1}{4}&\frac{1}{4}&\frac{1}{4}\\ \frac{1}{4}&\frac{1}{4}&-\frac{1}{4}&-\frac{1}{4}\\ \frac{1}{4}&-\frac{1}{4}&\frac{1}{4}&-\frac{1}{4}\\ \frac{1}{4}&-\frac{1}{4}&-\frac{1}{4}&\frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

שאלה 2:

ג)

$$\begin{pmatrix} 3&1&1&4\\ a&4&10&1\\ 1&7&17&3\\ 2&2&4&3 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3\leftrightarrow R_1} \begin{pmatrix} 1&7&17&3\\ a&4&10&1\\ 3&1&1&4\\ 2&2&4&3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{R_3-3R_1\to R_3\\ R_4-2R_1\to R_4}]{R_2-aR_1\to R_2} \begin{pmatrix} 1&7&17&3\\ 0&(4-7a)&(10-17a)&(1-3a)\\ 0&-20&-50&-5\\ 0&-12&-30&-3 \end{pmatrix}$$

②

$$\xrightarrow[-\frac{1}{3}R_4 \to R_4]{-\frac{1}{5}R_3 \to R_3} \begin{pmatrix} 1 & 7 & 17 & 3 \\ 0 & (4-7a) & (10-17a) & (1-3a) \\ 0 & 4 & 10 & 1 \\ 0 & 4 & 10 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_4 - R_3 \to R_4} \begin{pmatrix} 1 & 7 & 17 & 3 \\ 0 & 4-7a & 10-17a & 1-3a \\ 0 & 4 & 10 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

⇐ לא משנה לגבי המט', אבל ברור כי דרגתה קטנה מ-4

לכל **a** (כיוון שקיבלנו שורת אפסים).

⇐ לא קיים ערך a שעבורו המט' הפיכה.

(וכמובן לא ניתן לחשב את המט' ההופכית עבור a=1).

ג.

$$\begin{pmatrix} 3+a & 1 & 1-a \\ 1 & 3 & 1 \\ 1-a & 1 & 3+a \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 + R_1 \to R_3} \begin{pmatrix} 3+a & 1 & 1-a \\ 1 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \cdot \frac{1}{2} \to R_3}$$

$$\begin{pmatrix} 3+a & 1 & 1-a \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_1} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3+a & 1 & 1-a \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3 - 2R_1 \to R_2]{R_2 - (3+a)R_1 \to R_2} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & -3a-8 & -2a-2 \\ 0 & -5 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{-\frac{1}{5}R_3 \to R_3} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & (-3a-8) & (-2a-2) \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_3} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & (-3a-8) & (-2a-2) \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 + (3a+8)R_2 \to R_3}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{(-2a-2)} \end{pmatrix}$$

המט' לא הפיכה כאשר דרגתה $\neq 3$

⇐ המט' לא הפיכה כאשר $-2a-2=0$ ⇐ המט' לא הפיכה כאשר $a=-1$

$a = 1$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 - 4R_1 \to R_2}$$

③

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -11 & -4 & 1 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -11 & -4 & 1 & -4 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3+11R_2 \to R_3]{R_1-3R_2 \to R_1}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -11 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 40 & 1 & -4 & 11 \end{array}\right) \xrightarrow{\frac{1}{40}R_3 \to R_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -11 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{40} & -\frac{1}{10} & \frac{11}{40} \end{array}\right) \xrightarrow[R_1+11R_3 \to R_1]{R_2-4R_3 \to R_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{11}{40} & -\frac{1}{10} & \frac{1}{40} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{10} & \frac{2}{5} & -\frac{1}{10} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{40} & -\frac{1}{10} & \frac{11}{40} \end{array}\right) \Longrightarrow \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{11}{40} & -\frac{1}{10} & \frac{1}{40} \\ -\frac{1}{10} & \frac{2}{5} & -\frac{1}{10} \\ \frac{1}{40} & -\frac{1}{10} & \frac{11}{40} \end{pmatrix}$$

שאלה 3:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} a & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & a & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & a & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & a & 1 & 0 & 1 & 0 \\ a & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & a & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3-R_1 \to R_3]{R_2-aR_1 \to R_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & a & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1-a^2 & 1-a & 1 & -a & 0 \\ 0 & 1-a & a-1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3 \cdot \frac{1}{1-a} \to R_3]{R_2 \cdot \frac{1}{1-a} \to R_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & a & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & a+1 & 1 & \frac{1}{1-a} & \frac{-a}{1-a} & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & \frac{-1}{1-a} & \frac{1}{1-a} \end{array}\right)$$

$\boxed{\text{אם } a \neq 1}$

$\boxed{a=1}$ אם

אם $a=1$ המט' המדורגת נראית

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

כלומר, דרגתה $= 1 \neq 3$
ולכן לא הפיכה.

$$\xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & a & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -\frac{1}{1-a} & \frac{1}{1-a} \\ 0 & a+1 & 1 & \frac{1}{1-a} & \frac{-a}{1-a} & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3-(a+1)R_2 \to R_3]{R_1-aR_2 \to R_1}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & a+1 & 0 & \frac{1}{1-a} & \frac{-a}{1-a} \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -\frac{1}{1-a} & \frac{1}{1-a} \\ 0 & 0 & a+2 & \frac{1}{1-a} & \frac{1}{1-a} & \frac{-a-1}{1-a} \end{array}\right) \xrightarrow[R_3 \cdot \frac{1}{a+2} \to R_3]{\boxed{a \neq -2}}$$

$\boxed{a=-2}$ אם

כאשר $a=-2$ המט' המדורגת נראית

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

דרגתה $= 2 \neq 3$ ולכן לא הפיכה.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & a+1 & 0 & \frac{1}{1-a} & \frac{-a}{1-a} \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -\frac{1}{1-a} & \frac{1}{1-a} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{(a+2)(1-a)} & \frac{1}{(a+2)(1-a)} & \frac{-a-1}{(a+2)(1-a)} \end{array}\right) \xrightarrow[R_1-(a+1)R_3 \to R_1]{R_2+R_3 \to R_2}$$

(4)

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{-a-1}{(a+2)(1-a)} & \frac{1}{(a+2)(1-a)} & \frac{1}{(a+2)(1-a)} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{(a+2)(1-a)} & \frac{3-a}{(a+2)(1-a)} & \frac{1}{(a+2)(1-a)} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{(a+2)(1-a)} & \frac{1}{(a+2)(1-a)} & \frac{-a-1}{(a+2)(1-a)} \end{array}\right)$$

סה״כ המט׳ הפיכה עבור $a \neq 1,-2$ ואז:

$$\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{(a+2)(1-a)} \begin{pmatrix} -a-1 & 1 & 1 \\ 1 & 3-a & 1 \\ 1 & 1 & -a-1 \end{pmatrix}$$

שאלה 4:

הטענה אינה בהכרח נכונה.

אם ניקח $B=C=D=E$ (הניתנות לחשבון) אזי ב- A יש שורה מופיעה פעמיים

ולכן ניתן לאפסן ע״י ביצוע חיסור $R_i - R_j \to R_i$ כאשר השורה

ה-i זהה לשורה ה-j) $\Leftarrow$ דרגת $A < n$ ולכן A לא

הפיכה.

לדוגמא: ניקח $B=C=D=E=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I \to$ מט׳ הפיכה

אבל

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_4 - R_2 \to R_4]{R_3 - R_1 \to R_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\Leftarrow \underset{4}{\overset{\wedge}{}}\;\mathrm{rank}(A) = 2 < 4 \Leftarrow$ A לא הפיכה.

שאלה 5:

הטענה נכונה. הוכחה:

$$L = (A+B)A^{-1}(A-B) \underset{\substack{\downarrow \\ \text{דיסטריבוטיביות} \\ \text{כפל מט׳}}}{=} (AA^{-1} + BA^{-1})(A-B) \underset{\substack{\downarrow \\ AA^{-1}=I}}{=} (I + BA^{-1})(A-B) =$$

$$= A + BA^{-1}A - IB - BA^{-1}B \underset{\substack{\downarrow \\ A^{-1}A=I}}{=} A + BI - IB - BA^{-1}B = A + B - B - BA^{-1}B = A - BA^{-1}B$$

(5)

$$R = (A-B)A^{-1}(A+B) \underset{\downarrow}{=} (AA^{-1}-BA^{-1})(A+B) \underset{\downarrow}{=} (I-BA^{-1})(A+B) =$$

דיסטריבוטיביות של מט׳ $AA^{-1}=I$

$$= IA - BA^{-1}A + IB - BA^{-1}B = IA - IB + IB - BA^{-1}B =$$

$$= A - B + B - BA^{-1}B = A - BA^{-1}B = L$$

$$\Leftarrow \quad L = R$$

מש"ל.

שאלה 6:

תהי $A=[a_{ij}]_{i,j=1}^{n}$ מטריצה ריבועית הפיכה המקיימת $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}=1$ לכל $1\le i\le n$.

<u>טענת עזר:</u>

עבור $B=\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{n\times 1}$ ו- $A=[a_{ij}]_{i,j}^{n}\in\mathbb{R}^{n\times n}$ כלשהי

מתקיים $AB=B$ אמ"מ $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}=1$ לכל $1\le i\le n$.

הוכחת טענת העזר:

כיוון א׳ $(\Leftarrow)$: נניח ש $AB=B$.

$$\Longrightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}$$

לפי הגדרת כפל מט׳

$$\Longrightarrow \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{n} a_{1j} \\ \sum_{j=1}^{n} a_{2j} \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} a_{nj} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix} \Longrightarrow \forall\ 1\le i\le n \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij}=1$$

כיוון ב׳ $(\Rightarrow)$:

נניח שלכל $1\le i\le n$ $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}=1$. אזי:

$$AB = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix} \underset{\downarrow}{=} \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{n} a_{1j} \\ \sum_{j=2}^{n} a_{2j} \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} a_{nj} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix} = B$$

לפי הגדרת כפל מט׳

מכאן $AB=B$

- סוף הוכחת טענת העזר -

⑥

כעת, נחזור להוכחת הנדרש:

A הפיכה ולכן קיימת A^{-1} ומתקיים:

$$A^{-1}B \underset{\substack{\text{לפי טענת העזר} \\ B=AB}}{=} A^{-1}(AB) \underset{\substack{\text{אסוציאטיביות} \\ \text{כפל}}}{=} (A^{-1}A)B \underset{A^{-1}A=I}{=} IB = B$$

$\Leftarrow$ $A^{-1}B = B$

$\Leftarrow$ ב-A^{-1} סכום איברי כל שורה שווה ל-1 (לפי טענת העזר).

מש"ל.

תרגיל מס' 5 – מערכות משוואות לינאריות

הגשה עד: 7.12.2003 .

1. פתרו בשיטת האלימינציה של גאוס/גאוס-זורדן:

א. $\begin{cases} x+y+2z-w=3 \\ 2x-2y-z+w=1 \\ -x-y+z-w=0 \\ 3x+2y-z-2w=2 \end{cases}$

ב. $\begin{cases} -x+z=0 \\ x-2y+z=0 \\ -x-y+2z=0 \\ 2x+3y-5z=0 \end{cases}$

2. עבור אילו ערכי k למערכת יש פתרון יחיד / אין פתרון / אינסוףפתרונות:

א. $\begin{cases} x-2y+z+w=1 \\ x-2y+z-w=-1 \\ x-2y+z+kw=5 \end{cases}$

ב. $\begin{cases} kx+ky+kz=0 \\ (k-1)x+kz=k \\ x+ky=-k \end{cases}$

3. נתונה מערכת בעלת 4 משוואות ב- 4 נעלמים. המערכת המדורגת ששקולה לה היא מן הצורה:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} * & * & * & * & * \\ 0 & * & 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

כאשר * מציינת מספר השונה מאפס. העמודה הראשונה מתאימה למשתנה x, השניה ל- y, השלישית ל- z והרביעית ל- w.

א. כמה פתרונות יש למערכת הנתונה?
ב. איזה נעלם לא יכול להיות נעלם חופשי?
ג. כמה פרמטרים (נעלמים חופשיים) נחוצים על מנת להציג את כל הפתרונות של המערכת הנתונה?

4. ענו על שאלה 3 כאשר המערכת המדורגת היא מן הצורה $\left(\begin{array}{cccc|c} * & * & 0 & * & * \\ 0 & * & * & 0 & * \\ 0 & 0 & * & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$.

5. יהי (x,y,z,t) פתרון של המערכת $\begin{cases} y+z+t=0 \\ x-y+z-t=0 \\ -x+z-t=0 \end{cases}$ המקיים xyz=8. מצאו את ערך הביטוי x+y+z+t.

6. נתונה מערכת משוואות לינארית Ax=0. הוכיחו או הפריכו: אם x_1, x_2 פתרונות למערכת, אזי גם $x_1 - x_2$ פתרון למערכת.

7. נתונה מערכת משוואות לינארית Ax=b. הוכיחו או הפריכו: אם x_1, x_2 פתרונות למערכת, אזי אם $\alpha+\beta=1$ אזי גם $\alpha x_1 + \beta x_2$ פתרון למערכת.

בהצלחה!

1

פתרון תרגיל 5

שאלה 1:

א.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & -2 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & -1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{R_3+R_1\to R_3 \\ R_4-3R_1\to R_4}]{R_2-2R_1\to R_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -4 & -5 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & 3 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & -7 & 1 & -7 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_4}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & -7 & 1 & -7 \\ 0 & 0 & 3 & -2 & 3 \\ 0 & -4 & -5 & 3 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_4-4R_2\to R_4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & -7 & 1 & -7 \\ 0 & 0 & 3 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 23 & -1 & 23 \end{pmatrix} \xrightarrow{3R_4\to R_4}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & -7 & 1 & -7 \\ 0 & 0 & 3 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 69 & -3 & 69 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_4-23R_3\to R_4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & -7 & 1 & -7 \\ 0 & 0 & 3 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 43 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+y+2z-w=3 & \Rightarrow x=1 \\ -y-7z+w=-7 & \Rightarrow y=0 \\ 3z-2w=3 & \Rightarrow z=1 \\ 43w=0 & \Rightarrow w=0 \end{cases}$$

סה"כ: $(x,y,z,w)=(1,0,1,0)$

ב.

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{R_3-R_1\to R_3 \\ R_4+2R_1\to R_4}]{R_2+R_1\to R_2} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_4+\frac{3}{2}R_2\to R_4]{R_3-\frac{1}{2}R_2\to R_3} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -x+z=0 \\ -2y+2z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=z \\ y=z \end{cases}$$

סה"כ למערכת אינסוף פ. והם מהצורה (פ. כללי) (x,x,x).

(2)

שאלה 2:

(א)

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & k & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3-R_1\to R_3]{R_2-R_1\to R_2} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & k-1 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{-\frac{1}{2}R_2\to R_2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & k-1 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3-(k-1)R_2\to R_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5-k \end{array}\right)$$

* ס. יחיד: לכל k, $rank(A) = 2 < 3 =$ מס' הנעלמים ולכן לא קיים k עבורו למערכת יש פ. יחיד.
* אינסוף פ.: לכל k נותן כי $rank(A)=2<3$, עבור $k=5$ נקבל גם כי $rank(A)=rank(A|b)=2$, ולכן למערכת אינסוף פתרונות כאשר $k=5$.
* אין פתרון: עבור $k=5$ נקבל כי $rank(A|b)=3\neq 2=rank(A)$ ולכן למערכת אין פתרון.

(ב)

$$\begin{pmatrix} k & k & k & 0 \\ k-1 & 0 & k & k \\ 1 & k & 0 & -k \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1\leftrightarrow R_3} \begin{pmatrix} 1 & k & 0 & -k \\ k-1 & 0 & k & k \\ k & k & k & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3-kR_1\to R_3]{R_2-(k-1)R_1\to R_2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & k & 0 & -k \\ 0 & -k^2+k & k & k^2 \\ 0 & -k^2+k & k & k^2 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3-R_2\to R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & k & 0 & -k \\ 0 & -k^2+k & k & k^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

לכל k, $rank(A)=2 < 3=$ מס' הנעלמים. לכן לא יתכן פ. יחיד.
כמו כן, לכל k, אם $-k^2+k=k=0$ אזי $k=0$ ולכן $k^2=0$
ולכן מהכרח $rank(A)=rank(A|b) < 3$.
לכן, לכל k למערכת יש אינסוף פתרונות.

שאלה 3:

א. דרגת מ"ה המקדמים שווה לדרגת מ"ה המורחבת ושווה ל-3
וקטן ממס' הנעלמים שהוא 4 ולכן למערכת יש אינסוף פתרונות.

ב. y לא יכול להיות נעלם חופשי, כיון שערכו מתקבל ע"י העמודה ה-II.

ג. דרגת מ"ה 3 ולכן מס' הנעלמים החופשיים הוא 1 (= מס' הנעלמים שהוא 4 פחות דרגת מ"ה שהוא 3).

שאלה 4:

א. אינסוף פתרונות - הנימוק זהה לנימוק של סעיף א' בשאלה 3.

ב. במערכת זו כל הנעלמים יכולים להיות נעלמים חופשיים.

ג. כמו ב-3ג', דרוש משתנה חופשי 1 (אותו הנימוק).

שאלה 5:

נדרג את המערכת:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3+R_1 \to R_3}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3+R_2 \to R_3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x - y + z - t = 0 & \Rightarrow \boxed{x = -2z} \\ y + z + t = 0 & \Rightarrow \boxed{y = -4z} \\ 3z - t = 0 & \Rightarrow \boxed{t = 3z} \end{cases}$$

ר.פ. הכללי של המערכת הוא $(-2z, -4z, z, 3z)$.

9

נדרוש לכן, $(-2z)(-4z)\cdot z = 8$

ונקבל $8z^3=8$ ומשום $z^3=1$ ולכן $z=1$.

לכן עבור $z=1$ נקבל את הפתרון $(-2,-4,1,3)$

ולכן במקרה זה $x+y+z+t=-2$.

שאלה 6:

הטענה נכונה. הוכחה:

תהי $Ax=0$ מערכת משוואות לינארית ויהיו x_1,x_2 פתרונות שלה.

x_1,x_2 פתרונות של המערכת ולכן $Ax_1=0$ וגם $Ax_2=0$.

מתקיים:

$$A(x_1-x_2) \underset{\text{דיסטריביוטיביות כפל מט'}}{=} Ax_1-Ax_2 = 0-0=0$$

$\Leftarrow$ x_1-x_2 פתרון של המערכת.
מש"ל.

שאלה 7:

הטענה נכונה. הוכחה:

תהי $Ax=b$ מערכת משוואות לינארית ויהיו x_1,x_2 פתרונות של המערכת.

ויהיו α,β סקלרים כך שמתקיים $\alpha+\beta=1$. אזי:

$$A(\alpha x_1+\beta x_2) \underset{\text{דיסטריביוטיביות כפל מט'}}{=} A(\alpha x_1)+A(\beta x_2) \underset{\text{כפל מט' בסקלר}}{=} \alpha(Ax_1)+\beta(Ax_2) =$$

$$\underset{\substack{x_1,x_2 \text{ פתרונות} \\ \text{של המערכת ולכן} \\ Ax_1=Ax_2=b}}{=} \alpha b+\beta b = (\alpha+\beta)b \underset{\alpha+\beta=1 \text{ נתון}}{=} b$$

$\Leftarrow$ $\alpha x_1+\beta x_2$ פתרון של המערכת.
מש"ל.

תרגיל מס' 6

הגשה עד: 14.12.2003 .

1. חשבו את הדטרמיננטים הבאים:

א. $\begin{vmatrix} 5 & 7 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}$ ב. $\begin{vmatrix} \sin y & \cos y & \cos y \\ \sin x & \cos x & \cos x \\ \cos x & 1 & 2 \end{vmatrix}$ (עבור x, y כלשהם)

ג. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \cdots & n \\ -1 & 0 & 3 & 4 & 5 & 6 & \cdots & n \\ -1 & -2 & 0 & 4 & 5 & 6 & \cdots & n \\ -1 & -2 & -3 & 0 & 5 & 6 & \cdots & n \\ -1 & -2 & -3 & -4 & 0 & 6 & \cdots & n \\ -1 & -2 & -3 & -4 & -5 & 0 & \cdots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -2 & -3 & -4 & -5 & -6 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$ (דטמיננט מסדר n)

2. בעזרת דטרמיננט קיבעו עבור אילו ערכי x המטריצה $\begin{pmatrix} 2x+1 & x+2 & -x \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix}$ הפיכה.

3. בעזרת דטרמיננט קיבעו עבור אילו ערכי a המטריצה $\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$ הפיכה . חשבו את המטריצה ההופכית עבור ערכים אלו בעזרת המטריצה הצמודה הקלאסית.

4. יהי ABC משולש כאשר
$A = (x_1, y_1)$, $B = (x_2, y_2)$, $C = (x_3, y_3)$, $\forall 1 \le i \le 3 \quad x_i, y_i \in R$.
הביעו בעזרת דטרמיננט את שטח המשולש.

(רמז: הביטו תחילה בשטח המשולש ABC כאשר $C = (0,0)$).

5. הוכיחו כי לכל $A \in R^{3\times 3}$ מתקיים $A \cdot (adjA) = |A| \cdot I$.

הערה: עליכם להוכיח את הטענה עבור המקרה n=3 ספציפית. אין להוכיח את הטענה עבור n כלשהוא ומכאן להסיק את נכונותה עבור n=3, אלא להוכיחה במפורש עבור n=3.

6. נתון כי a ו- b שני מספרים שלמים. הוכיחו כי הביטוי $\begin{vmatrix} a+b & a & a & a \\ a & a+b & a & a \\ a & a & a+b & a \\ a & a & a & a+b \end{vmatrix}$ מתחלק ב- b ללא שארית.

7. נתון כי המספרים 2316, 4246, 5983 ו- 9071 מתחלקים ב-193 ללא שארית. הוכיחו כי ערךהדטרמיננט $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 & 6 \\ 4 & 2 & 4 & 6 \\ 5 & 9 & 8 & 3 \\ 9 & 0 & 7 & 1 \end{vmatrix}$ מתחלק גם הוא ללא שארית ב- 193 ללא חישוב מפורש של ערך הדטמיננט (כלומר, ע"י שימוש בתכונות דטרמיננטים בלבד).

8. הוכיחו או הפריכו: לכל מטריצה ריבועית A, A הפיכה אמ"ם A^tA הפיכה.

9. הוכיחו או הפריכו: לכל מטריצה ריבועית סימטרית A, A הפיכה אמ"מ $A+A^t$ הפיכה.

10. הוכיחו או הפריכו: לכל מטריצה ריבועית A, A הפיכה אמ"מ A^3+I הפיכה.

<u>בהצלחה!</u>

(1)

פתרון תרגיל 6

שאלה 1:

א)

$$\begin{vmatrix} 5 & 7 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} \underset{\text{פיתוח לפי } C_3}{=} \begin{vmatrix} 5 & 7 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 4 \end{vmatrix} \underset{R_1-7R_2\to R_1}{=} \begin{vmatrix} -16 & 0 & -20 \\ 3 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 4 \end{vmatrix}$$

$$\underset{\text{פיתוח לפי } C_2}{=} \begin{vmatrix} -16 & -20 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -64+60 = -4$$

ב)

$$\begin{vmatrix} \sin y & \cos y & \cos y \\ \sin x & \cos x & \cos x \\ \cos x & 1 & 2 \end{vmatrix} \underset{C_3-2C_2\to C_3}{\overset{C_1-\cos x C_2\to C_1}{=}} \begin{vmatrix} (\sin y-\cos x\cos y) & \cos y & -\cos y \\ (\sin x-\cos^2 x) & \cos x & -\cos x \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$\underset{\text{פיתוח לפי } R_3}{=} -\begin{vmatrix} \sin y-\cos x\cos y & -\cos y \\ \sin x-\cos^2 x & -\cos x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sin y-\cos x\cos y & \cos y \\ \sin x-\cos^2 x & \cos x \end{vmatrix} =$$

$$= \sin y\cos x - \cancel{\cos^2 x\cos y} - \cos y\sin x + \cancel{\cos^2 x\cos y} = \sin y\cos x - \cos y\sin x = \sin(y-x)$$

ג)

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \cdots & n \\ -1 & 0 & 3 & 4 & 5 & 6 & \cdots & n \\ -1 & -2 & 0 & 4 & 5 & 6 & \cdots & n \\ -1 & -2 & -3 & 0 & 5 & 6 & \cdots & n \\ -1 & -2 & -3 & -4 & 0 & 6 & \cdots & n \\ -1 & -2 & -3 & -4 & -5 & 0 & \cdots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ -1 & -2 & -3 & -4 & -5 & -6 & \cdots & 0 \end{vmatrix} \underset{\substack{\forall 2\le i\le n \\ R_i+R_1\to R_i}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \cdots & n \\ 0 & 2 & 6 & 8 & 10 & 12 & \cdots & 2n \\ 0 & 0 & 3 & 8 & 10 & 12 & \cdots & 2n \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 10 & 12 & \cdots & 2n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 12 & \cdots & 2n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & \cdots & 2n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & n \end{vmatrix}$$

$$\underset{\text{הדטרמיננטה של מט' משולשת שווה למכפלת איברי האלכסון הראשי}}{=} 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot\ldots\cdot n = n!$$

(2)

שאלה 2:

לפי משפט, A הפיכה אמ"מ $|A| \neq 0$.

$$A = \begin{pmatrix} 2x+1 & x+2 & -x \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 2x+1 & x+2 & -x \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & -3 \end{vmatrix} \underset{R_3 - 2R_2 \to R_3}{=} \begin{vmatrix} 2x+1 & x+2 & -x \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -7 \end{vmatrix}$$

$$\underset{\text{פיתוח לפי } R_3}{=} -7 \begin{vmatrix} 2x+1 & x+2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -7(2x+1-x-2) = -7(x-1) = 0$$

$\Leftarrow$ $x=1$

סה"כ לכן $|A| \neq 0$ אמ"מ $x \neq 1$

$\Leftarrow$ A הפיכה אמ"מ $x \neq 1$.

שאלה 3:

$$|A| = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} \underset{R_2 - R_3 \to R_2}{\overset{R_1 - aR_3 \to R_1}{=}} \begin{vmatrix} 0 & 1-a & 1-a^2 \\ 0 & a-1 & 1-a \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} \underset{\text{פיתוח לפי } C_1}{=} \begin{vmatrix} 1-a & 1-a^2 \\ a-1 & 1-a \end{vmatrix} =$$

$$= (1-a)^2 \begin{vmatrix} 1 & 1+a \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = (1-a)^2(1+1+a) = (a+2)(1-a)^2 = 0 \Rightarrow a=-2 \text{ או } a=1$$

$\Leftarrow$ המט' הפיכה כאשר $a \neq -2,1$.

נמצא את A^{-1} בעזרת $adj(A)$ כאשר $a \neq -2,1$:

לפי משפט ידוע שכאשר A הפיכה אזי $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot adj(A)$.

נחשב את $adj\,A$:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} a & 1 \\ 1 & a \end{vmatrix} = a^2 - 1$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & a \end{vmatrix} = -(a-1) = -a+1 = 1-a$$

③

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 1 & a \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1-a$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & a \end{vmatrix} = 1-a$$

$$A_{22} = \begin{vmatrix} a & 1 \\ 1 & a \end{vmatrix} = a^2-1$$

$$A_{23} = -\begin{vmatrix} a & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -(a-1) = 1-a$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a & 1 \end{vmatrix} = 1-a$$

$$A_{32} = -\begin{vmatrix} a & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -(a-1) = 1-a$$

$$A_{33} = \begin{vmatrix} a & 1 \\ 1 & a \end{vmatrix} = a^2-1$$

לכן:

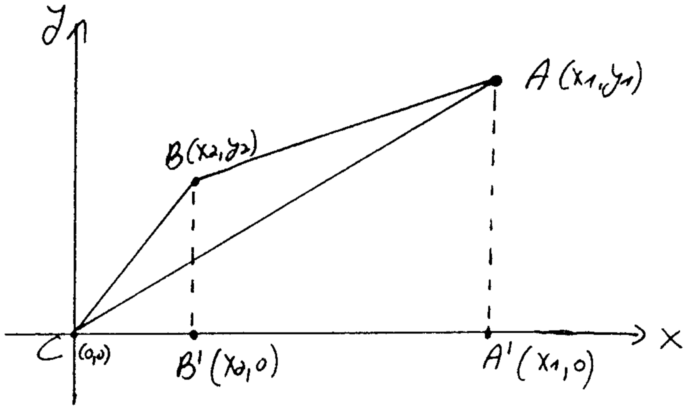
$$\operatorname{adj}(A) = \begin{pmatrix} a^2-1 & 1-a & 1-a \\ 1-a & a^2-1 & 1-a \\ 1-a & 1-a & a^2-1 \end{pmatrix}$$

ולכן:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \operatorname{adj}(A) = \frac{1}{(a+2)(1-a)} \begin{pmatrix} -(a+1) & 1 & 1 \\ 1 & -(a+1) & 1 \\ 1 & 1 & -(a+1) \end{pmatrix}$$

שאלה 4:

נניח תחילה: במשולש ABC אשר קודקודו C ממוקם בראשית ($C=(0,0)$):



$$S(ABC) = S(CBB') + \underbrace{S(B'A'AB)}_{S_{\text{טרפז}} = \frac{\text{סכום בסיסים} \times \text{גובה}}{2}} - S(CAA') =$$

$$= \frac{1}{2}x_2y_2 + \frac{1}{2}(y_2+y_1)(x_1-x_2) - \frac{1}{2}x_1y_1 =$$

$$= \cancel{\frac{1}{2}x_2y_2} + \frac{1}{2}y_2x_1 + \cancel{\frac{1}{2}y_1x_1} - \cancel{\frac{1}{2}y_2x_2} - \frac{1}{2}y_1x_2 - \cancel{\frac{1}{2}x_1y_1} =$$

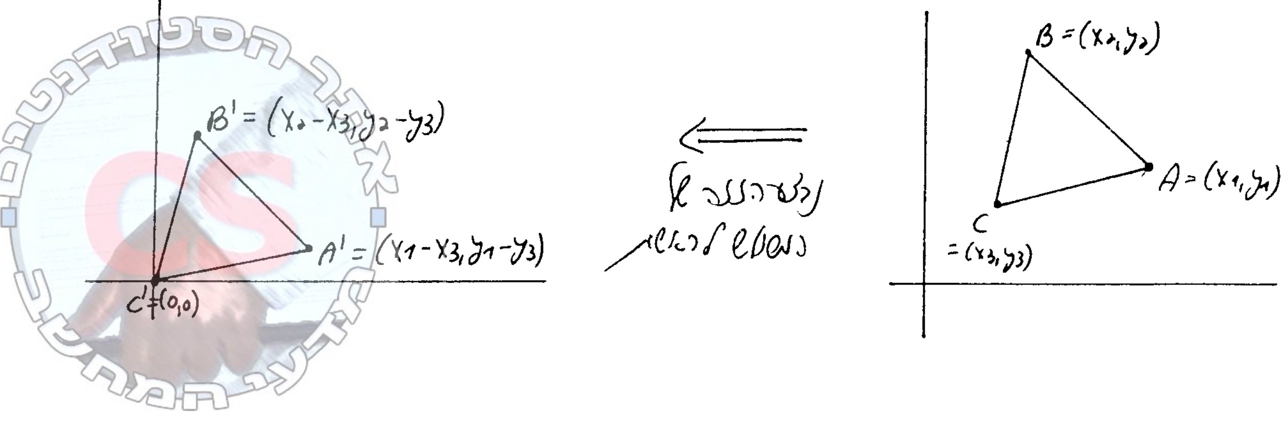
$$= \frac{1}{2}(y_2x_1 - y_1x_2) = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}$$

באופן כללי, אם נתון משולש שקודקודיו $(0,0), (x_1,y_1), (x_2,y_2)$ אזי שטחו שווה ל-

$$S_\Delta = \frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}\right|$$

(הוספנו מוחלט היות כיוון ששטח הינו תמיד אי-שלילי, והסדר של קודקודי המשולש יכולה לגרום לשינוי סימן).

נניח עתה הזזה של משולש כלשהו ABC:



(5)

לכן:

$$S(ABC) = S(A'B'C') = \frac{1}{2}\left\|\begin{matrix} x_2-x_3 & y_2-y_3 \\ x_1-x_3 & y_1-y_3 \end{matrix}\right\|$$

לפי מה שהוכחנו קודם

הערה:

מתקיים:

$$\frac{1}{2}\left\|\begin{matrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{matrix}\right\| \underset{R_2-R_3\to R_1}{\overset{R_1-R_3\to R_1}{=}} \frac{1}{2}\left\|\begin{matrix} x_1-x_3 & y_1-y_3 & 0 \\ x_2-x_3 & y_2-y_3 & 0 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{matrix}\right\| =$$

$$= \frac{1}{2}\left\|\begin{matrix} x_1-x_3 & y_1-y_3 \\ x_2-x_3 & y_2-y_3 \end{matrix}\right\| \overset{R_1\leftrightarrow R_2}{=} \frac{1}{2}\left|-\left|\begin{matrix} x_2-x_3 & y_2-y_3 \\ x_1-x_3 & y_1-y_3 \end{matrix}\right|\right| =$$

$$= \frac{1}{2}\left\|\begin{matrix} x_2-x_3 & y_2-y_3 \\ x_1-x_3 & y_1-y_3 \end{matrix}\right\| = S(ABC)$$

ולכן נוכל לסמן לכן

$$S(ABC) = \frac{1}{2}\left\|\begin{matrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{matrix}\right\|$$

⑥

שאלה 5:

נוכיח כי לכל $A \in \mathbb{R}^{3\times3}$ מתקיים: $A\cdot(\operatorname{adj}A) = |A|\cdot I$:

נסמן $B = A\cdot(\operatorname{adj}A)$ ואז:

$$B = A\cdot(\operatorname{adj}A) = \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}}_{\operatorname{adj}A} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$$

כאשר $A_{ij} = (-1)^{i+j}|M_{ij}|$ לכל $1 \le i,j \le 3$.

נחשב את איברי המטריצה B :

⊛ לכל $1 \le i \le 3$ מתקיים (איברי האלכסון הראשי של B) :

$$b_{ii} = \underbrace{(a_{i1}\ \ a_{i2}\ \ a_{i3})}_{\text{שורה } i\text{-ית של } A} \underbrace{\begin{pmatrix} A_{i1} \\ A_{i2} \\ A_{i3} \end{pmatrix}}_{\text{עמודה } i\text{-ית של } A} = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + a_{i3}A_{i3} \overset{\boxed{A_{ij} = (-1)^{i+j}|M_{ij}|}}{=}$$

לפי הגדרת כפל מטריצות

$$= \underbrace{a_{i1}\cdot(-1)^{i+1}\cdot|M_{i1}| + a_{i2}\cdot(-1)^{i+2}\cdot|M_{i2}| + a_{i3}\cdot(-1)^{i+3}\cdot|M_{i3}|}_{\text{זהו פיתוח הדטרמיננטה של } A \text{ לפי השורה ה-}i} = |A|$$

⊛ לכל $1 \le i,j \le 3$ כך ש- $i \ne j$ (האיברים מחוץ לאלכסון הראשי של B) :

$$b_{ij} = (a_{i1}\ \ a_{i2}\ \ a_{i3})\begin{pmatrix} A_{j1} \\ A_{j2} \\ A_{j3} \end{pmatrix} = a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + a_{i3}A_{j3} \overset{\boxed{A_{ij} = (-1)^{i+j}|M_{ij}|}}{=}$$

$$= \underbrace{a_{i1}\cdot(-1)^{j+1}\cdot|M_{j1}| + a_{i2}\cdot(-1)^{j+2}\cdot|M_{j2}| + a_{i3}\cdot(-1)^{j+3}\cdot|M_{j3}|}_{} = 0$$

זהו דטרמיננטה (פיתוח לפי השורה ה-j) שמתקבלת מ-A ע"י החלפת השורה ה-j בשורה ה-i. כיוון שיש 2 שורות שוות (השורה ה-i והשורה ה-j) ולכן הדטרמיננטה היא אפס!

סה"כ לכן:

$$B = \begin{pmatrix} |A| & 0 & 0 \\ 0 & |A| & 0 \\ 0 & 0 & |A| \end{pmatrix} = |A|\cdot I$$

$\Leftarrow$ $A\cdot(\operatorname{adj}A) = |A|\cdot I$

מש"ל.

7

שאלה 6:

יהיו $a,b\in\mathbb{Z}$ אזי:

$$\begin{vmatrix} a+b & a & a & a \\ a & a+b & a & a \\ a & a & a+b & a \\ a & a & a & a+b \end{vmatrix} \underset{\text{תכונת דטרמיננטה}}{=} \begin{vmatrix} a & a & a & a \\ a & a+b & a & a \\ a & a & a+b & a \\ a & a & a & a+b \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b & 0 & 0 & 0 \\ a & a+b & a & a \\ a & a & a+b & a \\ a & a & a & a+b \end{vmatrix}$$

$$\underset{\text{תכונת דטרמיננטה}}{=} \underbrace{\begin{vmatrix} a & a & a & a \\ a & a & a & a \\ a & a & a+b & a \\ a & a & a & a+b \end{vmatrix}}_{\text{שווה לאפס כיון שמכיל שתי שורות זהות (לפי תכונות)}} + \underbrace{\begin{vmatrix} a & a & a & a \\ 0 & b & 0 & 0 \\ a & a & a+b & a \\ a & a & a & a+b \end{vmatrix}}_{\text{נפתח לפי } R_2} + \underbrace{\begin{vmatrix} b & 0 & 0 & 0 \\ a & a+b & a & a \\ a & a & a+b & a \\ a & a & a & a+b \end{vmatrix}}_{\text{נפתח לפי } R_1}$$

$$= b\begin{vmatrix} a & a & a \\ a & a+b & a \\ a & a & a+b \end{vmatrix} + b\begin{vmatrix} a+b & a & a \\ a & a+b & a \\ a & a & a+b \end{vmatrix} =$$

$$= b\left(\underbrace{\begin{vmatrix} a & a & a \\ a & a+b & a \\ a & a & a+b \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a+b & a & a \\ a & a+b & a \\ a & a & a+b \end{vmatrix}}_{}\right)$$

מספר שלם כיון שדטרמיננטה של מט' המורכבת ממס' שלם (נתון $a,b\in\mathbb{Z}$) כי סכום וכפל של מס' שלם הוא מס' שלם.

כיון ש- b מוכפל במס' שלם (ראה הסבר למעלה) אזי הדטרמיננטה מתחלקת ב- b ללא שארית.

מש"ל.

(8)

שאלה 7:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 & 6 \\ 4 & 2 & 4 & 6 \\ 5 & 9 & 8 & 3 \\ 9 & 0 & 7 & 1 \end{vmatrix} \underset{C_4+10C_3 \to C_4}{=} \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 & 16 \\ 4 & 2 & 4 & 46 \\ 5 & 9 & 8 & 83 \\ 9 & 0 & 7 & 71 \end{vmatrix}$$

$$\underset{C_4+100C_2 \to C_4}{=} \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 & 316 \\ 4 & 2 & 4 & 246 \\ 5 & 9 & 8 & 983 \\ 9 & 0 & 7 & 71 \end{vmatrix} \underset{C_4+1000C_1 \to C_4}{=} \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 & 2316 \\ 4 & 2 & 4 & 4246 \\ 5 & 9 & 8 & 5983 \\ 9 & 0 & 7 & 9071 \end{vmatrix} =$$

$$\underset{\text{תכונות דט'}}{=} 193 \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 & \frac{2316}{193} \\ 4 & 2 & 4 & \frac{4246}{193} \\ 5 & 9 & 8 & \frac{5983}{193} \\ 9 & 0 & 7 & \frac{9071}{193} \end{vmatrix}}$$

נתון כי 2316,4246,5983 ו- 9071
מתחלקים ב- 193 ללא שארית ולכן כל כניסות הדט'
הם שלמים ולכן ערכו גם שלם כן.

סה"כ קיבלנו כי ערך הדט' הנ"ל 193 כפול מס' שלם כלשהו,
ולכן ערך הדט' מתחלק ב- 193 ללא שארית.

מש"ל.

שאלה 8:

הטענה נכונה. הוכחה:

A^tA הפיכה

$\Longleftrightarrow$ → לפי משפט

$|A^tA| \neq 0$

(9)

$\Longleftrightarrow$ כפליות $|A|\cdot|B| = |AB|$

$|A^t|\cdot|A| \neq 0$

$\Longleftrightarrow$ תכונה $|A| = |A^t|$

$|A|^2 \neq 0$

$\Longleftrightarrow$

$|A| \neq 0$

$\Longleftrightarrow$ לפי משפט

A הפיכה.

סה"כ קיבלנו A הפיכה אמ"מ A^tA הפיכה.

מש"ל.

שאלה 9:

הטענה נכונה. הוכחה:

תהי A מט' ריבועית סימטרית מסדר n. אזי:

$A+A^t$ הפיכה

$\Longleftrightarrow$ לפי משפט

$|A+A^t| \neq 0$

$\Longleftrightarrow$ A סימטרית

$|A+A| \neq 0$

$\Longleftrightarrow$

$|2A| \neq 0$

$\Longleftrightarrow$ תכונה $|\alpha A| = \alpha^n|A|$

$2^n|A| \neq 0$

$\Longleftrightarrow$ $2^n \neq 0$ לכל חיובי

$|A| \neq 0$

$\Longleftrightarrow$

A הפיכה

$\Longleftarrow$ A הפיכה אמ"מ $A+A^t$ הפיכה.

מש"ל.

15

שאלה 15:

הטענה אינה נכונה. נביא דוגמא נגדית:

ניקח $A=-I$, אזי A הפיכה כיון ש $A^{-1}=-I$ $\left((-I)(-I)=I^2=I\right)$

אבל

$$A^3+I = (-I)^3+I = (-1)^3\cdot I^3 = -I+I=[0]$$

ומכ׳ הסכום אינה הפיכה.

ולכן זו דוגמא נגדית המפריכה את הטענה.

תרגיל מס' 7

הגשה עד: 18.12.2003, 12:00.

1. פתרו את מערכת המשוואות הבאה בעזרת כלל קרמר (באם ניתן):

$$\begin{cases} 2x+3y-4z=10 \\ -x+2y+3z=2 \\ 3x-2y-z=2 \end{cases}$$

מרחבים וקטוריים:

2. לגבי כל אחת מן הקבוצות הבאות הוכיחו או הפריכו האם היא מהווה מרחב וקטורים:

א. $V=R_n[x]$ (קבוצת הפולינומים ממעלה קטנה או שווה ל- n) מעל R עם חיבור פולינומים וכפל פולינומים בסקלר.

ב. $W=\{x\in R \mid x\geq 1\}$ עם הגדרת חיבור זוגות וכפל בסקלר מעל R ע"י:

$$\forall\ x,y\in W,\alpha\in R \qquad x'+'y=x\cdot y \quad , \quad \alpha'\bullet'x=x^{\alpha}$$

ג. $V=R^2$ עם הגדרת חיבור זוגות וכפל בסקלר מעל R ע"י:

$$\forall\ (a,b),(c,d)\in R^2,\alpha\in R \quad (a,b)'+'(c,d)=(a+c+1,b+d)\ ,\ \alpha'\bullet'(a,b)=(\alpha a+\alpha-1,\alpha b)$$

ד. קבוצת כל הפונקציות הממשיות האי זוגיות מעל R.

תזכורת : $f:R\to R$ אי זוגית אם $f(-x)=-f(x) \quad \forall x\in R$.

ה. קבוצת המטריצות הסימטריות מעל R עם פעולת חיבור מטריצות וכפל מטריצות בסקלר.

ו. $W=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\in R^{2\times 2} \;\middle|\; ad=bc\right\}$ עם פעולת חיבור מטריצות וכפל מטריצות בסקלר.

3. יהי V מרחב הפונקציות הממשיות מעל R ($V=\{f:R\to R\}$). תהי W תת הקבוצה של V המכילה את פונקציית האפס ואת כל הפונקציות $f(x)$ המקיימות את התנאי ש- $f(x)=0$ עבור מספר סופי של מספרים ממשיים x. הוכיחו או הפריכו: W תת מרחב של V.

4. א. הוכיחו כי מרחב הפתרונות של המערכת ההומוגנית $Ax=0$ עבור $A\in R^{m\times n}$ כלשהיא (הקרוי גם מרחב האפס של המטריצה A) הינו תת מרחב של R^n.

תזכורת: מרחב הפתרונות של המערכת ההומוגנית $Ax=0$ עבור $A\in R^{m\times n}$ כלשהיא, הינו קבוצת הוקטורים $x\in R^n$ המקיימים $Ax=0$.

ב. הוכיחו או הפריכו: קבוצת הפתרונות של המערכת $Ax=b$ עבור $A\in R^{m\times n},b\in R^{m\times 1}$ כלשהם הינו תת מרחב של R^n.

5. יהי V מ"ו מעל F. הוכיחו כי לכל $v \in V$ ולכל $\alpha \in F$ מתקיים:

א. $0_F \cdot v = 0_v$.

ב. $(-\alpha)v = \alpha(-v) = -(\alpha v)$.

ג. קיים איבר נגדי יחיד ל- v ב- V (שימו לב כי קיום הנגדי נובע מכך ש- V מ"ו ועליכם להוכיח רק את יחידותו!).

<u>בהצלחה!</u>

(1)

פתרון תרגיל 7

שאלה 1:

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -4 \\ -1 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & -1 \end{vmatrix} \underset{R_3+3R_2 \to R_3}{\overset{R_1+2R_2 \to R_1}{=}} \begin{vmatrix} 0 & 7 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 8 \end{vmatrix} \underset{C_1 \text{ פיתוח לפי}}{=}$$

$$= \begin{vmatrix} 7 & 2 \\ 4 & 8 \end{vmatrix} = 56-8 = 48 \neq 0 \Longrightarrow$$ למערכת יש פ.יחיד.

* נמצא את הפ. בעזרת כלל קרמר:

$$D_1 = \begin{vmatrix} 10 & 3 & -4 \\ 2 & 2 & 3 \\ 2 & -2 & -1 \end{vmatrix} \underset{C_2-2C_3 \to C_2}{\overset{C_1+2C_3 \to C_1}{=}} \begin{vmatrix} 2 & 11 & 4 \\ 8 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} \underset{R_3 \text{ פיתוח לפי}}{=}$$

$$= - \begin{vmatrix} 2 & 11 \\ 8 & -4 \end{vmatrix} = -(-8-88) = 96$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 10 & -4 \\ -1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} \underset{R_3+3R_2 \to R_3}{\overset{R_1+2R_2 \to R_1}{=}} \begin{vmatrix} 0 & 14 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \\ 0 & 8 & 8 \end{vmatrix} \underset{C_1 \text{ פיתוח לפי}}{=}$$

$$= \begin{vmatrix} 14 & 2 \\ 8 & 8 \end{vmatrix} = 96$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 10 \\ -1 & 2 & 2 \\ 3 & -2 & 2 \end{vmatrix} \underset{R_3+3R_2 \to R_3}{\overset{R_1+2R_2 \to R_1}{=}} \begin{vmatrix} 0 & 7 & 14 \\ -1 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & 8 \end{vmatrix} \underset{C_1 \text{ פיתוח לפי}}{=} \begin{vmatrix} 7 & 14 \\ 4 & 8 \end{vmatrix} = 0$$

לכן:

$$x = \frac{D_1}{|A|} = \frac{96}{48} = 2$$

$$y = \frac{D_2}{|A|} = \frac{96}{48} = 2$$

$$z = \frac{D_3}{|A|} = \frac{0}{48} = 0$$

$$\Leftarrow \quad (x,y,z) = (2,2,0)$$

(2)

שאלה 2:

א) $\mathbb{R}_n[x] \subseteq \mathbb{R}[x]$ וידוע כי $\mathbb{R}[x]$ הינו מ"ו (מעל $\mathbb{R}$ עם פעולות חיבור פולינומים וכפל פולינום בסקלר), לכן מספיק להראות כי $\mathbb{R}_n[x]$ תת-מרחב של $\mathbb{R}[x]$:

(1) $p(x)\equiv 0$ (פולינום האפס) נמצא ב- $\mathbb{R}_n[x]$ (כיון שדרגתו קטנה או שווה ל-n)

לכן $\mathbb{R}_n[x]\neq\emptyset$.

(2) יהיו $p(x), q(x)\in\mathbb{R}_n[x]$.

⇐ קיימים $b_0,\dots,b_m,a_0,\dots,a_i\in\mathbb{R}$ כך ש $m,i\le n$ וכך ש

$p(x)=a_0+a_1x+\dots+a_ix^i$ ו $q(x)=b_0+b_1x+\dots+b_mx^m$.

נניח בה"כ כי $i\le m$ ואז:

$$p(x)+q(x) \overset{\text{הג' חיבור פולינומים}}{=} (a_0+b_0)+(a_1+b_1)x+\dots+(a_i+b_i)x^i+b_{i+1}x^{i+1}+\dots+b_mx^m$$

ודרגת $p(x)+q(x)$ הינה $n\ge m$ וכן לכל $0\le j\le i$

$a_j+b_j\in\mathbb{R}$ (כי $a_j,b_j\in\mathbb{R}$) וכמובן $b_j\in\mathbb{R}$ עבור $m\ge j\ge i+1$.

לכן $p(x)+q(x)\in\mathbb{R}_n[x]$.

(3) יהי $p(x)\in\mathbb{R}_n[x]$ ויהי $\alpha\in\mathbb{R}$.

⇐ קיימים $a_0,\dots,a_m\in\mathbb{R}$ כך ש $m\le n$ וכך ש

$p(x)=a_0+a_1x+\dots+a_nx^n$.

אזי: $\alpha p(x) \underset{\text{הג' כפל פולינום בסקלר}}{=} \alpha a_0+\alpha a_1x+\dots+\alpha a_mx^m$

ומתקיים לכל $0\le i\le m$ כי $\alpha a_i\in\mathbb{R}$ (כי $\alpha,a_i\in\mathbb{R}$)

וכן $\deg(p(x))=m\le n$.

⇐ $\alpha p(x)\in\mathbb{R}_n[x]$.

סה"כ לכן $\mathbb{R}_n[x]$ תת מרחב של $\mathbb{R}[x]$.

⇐ $\mathbb{R}_n[x]$ מ"ו מעל $\mathbb{R}$ עם פעולות חיבור פולינומים וכפל פולינום בסקלר.

ב) W אינו מ"ו כיון שאינו סגור תחת כפל בסקלר:

$2\in W$ ו $\alpha=-\frac{1}{2}\in\mathbb{R}$ אבל:

$$\alpha \cdot 2 = \left(-\tfrac{1}{2}\right)\cdot 2 \underset{\text{הג' •}}{=} 2^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}<1$$

ולכן $\alpha\cdot 2\notin W$.

3

ג. V הינו מ"ו. נוכיח כי מתקיימות כל אקסיומות מ"ו:

(שימו לב כי יש הכרח להוכיח את כל 10 האקסיומות כיון שלא נתון לנו ש-V תת קבוצה של מ"ו ידוע עם אותן פעולות חיבור וכפל בסקלר !!!).

(1) סגירות החיבור:

$$\forall\ (a,b),(c,d)\in\mathbb{R}^2 \quad (a,b)\ '+'\ (c,d) \underset{\text{הג' '+'}}{=} (a+c+1,\ b+d) \in \mathbb{R}^2$$

$a,c,b,d,1\in\mathbb{R}$! $\mathbb{R}$ סגור תחת חיבור

(2) קומוטטיביות החיבור:

$$\forall\ (a,b),(c,d)\in\mathbb{R}^2 \quad (a,b)\ '+'\ (c,d) \underset{\text{הג' '+'}}{=} (a+c+1,\ b+d) \underset{\text{קומוטטיבית החיבור ב-}\mathbb{R}}{=} (c+a+1,\ d+b) =$$

$$= (c,d)\ '+'\ (a,b)$$

(3) אסוציאטיביות החיבור:

$$\forall\ (a,b),(c,d),(e,f)\in\mathbb{R}^2 \quad (a,b)\ '+'\ \big((c,d)\ '+'\ (e,f)\big) \underset{\text{הג' '+'}}{=} (a,b)\ '+'\ (c+e+1,\ d+f)$$

$$= \big(a+(c+e+1)+1,\ b+(d+f)\big) \underset{\text{אסוציאטיבית וקומוטטיבית החיבור ב-}\mathbb{R}}{=} \big((a+c+1)+e+1,\ (b+d)+f\big) =$$

$$\underset{\text{הג' '+'}}{=} (a+c+1,\ b+d)\ '+'\ (e,f) = \big((a,b)\ '+'\ (c,d)\big)\ '+'\ (e,f)$$

(4) קיום איבר ניטרלי:

$(-1,0)\in\mathbb{R}^2$ ומתקיים

$$\forall\ (a,b)\in\mathbb{R}^2 \qquad (a,b)\ '+'\ (-1,0) \underset{\text{הג' '+'}}{=} \big(a+(-1)+1,\ b+0\big) = (a,b)$$

$$\Leftarrow \qquad (-1,0) = 0_V$$

(5) קיום הנגדי:

לכל $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ קיים $(-a-2,\ -b)\in\mathbb{R}^2$ ומתקיים

$$(a,b)\ '+'\ (-a-2,\ -b) \underset{\text{הג' '+'}}{=} \big(a+(-a-2)+1,\ b+(-b)\big) = (-1,0) = 0_V$$

$\Leftarrow$ ב-V: $-(a,b) = (-a-2,\ -b)$.

(6) סגירות לכפל בסקלר:

$$\forall\ (a,b)\in\mathbb{R}^2\ \ \alpha\in\mathbb{R} \quad \alpha\ '\cdot'\ (a,b) \underset{\text{הג' '}\cdot\text{'}}{=} (\alpha a+\alpha-1,\ \alpha b) \in \mathbb{R}^2$$

$\alpha,a,b,1\in\mathbb{R}$ ו-$\mathbb{R}$ סגור לחיבור וכפל

(7) דיסטריבוטיביות הכפל בסקלר מעל החיבור ב-V:

$$\forall\ (a,b),(c,d)\in\mathbb{R}^2,\ \alpha\in\mathbb{R}\qquad \alpha\ \text{'}\bullet\text{'}\ \big((a,b)\ \text{'}+\text{'}\ (c,d)\big) \underset{\text{הג' '+'}}{=} \alpha\ \text{'}\bullet\text{'}\ (a+c+1,\ b+d) =$$

$$\underset{\text{הג' '•'}}{=} \big(\alpha(a+c+1)+\alpha-1,\ \alpha(b+d)\big) \underset{\text{דיסטריבוטיביות הכפל בסקלר מעל החיבור הממשי}}{=} \big(\alpha a+\alpha c+\alpha+\alpha-1,\ \alpha b+\alpha d\big)$$

$$= \big((\alpha a+\alpha-1)+(\alpha c+\alpha-1)+1,\ (\alpha b)+(\alpha d)\big) =$$

$$\underset{\text{הג' '+'}}{=} (\alpha a+\alpha-1,\ \alpha b)\ \text{'}+\text{'}\ (\alpha c+\alpha-1,\ \alpha d) \underset{\text{הג' '•'}}{=} \alpha\ \text{'}\bullet\text{'}\ (a,b)\ \text{'}+\text{'}\ \alpha\ \text{'}\bullet\text{'}\ (c,d)$$

(8) דיסטריבוטיביות הכפל בסקלר מעל החיבור ב-F:

$$\forall\ (a,b)\in\mathbb{R}^2,\ \alpha,\beta\in\mathbb{R}\qquad (\alpha+\beta)\ \text{'}\bullet\text{'}\ (a,b) \underset{\text{הג' '•'}}{=} \big((\alpha+\beta)a+(\alpha+\beta)-1,\ (\alpha+\beta)b\big) =$$

$$\underset{\text{דיסטריבוטיביות הכפל מעל החיבור ב-}\mathbb{R}}{=} \big(\alpha a+\beta a+\alpha+\beta-1,\ \alpha b+\beta b\big) \underset{\text{אסוציאטיביות וקומוטטיביות החיבור ב-}\mathbb{R}}{=} \big((\alpha a+\alpha-1)+(\beta a+\beta-1)+1,\ (\alpha b)+(\beta b)\big) =$$

$$\underset{\text{הג' '+'}}{=} (\alpha a+\alpha-1,\ \alpha b)\ \text{'}+\text{'}\ (\beta a+\beta-1,\ \beta b) \underset{\text{הג' '•'}}{=} \alpha\ \text{'}\bullet\text{'}\ (a,b)\ \text{'}+\text{'}\ \beta\ \text{'}\bullet\text{'}\ (a,b)$$

(9) אסוציאטיביות:

$$\forall\ (a,b)\in\mathbb{R}^2,\ \alpha,\beta\in\mathbb{R}\qquad (\alpha\beta)\ \text{'}\bullet\text{'}\ (a,b) \underset{\text{הג' '•'}}{=} \big((\alpha\beta)a+(\alpha\beta)-1,\ (\alpha\beta)b\big) =$$

$$\underset{\text{תכונות כפל וחיבור הממשיים}}{=} \big(\alpha(\beta a+\beta-1)+\alpha-1,\ \alpha(\beta b)\big) \underset{\text{הג' '•'}}{=} \alpha\ \text{'}\bullet\text{'}\ (\beta a+\beta-1,\ \beta b) =$$

$$\underset{\text{הג' '•'}}{=} \alpha\ \text{'}\bullet\text{'}\ \big(\beta\ \text{'}\bullet\text{'}\ (a,b)\big)$$

(10) יחידה:

$$\forall\ (a,b)\in\mathbb{R}^2\qquad 1_{\mathbb{R}}\ \text{'}\bullet\text{'}\ (a,b) \underset{1_{\mathbb{R}}=1}{=} 1\ \text{'}\bullet\text{'}\ (a,b) \underset{\text{הג' '•'}}{=} (1\cdot a+1-1,\ 1\cdot b) = (a,b)$$

סה"כ לכן V מעל $\mathbb{R}$ עם הפעולות שהגדרנו הינו מ"ו.

5

3. נגדיר: $W = \{f:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \mid f \text{ אי זוגית}\}$.

$W \subseteq V$ כאשר $V=\{f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\}$! V הינו מ"ו ידוע.

מספיק לכן לבדוק האם W תת מרחב של V :

(1) $f(x)\equiv 0$ (פונקציית האפס) ב-W כיון:

$\forall x\in\mathbb{R}$ $f(-x)=f(x)=-f(x)$ כי : $\Rightarrow f\in W \Rightarrow W\neq\emptyset$

(2) יהיו $f,g\in W$, אזי:

$\forall x\in\mathbb{R}$ $(f+g)(x) = f(x)+g(x) \in \mathbb{R}$

הגדרת חיבור פונקציות $\quad \mathbb{R} \quad \mathbb{R}$

לכן $f+g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$.

כמו כן:

$\forall x\in\mathbb{R}$ $(f+g)(-x) = f(-x)+g(-x) = -f(x)+(-g(x)) = -(f(x)+g(x)) =$

$f,g\in W$ אי זוגיות

$= -((f+g)(x)) \Rightarrow f+g\in W$

(3) תהי $f\in W$ ויהי $\alpha\in\mathbb{R}$ סקלר, אזי:

$\forall x\in\mathbb{R}$ $(\alpha f)(x) = \alpha\cdot f(x)\in\mathbb{R}$

הגדרת כפל פונקציה בסקלר $\quad \mathbb{R} \quad \mathbb{R}$

לכן $\alpha f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$.

כמו כן:

$\forall x\in\mathbb{R}$ $(\alpha f)(-x) = \alpha\cdot f(-x) = \alpha(-f(x)) = -(\alpha\cdot f(x)) = -((\alpha f)(x))$

$f\in W$ אי זוגית $\quad$ קומוטטיביות ואסוציאטיביות בכפל ממשיים

$\Leftarrow$ $\alpha f\in W$.

סה"כ לכן W תת מרחב של V ולכן מ"ו בפני עצמו.

ה. נגדיר $W=\{A\in\mathbb{R}^{n\times n} \mid A^t=A\}$.

נראה כי W תת מרחב של $V=\mathbb{R}^{n\times n}$:

(1) $[0]\in W$ כי $[0]^t=[0]$

$\Leftarrow$ $W\neq\emptyset$.

(2) יהיו $A,B\in W$.

הגדרת חיבור

$A,B\in W \Rightarrow A,B\in\mathbb{R}^{n\times n} \Rightarrow A+B\in\mathbb{R}^{n\times n}$.

כמו כן:

$$(A+B)^t \underset{\text{transpose תכונת}}{=} A^t + B^t \underset{\substack{A,B\in W \text{ נתון} \\ A^t=A,\ B^t=B}}{=} A+B$$

$\Leftarrow$ $A+B\in W$.

(3) יהי $A\in W$ ו- $\alpha\in\mathbb{R}$.

$A\in W \Rightarrow A\in\mathbb{R}^{n\times n} \underset{\text{הג' כפל מט' בסקלר}}{\Rightarrow} \alpha A\in\mathbb{R}^{n\times n}$

כמו כן:

$$(\alpha A)^t = \alpha(A^t) \underset{\substack{A\in W \text{ נתון} \\ A^t=A}}{=} \alpha A$$

$\Leftarrow$ $\alpha A\in W$.

סה"כ לכן W תת מרחב של V מש"ל.

(1.) W אינו מ"ו כי אינו סגור תחת חיבור:

$\begin{pmatrix}1&2\\3&6\end{pmatrix}\in W$ (כי $1\cdot 6=2\cdot 3$)

$\begin{pmatrix}3&12\\1&4\end{pmatrix}\in W$ (כי $3\cdot 4=1\cdot 12$)

אבל $\begin{pmatrix}1&2\\3&6\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3&12\\1&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&14\\4&10\end{pmatrix}\notin W$ כי $4\cdot 10=40\neq 56=4\cdot 14$

שאלה 3:

W אינו תת מרחב של V כיון שאינו סגור תחת חיבור וקטורים:

יהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ המוגדרת ע"י $f(x)=1\quad \forall x\in\mathbb{R}$

" $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ " " $\forall x\in\mathbb{R}\quad g(x)=\begin{cases}2 & x=2\\ -1 & x\neq 2\end{cases}$

$f,g\in W$ כיון שכל אחת מהן שווה לאפס עבור מספר סופי של איברים ממשיים (במקרה זה אף מספר ממשי)

(7)

אבל:

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad (f+g)(x) \underset{\substack{\text{הגדרת חיבור} \\ \text{פונקציות}}}{=} f(x)+g(x) = \begin{cases} 3 & x=2 \\ 0 & x\neq 2 \end{cases}$$

! $f+g \notin W$ כיוון שזוהי פונ' הלוקחת ערך שונה מאפס במספר סופי של x-ים ממשיים ($f+g$ מתאפסת לכל $2\neq x\in\mathbb{R}$).

לכן W אינו תת מרחב של V.

שאלה 4:

(א) תהי $A\in\mathbb{R}^{m\times n}$. נוכיח כי $\underbrace{\text{מרחב האפס של המט' } A}_{\text{נסמן ב- } W}$ הינו תת מרחב של $\mathbb{R}^n$:

(1) $\vec{0}\in\mathbb{R}^n$ מקיים $\vec{0}\in W$ כיוון ש $A\cdot 0 = 0$

$\Leftarrow$ $W\neq\phi$

(2) יהיו $x,y\in W$ $\Leftarrow$ $Ax=0$ וגם $Ay=0$.

אזי $x+y\in\mathbb{R}^n$ ומתקיים

$$A(x+y) \underset{\substack{\text{דיסטריבוטיביות כפל מט'} \\ \text{מעל חיבור מט'}}}{=} Ax+Ay = 0+0 = 0 \implies x+y\in W$$

(3) יהי $x\in W$! $\alpha\in\mathbb{R}$.

$\Downarrow$

$x\in\mathbb{R}^{n\times n}$ וגם $Ax=0$

$\Leftarrow$ $\alpha x\in\mathbb{R}^n$ ומתקיים

$$A(\alpha x) \underset{\text{תכונות כפל מט' בסקלר}}{=} \alpha(Ax) = \alpha\cdot 0 = 0$$

$\Leftarrow$ $\alpha x\in W$

$\Leftarrow$ סה"כ לכן, W תת מרחב של $\mathbb{R}^n$.

(ב) קבוצת הפתרונות של המערכת $Ax=b$ עבור $b\in\mathbb{R}^{m\times n}$! $A\in\mathbb{R}^{m\times n}$ לא מהווה בהכרח תת מרחב ל- $\mathbb{R}^n$.

(9)

לשאלה

נריץ במערכת

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$(x,y,z)=(1,1,1)$ פתרון למערכת אבל $2(1,1,1)=(2,2,2)$

לא פתרון כי:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\Leftarrow$ אין סגירות תחת הכפל בסקלר!

שאלה 5:

א. יהי $v\in V$ כלשהו. אזי:

$$0_F\cdot V = (0_F+0_F)\cdot V = 0_F\cdot V + 0_F\cdot V$$

השוויון מתקיים $0_F+0_F=0_F$ כיוון ש- 0_F אדיש חיבורי ב-F

דיסטריבוטיביות הכפל מעל החיבור ב-F

קיבלנו $0_F\cdot V = 0_F\cdot V + 0_F\cdot V$

נחבר לשני האגפים $-(0_F\cdot V)$ ונקבל:

$$0_F\cdot V + (-0_F\cdot V) = (0_F\cdot V + 0_F\cdot V) + (-0_F\cdot V)$$

תכונת הנגדי ב-V $\Leftarrow$ $\| \; 0_V$

אסוציאטיביות החיבור $\|$

$$(0_F\cdot V) + ((0_F\cdot V) + (-0_F\cdot V))$$

$\|$ תכונת הנגדי ב-V

$$0_F\cdot V + 0_V$$

$\|$ 0_V אדיש חיבורי ב-V

$$0_F\cdot V$$

$$\Leftarrow \quad 0_F\cdot V = 0_V$$

ב. יהיו $v\in V$ ו- $\alpha\in F$. אזי:

$$(-\alpha)V + \alpha V = (-\alpha+\alpha)V = 0_F\cdot V = 0_V \implies (-\alpha)V + \alpha V = 0_V$$

דיסטריבוטיביות הכפל מעל החיבור ב-F

$-\alpha+\alpha=0_F$ ב-F (נגדי ב-F)

סעיף א'

$$\implies (-\alpha)v = -(\alpha v)$$

כמו כן:

$$\alpha(-v)+\alpha v \underset{\text{דיסטריבוטיביות הכפל מעל החיבור ב-}V}{=} \alpha(-v+v)=\alpha\cdot 0_v \underset{\text{משפט (הוכחנו בהרצאה)}}{=} 0_v$$

$$\Leftarrow \quad \alpha(-v)+\alpha v=0_v$$

$$\Leftarrow \quad \alpha(-v)=-(\alpha v)$$

סה"כ לכן קיבלנו $\alpha(-v)=(-\alpha)v=-(\alpha v)$

ג. יהי $v\in V$ כלשהו.

V מ"ו ולכן ידוע כי קיים נגדי ל-v ב-V.

נותר להראות כי הנגדי יחיד:

נניח כי x,y נגדיים ל-v ב-V ונראה כי $x=y$:

$$x \underset{\substack{0_v\text{ אדיש חיבורי}\\ \text{ב-}V}}{=} 0_v+x \underset{\substack{y\text{ נגדי}\\ \text{ל-}v}}{=} (y+v)+x \underset{\substack{\text{אסוציאטיביות}\\ \text{החיבור}\\ \text{ב-}V}}{=} y+(v+x) \underset{\substack{x\text{ נגדי}\\ \text{ל-}v}}{=} y+0_v \underset{\substack{0_v\text{ אדיש}\\ \text{חיבורי}\\ \text{ב-}V}}{=} y$$

$$\Leftarrow \quad x=y.$$

מש"ל

תרגיל מס' 8

הגשה עד: 28.12.2003

1. יהי $V=\{f : R \to R \mid f \text{ רציפה}\}$ מ"ו ויהי $W=\{f \in V \mid \forall a \in R \quad f(-a)=-f(a)\}$ תת מרחב של V. מצא משלים ל- W ב- V, הוכיחו את תשובתכם.

2. יהי $V=R^{2\times 2}$ מ"ו ויהי $W=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in R^{2\times 2} \;\middle|\; a+b+c+d=0\right\}$.

א. הוכיחו כי W הינו תת מרחב של V.
ב. מצאו שני משלימים שונים ל- W ב- V. הוכיחו את תשובתכם.

3. הוכיחו או הפריכו : יהיו U , W תתי מרחבים במ"ו V כך ש- $V=U\oplus W$, אזי $V=U\bigcup W$.

4. הוכיחו או הפריכו : לכל מ"ו V קיימים תתי מרחבים U , W כך ש- $V=U\oplus W$ וגם $V=U\bigcup W$.

5. כתבו את הוקטור x^2-2 כצירוף לינארי של איברי הקבוצה $\{2x^2+x+1 \ , \ 3x^2+2x \ , \ 4x^2-10\}$.

6. עבור איזה ערך של x מתקיים $(0,x+1,1,2)\in span\{(3,1,-4,5),(2,0,3,1),(1,-2,1,4)\}$?

7. קבעו תנאים על הוקטור (m,n,k) כך ש $(m,n,k)\in span\{(1,-3,2),(2,-1,1)\}$.

8. האם הוקטורים $\left\{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$ פורשים את $R^{2\times 2}$?

9. הוכיחו או הפריכו: לכל מ"ו V קיימת תת קבוצה S כך ש span(S)=S.

10. הוכיחו כי אם S היא תת קבוצה של מ"ו V, אזי span(S) הינו תת מרחב של V, וזהו תת המרחב הקטן ביותר של V המכיל את S .

הדרכה:
ראשית, הוכיחו כי span(S) הינו תת מרחב של V. על מנת להוכיח כי זהו תת המרחב הקטן ביותר של V המכיל את S, הוכיחו כי לכל תת מרחב של V, W, אם $S\subseteq W$ אזי $span\ (S)\subseteq W$.

<u>בהצלחה!</u>

1

פתרון תרגיל 8

1. נגדיר $U = \{ f \in V \mid f(-a) = f(a) \}$

* נראה כי U תת מרחב של V. ברור כי U תת קבוצה של V:

(1) $f \equiv 0 \in U$ כי $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = f(-x) = 0$

(2) יהיו $f, g \in U$ אזי:

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad (f+g)(x) \underset{\text{הג' החיבור ב-U}}{=} f(x) + g(x) \underset{f,g \in U}{=} f(-x) + g(-x) = (f+g)(-x)$$

$\Leftarrow \quad f+g \in U$

(3) תהי $f \in U$ ויהי $\alpha \in \mathbb{R}$, אזי:

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad (\alpha f)(x) \underset{\text{הג' כפל בסקלר ב-U}}{=} \alpha \cdot f(x) \underset{f \in U}{=} \alpha \cdot f(-x) = (\alpha f)(-x)$$

$\Leftarrow \quad \alpha f \in U$

לכן U תת מרחב של V.

* נראה כי $V = U \oplus W$:

(1) תהי $f \in V$ כלשהי.

נגדיר $h(x)$ ע"י: $\forall x \in \mathbb{R} \quad h(x) = \frac{1}{2}\left(f(x) + f(-x)\right)$

" $g(x)$ ע"י: $\forall x \in \mathbb{R} \quad g(x) = \frac{1}{2}\left(f(x) - f(-x)\right)$

אזי מתקיים:

- $\forall x \in \mathbb{R} \quad h(-x) \underset{\text{הג' } h}{=} \frac{1}{2}\left(f(-x) + f(-(-x))\right) = \frac{1}{2}\left(f(-x) + f(x)\right) =$

$\underset{\text{תכונה קומוטטיבי}}{=} \frac{1}{2}\left(f(x) + f(-x)\right) = h(x) \quad \Longrightarrow h \in U$

- $\forall x \in \mathbb{R} \quad g(-x) \underset{\text{הג' } g}{=} \frac{1}{2}\left(f(-x) - f(x)\right) = -\left[\frac{1}{2}\left(f(x) - f(-x)\right)\right]$

$\Longrightarrow \quad g \in W$

- $\forall x \in \mathbb{R} \quad h(x) + g(x) \underset{\text{הג' } h \text{ ו-} g}{=} \frac{1}{2}\left(f(x) + f(-x)\right) + \frac{1}{2}\left(f(x) - f(-x)\right) = f(x)$

$\Longrightarrow \quad f = g + h$

$V = U + W$ ולכן

2

(2) תהי $f\in U\cap W$ $\Leftarrow$ $f\in U$ וגם $f\in W$.

$f\in U$ $\Leftarrow$ $\forall x\in\mathbb{R}\quad f(-x)=f(x)$

$f\in W$ $\Leftarrow$ $\forall x\in\mathbb{R}\quad f(-x)=-f(x)$

שכן קיבלנו: $\forall x\in\mathbb{R}\quad f(x)=-f(x)$

$\Leftarrow$ $\forall x\in\mathbb{R}\quad 2f(x)=0$

$\Leftarrow$ $\forall x\in\mathbb{R}\quad f(x)=0$

$\Leftarrow$ $f(x)\equiv 0=0_V$

$\Leftarrow$ $U\cap W=\{0_V\}$

ולכן סה"כ, לפי משפט, $V=U\oplus W$

ולכן U משלים של W ב-V.

2. א. $W\subseteq V$, נראה כי W תת מרחב של V:

(1) $[0]\in W$ כי $0+0+0+0=0$ ולכן $W\neq 0$

(2) יהיו $\underset{A}{\begin{pmatrix}a_1&b_1\\c_1&d_1\end{pmatrix}},\ \underset{B}{\begin{pmatrix}a_2&b_2\\c_2&d_2\end{pmatrix}}\in W$, אזי:

$$A+B=\begin{pmatrix}a_1&b_1\\c_1&d_1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}a_2&b_2\\c_2&d_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_1+a_2&b_1+b_2\\c_1+c_2&d_1+d_2\end{pmatrix}$$

הג' חיבור מט' ב-W

ומתקיים:

$$(a_1+a_2)+(b_1+b_2)+(c_1+c_2)+(d_1+d_2)=$$

$$=(\underbrace{a_1+b_1+c_1+d_1}_{0})+(\underbrace{a_2+b_2+c_2+d_2}_{0})=0+0=0$$

קומוטטיביות ואסוציאטיביות החיבור ב-$\mathbb{R}$; $A,B\in W$

$\Leftarrow$ $A+B\in W$

(3) תהי $A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\in W$ ויהי $\alpha\in\mathbb{R}$, אזי:

$$\alpha A=\alpha\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha a&\alpha b\\\alpha c&\alpha d\end{pmatrix}$$

הג' כפל בסקלר ב-W

ומתקיים:

$$\alpha a+\alpha b+\alpha c+\alpha d=\alpha(a+b+c+d)=\alpha\cdot 0=0$$

$\Leftarrow$ $\alpha A\in W$

(3)

לכן סה"כ W תת מרחב של V.

ב. נגדיר:

$$U=\left\{\begin{pmatrix}0&0\\0&e\end{pmatrix} \middle| e\in\mathbb{R}\right\}$$

* $U\subseteq V$, נראה כי U תת מרחב של V:

(1) $[0]\in U$ ולכן $U\neq\phi$.

(2) יהיו $A=\begin{pmatrix}0&0\\0&a\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}0&0\\0&b\end{pmatrix} \in U$, אזי:

$$A+B=\begin{pmatrix}0&0\\0&a\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&0\\0&b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&a+b\end{pmatrix}\in U$$

הג' חיבור ב-U

$a,b\in\mathbb{R}$ ולכן $a+b\in\mathbb{R}$

$\Leftarrow A+B\in U$

(3) תהי $A=\begin{pmatrix}0&0\\0&a\end{pmatrix}\in U$ ויהי $\alpha\in\mathbb{R}$. אזי:

$$\alpha A=\alpha\begin{pmatrix}0&0\\0&a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&\alpha a\end{pmatrix}\in U$$

הג' כפל בסקלר ב-U

$\alpha,a\in\mathbb{R}$ ולכן $\alpha a\in\mathbb{R}$

$\Leftarrow \alpha A\in W$

לכן U תת מרחב של V.

* נראה כי U משלים של W ב-V:

(1) תהי $\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\in V$ כלשהי אזי:

$$\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}=\underbrace{\begin{pmatrix}a&b\\c&(-a-b-c)\end{pmatrix}}_{\in W}+\underbrace{\begin{pmatrix}0&0\\0&(d-a-b-c)\end{pmatrix}}_{\in U}$$

$\Leftarrow V=U+W$

(2) תהי $\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\in U\cap W$ $\Leftarrow$ $\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\in U$ וגם $\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\in W$

$\Downarrow$ $a+b+c+d=0$; $\Downarrow$ $a=b=c=0$

$\Downarrow$ $a=b=c=d=0$ $\Longrightarrow$ $U\cap W=\left\{\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\right\}=\{0_V\}$

(4)

ולכן לא מתקיים $V=U\oplus W$ $\Leftarrow$ U משלים של W ב-V.

כעת, נגדיר $U'=\left\{\begin{pmatrix}0&0\\e&e\end{pmatrix} \middle| e\in\mathbb{R}\right\}$

(*) $U'\subseteq V$, נראה כי U' תת מרחב של V:

(1) $[0]\in U'$ ולכן $U'\neq\emptyset$.

(2) יהיו $U'\ni A=\begin{pmatrix}0&0\\a&a\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0\\b&b\end{pmatrix}=B$, אזי:

$$A+B=\begin{pmatrix}0&0\\a&a\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&0\\b&b\end{pmatrix}\underset{\text{הג' חיבור ב-}U'}{=}\begin{pmatrix}0&0\\a+b&a+b\end{pmatrix}\underset{\substack{a,b\in\mathbb{R}\\ \text{ולכן } a+b\in\mathbb{R}}}{\in} U'$$

$\Leftarrow A+B\in U'$

(3) תהי $A=\begin{pmatrix}0&0\\a&a\end{pmatrix}\in U'$ ויהי $\alpha\in\mathbb{R}$, אזי:

$$\alpha A=\alpha\begin{pmatrix}0&0\\a&a\end{pmatrix}\underset{\text{הג' כפל בסקלר ב-}U'}{=}\begin{pmatrix}0&0\\\alpha a&\alpha a\end{pmatrix}\underset{\substack{\alpha,a\in\mathbb{R}\\ \text{ולכן } \alpha a\in\mathbb{R}}}{\in} U'$$

$\Leftarrow \alpha A\in U'$

ולכן סה"כ U' תת מרחב של V.

(*) נראה כי U' משלים של W ב-V:

(1) תהי $\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\in V$ כלשהי, אזי:

$$\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}=\underset{\in W}{\begin{pmatrix}a&b\\\frac{-a-b+c-d}{2}&\frac{-a-b-c+d}{2}\end{pmatrix}}+\underset{\in U'}{\begin{pmatrix}0&0\\\frac{a+b+c+d}{2}&\frac{a+b+c+d}{2}\end{pmatrix}}$$

כי $0=a+b+\left(\frac{-a-b+c-d}{2}+\frac{-a-b-c+d}{2}\right)$

$\Leftarrow V=U'+W$

(2) תהי $\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\in U'\cap W$ $\Leftarrow$ $\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\in U'$ וגם $\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\in W$

(5)

$$a=b=c=d=0 \Leftarrow \begin{cases} a+b+c+d=0 & \Leftarrow \begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\in W \\ \text{וגם} \\ a=b=0,\ c=d & \Leftarrow \begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\in U' \end{cases}$$

$$\Leftarrow \quad U'\cap W=\left\{\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\right\}=0_V$$

לכן סה"כ $V=U'\oplus W$ ולכן U' משלים של W ב-V.

ברור כי $U'\neq U$ (כיוון ש $U\not\ni\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix}\in U'$) ומתקיים כי U ו-U' שניהם משלימים של W ב-V.

3. הטענה אינה נכונה, נקבל דוגמא נגדית:

יהי $V=\mathbb{R}^{2\times 2}$ ויהיו U,W מהשאלה הקודמת

$\left(W=\left\{\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\middle| a+b+c+d=0\right\},\ U=\left\{\begin{pmatrix}0&0\\0&e\end{pmatrix}\middle| e\in\mathbb{R}\right\}\right)$.

ראינו בשאלה הקודמת כי $V=U\oplus W$ אבל $V\neq U\cup W$

כי למשל כמו' $\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$ לא ב-W ולא ב-V!

לכן זוהי דוגמא נגדית המפריכה את הטענה.

4. הטענה נכונה. הוכחה:

יהי V מ"ו כלשהו. נגדיר $W=\{0_V\}$ ו-$U=V$.

אזי: (1) $U\cup W=V\cup\{0_V\}=V$

(2) $U\cap W=V\cap\{0_V\}=\{0_V\}$

(3) יהי $v\in V$ כלשהו אזי

$v=\underbrace{v}_{\in U}+\underbrace{0_V}_{\in W}$

0_V אדיש חיבורי ב-V

כי $U=V$

$\Leftarrow \quad V=U+W$

מ-(1) נובע כי $V=U\cup W$ ומ-(2) ו-(3) נקבל כי $V=U\oplus W$.

מש"ל.

⑥

$$x^2-2=a(2x^2+x+1)+b(3x^2+2x)+c(4x^2-10)$$ .5

$$x^2-2=(2a+3b+4c)x^2+(a+2b)x+(a-10c)$$

לכן:

$$\begin{cases} 2a+3b+4c=1 \\ a+2b=0 \\ a-10c=-2 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -10 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & -10 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3-R_1\to R_3]{R_2-2R_1\to R_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 1 \\ 0 & -2 & -10 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3-2R_2\to R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & -18 & -4 \end{array}\right)$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} a+2b=0 \\ -b+4c=1 \\ -18c=-4 \end{cases} \Longrightarrow a=\frac{2}{9}, \quad b=-\frac{1}{9}, \quad c=\frac{2}{9}$$

$$x^2-2=\frac{2}{9}(2x^2+x+1)-\frac{1}{9}(3x^2+2x)+\frac{2}{9}(4x^2-10) \Longleftarrow$$

$$(0, x+1, 1, 2)=\alpha(3,1,-4,5)+\beta(2,0,3,1)+\mu(1,-2,1,4)$$ .6

לכן:

$$\begin{cases} 3\alpha+2\beta+\mu=0 \\ \alpha-2\mu=x+1 \\ -4\alpha+3\beta+\mu=1 \\ 5\alpha+\beta+4\mu=2 \end{cases}$$

נרכז למערכת ע״י פתרון:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & x+1 \\ -4 & 3 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & 4 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & x+1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ -4 & 3 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & 4 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{R_3+4R_1\to R_3 \\ R_4-5R_1\to R_4}]{R_2-3R_1\to R_2}$$

(7)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & x+1 \\ 0 & 2 & 7 & -3x-3 \\ 0 & 3 & -7 & 4x+5 \\ 0 & 1 & 14 & -5x-3 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_4} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & x+1 \\ 0 & 1 & 14 & -5x-3 \\ 0 & 3 & -7 & 4x+5 \\ 0 & 2 & 7 & -3x-3 \end{array}\right) \xrightarrow[R_4-2R_2 \to R_4]{R_3-3R_2 \to R_3}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & x+1 \\ 0 & 1 & 14 & -5x-3 \\ 0 & 0 & -49 & 19x+14 \\ 0 & 0 & -21 & 7x+3 \end{array}\right) \xrightarrow{-\frac{1}{7}R_3 \to R_3} \left(\begin{array}{cccc} 1 & 0 & -2 & x+1 \\ 0 & 1 & 14 & -5x-3 \\ 0 & 0 & 7 & -\frac{19}{7}x-2 \\ 0 & 0 & -21 & 7x+3 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_4+3R_3 \to R_4} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & x+1 \\ 0 & 1 & 14 & -5x-3 \\ 0 & 0 & 7 & -\frac{19}{7}x-2 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{8}{7}x-3 \end{array}\right)$$

על מנת שלמערכת יהיה פתרון נדרוש $rank(A)=rank(A|b)$, כלומר $-\frac{8}{7}x-3=0$
כלומר $X=-2\frac{5}{8}$.

סה"כ, עבור $X=-2\frac{5}{8}$ יתקיים הנדרש.

.7

$$(m,n,k) = \alpha(1,-3,2)+\beta(2,-1,1)$$
$$(m,n,k) = (\alpha+2\beta,\ -3\alpha-\beta,\ 2\alpha+\beta)$$

$$\begin{cases} \alpha+2\beta = m \\ -3\alpha-\beta = n \\ 2\alpha+\beta = k \end{cases}$$

נרצה שלמערכת יהיה פתרון (עבור משתנים α,β):

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & m \\ -3 & -1 & n \\ 2 & 1 & k \end{array}\right) \xrightarrow[R_3-2R_1 \to R_3]{R_2+3R_1 \to R_2} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & m \\ 0 & 5 & n+3m \\ 0 & -3 & k-2m \end{array}\right) \xrightarrow{R_3+\frac{3}{5}R_2 \to R_3}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & m \\ 0 & 5 & n+3m \\ 0 & 0 & k+\frac{3}{5}n-\frac{1}{5}m \end{array}\right)$$

(8)

על מנת שהמערכת תהיה פתרון צריך להתקיים $\text{rank}(A)=\text{rank}(A|b)$, כלומר,
$k+\frac{3}{5}n-\frac{1}{5}m=0$, כלומר $5k+3n-m=0$.

לכן אם ורק אם $5k+3n-m=0$ יתקיים הנדרש.

8. יהי $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{2\times2}$ כלשהו. נבדוק האם ניתן לכתוב
כצירוף של אברי הקבוצה:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=\alpha\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}+\delta\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \beta+\delta=a \\ \beta+\mu=b \\ 2\beta+\mu=c \\ \alpha+\beta+\delta=d \end{cases}$$

נדרוש שהמערכת תהיה פתרון (עבור הנעלמים δ,μ,β,α):

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 0 & 1 & a \\ 0 & 1 & 1 & 0 & b \\ 0 & 2 & 1 & 0 & c \\ 1 & 1 & 0 & 1 & d \end{array}\right)\xrightarrow{R_1\leftrightarrow R_4}\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & d \\ 0 & 1 & 1 & 0 & b \\ 0 & 2 & 1 & 0 & c \\ 0 & 1 & 0 & 1 & a \end{array}\right)\xrightarrow[R_4-R_2\to R_4]{R_3-2R_2\to R_3}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & d \\ 0 & 1 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & -1 & 0 & c-2b \\ 0 & 0 & -1 & 1 & a-b \end{array}\right)\xrightarrow{R_4-R_3\to R_4}\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & d \\ 0 & 1 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & -1 & 0 & c-2b \\ 0 & 0 & 0 & 1 & a+b-c \end{array}\right)$$

מתקיים תמיד $\text{rank}(A|b)=\text{rank}(A)=4$ ולכן למערכת יש פ.
לכל a,b,c,d ולכן הקבוצה הנ"ל פורשת את $\mathbb{R}^{2\times2}$.
(שימו לב כי לכל a,b,c,d קיים למערכת פ. יחיד כיון ש
מס' הנעלמים $=4=\text{rank}(A)$ ולכן קיים בדיוק פ"ר אחד!).

9.

טענת עזר:

יהי מ"ו V מתקיים $span(V)=V$.

הוכחת טענת העזר:

כיוון א': ברור כי $sp(V) \supseteq V$ כיוון שלכל $v \in V$, v הינו צ"ל של איברי V ע"י $1 \cdot v$ ולכן שייך ל-$sp(V)$

כיוון ב':

יהי $v \in Sp(V)$, אזי קיימים $v_1,\dots,v_n \in V$ וסקלרים $a_1,\dots,a_n$ כך ש $v=a_1v_1+\dots+a_nv_n$, אבל V הינו מ"ו ולכן סגור תחת חיבור וכפל בסקלר ולכן מתקיים כי $v=a_1v_1+\dots+a_nv_n \in V$.

לכן $sp(V) \subseteq V$.

קיבלנו כי $V \subseteq sp(V)$ וגם $V \supseteq sp(V)$ ולכן נובע $V=sp(V)$.

- סוף הוכחת טענת העזר -

כעת, נעבור לטענה בשאלה - הטענה נכונה, כי אם נבחר $S=V$ אזי עפ"י טענת העזר נקבל $sp(S)=sp(V)=V=S$.

מש"ל.

10. תהי S תת קבוצה של מ"ו V מעל שדה F.

(*) נראה כי $span(S)$ תת מרחב של V:

(1) אם $S \neq \phi$ אזי $span(S) \neq \phi$ כיוון שמתקיים $S \subseteq span(S)$.

אם $S=\phi$ אזי עפ"י ההגדרה $span(S)=\{0_V\}$ ולכן $span(S) \neq \phi$.

(2) יהיו $u,v \in span(S)$.

אזי קיימים $s_1,\dots,s_n \in S$ וסקלרים $\alpha_1,\dots,\alpha_n,\beta_1,\dots,\beta_n$ ב-F כך ש

$u=\alpha_1s_1+\alpha_2s_2+\dots+\alpha_ns_n$ ו- $v=\beta_1s_1+\beta_2s_2+\dots+\beta_ns_n$.

שימו לב כי הנחנו כי u ו-v שניהם צ"ל של $s_1,\dots,s_n \in S$. ניתן להניח

זאת, כי אם לא, אזי פשוט ניתן להוסיף את האיברים החסרים עם מקדם

(15)

מתקיים:

$$u+v = (\alpha_1 s_1+\ldots+\alpha_n s_n)+(\beta_1 s_1+\ldots+\beta_n s_n) \underset{\text{אסוציאטיביות וקומוטטיביות ב-}V}{=}$$

$$= (\alpha_1 s_1+\beta_1 s_1)+(\alpha_2 s_2+\beta_2 s_2)+\ldots+(\alpha_n s_n+\beta_n s_n) =$$

$$\underset{\text{דיסטריבוטיביות ב-}V}{=} (\alpha_1+\beta_1)s_1+(\alpha_2+\beta_2)s_2+\ldots+(\alpha_n+\beta_n)s_n \underset{\text{כי }s_1,\ldots,s_n\in S}{\in} span(S)$$

(3) יהי $u\in span(S)$ ויהי $\beta\in F$.

אזי קיימים $s_1,\ldots,s_n$ ו- $\alpha_1,\ldots,\alpha_n\in F$ כך ש- $u=\alpha_1 s_1+\alpha_2 s_2+\ldots+\alpha_n s_n$.

אזי:

$$\beta\cdot u=\beta(\alpha_1 s_1+\ldots+\alpha_n s_n) \underset{\text{דיסטריבוטיביות ב-}V}{=} \beta(\alpha_1 s_1)+\ldots+\beta(\alpha_n s_n)=$$

$$\underset{\text{אסוציאטיביות הכפל בסקלר}}{=} (\beta\alpha_1)s_1+\ldots+(\beta\alpha_n)s_n \underset{\text{כי }s_1,\ldots,s_n\in S}{\in} span(S)$$

סה"כ לכן, לפי משפט, $span(S)$ תת מרחב של V.

(*) נראה כי $span(S)$ הינו תת המרחב הקטן ביותר של V המכיל את S:
נראה כי לכל W, תת מרחב של V, אם $S\subseteq W$ אזי $span(S)\subseteq W$:

יהי W תת מרחב של V כך ש- $S\subseteq W$.

יהי $v\in sp(S)$. אזי קיימים $s_1,\ldots,s_n\in S$ ו- $\alpha_1,\ldots,\alpha_n\in F$
כך ש- $v=\alpha_1 s_1+\alpha_2 s_2+\ldots+\alpha_n s_n$.

$s_1,\ldots,s_n\in S\subseteq W$ ולכן $s_1,\ldots,s_n\in W$. W תת מרחב של V ולכן
סגור תחת כפל בסקלר ולכן $\alpha_1 s_1,\alpha_2 s_2,\ldots,\alpha_n s_n\in W$. כמו כן W
סגור תחת חיבור וקטורים ולכן $v=\alpha_1 s_1+\alpha_2 s_2+\ldots+\alpha_n s_n\in W$.
$\Leftarrow$ $v\in W$.

קיבלנו כי לכל $v\in sp(S)$ מתקיים $v\in W$ $\Leftarrow$ $sp(S)\subseteq W$

מש"ל.

תרגיל מס' 9

הגשה עד: 4.1.2004

1. עבור כל קבוצה הראו האם היא ת"ל או בת"ל:

א. $\{(1+i,2-i),(2i,3+i)\}$ מעל המרוכבים.
ב. $\{(1+i,2-i),(2i,3+i)\}$ מעל הממשיים.
ג. $\left\{\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1&1\\-1&2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3&2\\1&4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3&0\\2&1\end{pmatrix}\right\}$.

2. עבור אילו ערכי x הקבוצה $\{(2,0,x,1),(1,2,0,1),(x,1,0,0)\}$ בת"ל?

3. עבור אילו ערכי a,b הקבוצה $\{(2,a-b,1),(a,b,3)\}$ ת"ל?

4. במ"ו V נתונים 3 וקטורים u,w,v בת"ל. הוכיחו או הפריכו: גם הוקטורים $u+v,v+w,u+w$ בת"ל.

5. יהי V מרחב הוקטורים מעל R המורכב מכל הפונקציות הרציפות מהקטע $[-1,1]$ ל-R. תהי f הפונקציה ב- V המוגדרת ע"י $f(x)=x^2$ ותהי ע הפונקציה ב- V המוגדרת ע"י $g(x)=x\cdot|x|$.
הוכיחו או הפריכו: $\{f,g\}$ בת"ל ב- V.

6. מצאו בסיס ומימד לכל אחד מן המרחבים הבאים (אין צורך להוכיח כי הם מרחבים):

א. $V=\{(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)\in R^5 \mid x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=0\}$

ב. $V=\{p(x)\in R_2[x] \mid p(2)=0\}$

ג. $V=\left\{\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix} \middle| \ a,b,c,d\in R,\ \begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}=0\right\}$

7. מצאו בסיס ומימד של מרחב הפתרונות של המערכת:

$$\begin{cases}x+2y-2z+2s-t=0\\x+2y-z+3s-2t=0\\2x+4y-7z+s+t=0\end{cases}$$

בהצלחה!

פתרון תרגיל 9

שאלה 1:

א. ניקח $a,b\in\mathbb{C}$ כך ש:

$$a(1+i,\ 2-i)+b(2i,3+i)=(0,0)$$

אזי:

$$\begin{cases} a(1+i)+b\cdot 2i=0 \\ a(2-i)+b(3+i)=0 \end{cases}$$

ממשוואה I מקבלים:

$$b=\frac{-a(1+i)}{2i}=\frac{-a(1+i)\cdot 2i}{2i\cdot 2i}=\frac{a(2i-2)}{4}=\frac{a(i-1)}{2}$$

אם נציב $b=\frac{a(i-1)}{2}$ נקבל:

$$a(2-i)+\frac{a(i-1)(3+i)}{2}=a(2-i)+\frac{a(-4+2i)}{2}=a(2-i-2+i)=a\cdot 0=0$$

לכן פתרון המערכת הוא $b=\frac{a(i-1)}{2}$

לכן אם נבחר $a=2$ נקבל $b=i-1$ ואזי

$$2(1+i,\ 2-i)+(i-1)(2i,3+i)=\left(2+2i+2i(i-1),\ 4-2i+(i-1)(3+i)\right)=$$
$$=(2+2i-2-2i,\ 4-2i+3i-3-1-i)=(0,0)$$

$\Longleftarrow$ הוקטורים ת"ל מעל $\mathbb{C}$.

ב. מעל הממשיים כאשר $a,b\in\mathbb{R}$ נקבל את המערכת (כמקודם):

$$\begin{cases} a(1+i)+2bi=0 \\ a(2-i)+b(3+i)=0 \end{cases}$$

כיוון שידוע $a,b\in\mathbb{R}$ נשווה בכל משוואה את החלק הממשי והמדומה ונקבל מערכת של 4 משוואות:

$$\begin{cases} a=0 \\ ai+2bi=0i \\ 2a+3b=0 \\ -ai+bi=0i \end{cases} \Longrightarrow a=b=0 \Longrightarrow$$

הוקטורים בת"ל מעל $\mathbb{R}$

ב

ג.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \\ 3 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{R_3-3R_1\to R_3 \\ R_4-3R_1\to R_4}]{R_2+R_1\to R_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 2 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2\leftrightarrow R_3}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -3 & 2 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_4-3R_2\to R_4]{R_3+2R_2\to R_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & -5 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_4+R_3\to R_4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

קיבלנו שורת אפסים ולכן הוקטורים ת"ל.

שאלה 2:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & x & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ x & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1\leftrightarrow R_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & x & 1 \\ x & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3-xR_1\to R_3]{R_2-2R_1\to R_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & x & -1 \\ 0 & 1-2x & 0 & -x \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{4R_3\to R_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & x & -1 \\ 0 & 4(1-2x) & 0 & -4x \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3+(1-2x)R_2\to R_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & x & -1 \\ 0 & 0 & x(1-2x) & (-1-2x) \end{pmatrix}$$

נבדוק מתי המט' המדורגת יש שורת אפסים:

זה קורה כאשר $-1-2x=0$ וגם $x(1-2x)=0$, כלומר כאשר

$x=-\frac{1}{2}$ וגם ($x=0$ או $x=\frac{1}{2}$) [illegible].

⇐ לכל ערך של x, אין במט' המדורגת שורת אפסים.

⇐ הוקטורים בת"ל לכל x.

③

שאלה 3:

$$\begin{pmatrix} 2 & a-b & 1 \\ a & b & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 - \frac{a}{2}R_1 \to R_2} \begin{pmatrix} 2 & a-b & 1 \\ 0 & \left(b-\frac{a^2}{2}+\frac{ab}{2}\right) & 3-\frac{a}{2} \end{pmatrix}$$

על מנת שהוקטורים יהיו ת"ל עלינו לקבל במט' המדורגת שורת אפסים,
ולכן נדרוש:

$$\begin{cases} b-\frac{a^2}{2}+\frac{ab}{2}=0 & \Rightarrow b=\frac{9}{2} \\ 3-\frac{a}{2}=0 & \Rightarrow a=6 \end{cases}$$

לכן עבור $a=6$ ו $b=\frac{9}{2}$ נקבל כי הוקטורים ת"ל.

שאלה 4:

הטענה נכונה. הוכחה:

יהיו a,b,c סקלרים כך ש

$$a(u+v)+b(v+w)+c(u+w)=0_V$$

$$au+av+bv+bw+cu+cw=0_V \quad \Leftarrow \text{דיסטריביוטיביות במ"ו } V$$

$$au+cu+av+bv+bw+cw=0_V \quad \Leftarrow \text{קומוטטיביות בחיבור במ"ו } V$$

$$(a+c)u+(a+b)v+(b+c)w=0_V \quad \Leftarrow$$

$$\begin{cases} a+c=0 \\ a+b=0 \\ b+c=0 \end{cases} \quad \Leftarrow u,v,w \text{ בת"ל נתון}$$

$$a=b=c=0 \quad \Leftarrow$$

$u+v,\ v+w,\ u+w$ בת"ל. $\Leftarrow$

מש"ל.

(7)

שאלה 5:

הוכחה: $\{f,g\}$ בת"ל ב- V.

יהיו a,b סקלרים ע"פ $\quad af+bg = 0_V = 0$
פונ' האפס

$\Leftarrow \quad \forall x \in [-1,1] \quad af(x)+bg(x)=0$

בפרט הפסוק נכון עבור $x=-1$ נקבל

$$af(-1)+bg(-1)=0$$

כלומר לפי ש $f(x)=x^2$; $g(x)=x\cdot|x|$ נקבל

$$a\cdot(-1)^2 + b\cdot(-1)\cdot|-1| = 0$$

ומכאן $\quad$ ① $\quad a-b=0$

כמו כן עבור $x=1$ נקבל $\quad af(1)+bg(1)=0$

כלומר $\quad$ ② $\quad a+b=0$

מ- ① ומ- ② נובע כי בהכרח $a=b=0 \Leftarrow \{f,g\}$ בת"ל.

מש"ל.

שאלה 6:

א. נגדיר $S=\{(1,0,0,0,-1),(0,1,0,0,-1),(0,0,1,0,-1),(0,0,0,1,-1)\}$. נוכיח כי בסיס ל-$V$:

(1) S בת"ל כי המט' מדורגת ללא שורות אפס.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

(2) (א) ברור כי $S \subseteq V$ ולכן $\mathrm{span}(S) \subseteq V$

(ב) יהי $(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) \in V \Leftarrow x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=0 \Leftarrow x_5=-x_1-x_2-x_3-x_4$

ומתקיים:

$$(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) = (x_1,x_2,x_3,x_4,-x_1-x_2-x_3-x_4) =$$

$$= x_1(1,0,0,0,-1)+x_2(0,1,0,0,-1)+x_3(0,0,1,0,-1)+x_4(0,0,0,1,-1) \in \mathrm{span}(S)$$

$\Leftarrow V \subseteq \mathrm{span}(S) \Leftarrow$ מ- (א) ו- (ב) נובע כי $V=\mathrm{span}(S)$

ולכן S בסיס של V $\quad \dim V = 4$.

(5)

ב. יהיו $p(x)=x^2-4$ ו- $q(x)=x-2$. נגדיר $S=\{p(x),q(x)\}$.

נוכיח כי S בסיס ל-V:

(1) S בת"ל כי אם

$$a(x-2)+b(x^2-4)=0$$

אזי נקבל כי

$$\begin{cases} b=0 \\ a=0 \\ -2a-4b=0 \end{cases}$$

ולכן בהכרח $a=b=0$.

(2) נוכיח כי $span(S)=V$:

(א) יהי $a+bx+cx^2\in V$ כלשהו. אזי

$$a+b\cdot 2+c\cdot 2^2=0$$

$\Leftarrow$ $a+2b+4c=0$ $\Leftarrow$ $a=-2b-4c$ ומכאן:

$$\underbrace{a}_{=-2b-4c}+bx+cx^2=(-2b-4c)+bx+cx^2=b(x-2)+c(x^2-4)=bq(x)+cp(x)\in span(S)$$

ולכן $V\subseteq span(S)$. כמו כן $p(2)=q(2)=0$ ולכן $S\subseteq V$ ולכן $span(S)\subseteq V$.

$\Leftarrow$ $span(S)=V$.

סה"כ לכן S בסיס של V ו- $\dim V=|S|=2$.

ג. תהי $\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\in V$ אזי $\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$

$$\Leftarrow \quad \begin{pmatrix}a+3b & 2a+4b\\ c+3d & 2c+4d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$$

$$\Leftarrow \quad \begin{cases} a+3b=0 \\ 2a+4b=0 \\ c+3d=0 \\ 2c+4d=0 \end{cases} \qquad \begin{matrix} \Rightarrow a=b=0 \\ \\ \Rightarrow c=d=0 \end{matrix}$$

$\Leftarrow$ $V=\left\{\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\right\}$ ולכן אין ל-V בסיס ו- $\dim V=0$.

(6)

שאלה 7:

$$\begin{cases} x+2y-2z+2s-t=0 \\ x+2y-z+3s-2t=0 \\ 2x+4y-7z+s+t=0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & 3 & -2 \\ 2 & 4 & -7 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3-2R_1\to R_3]{R_2-R_1\to R_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_3+3R_2\to R_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

לכן המערכת המדורגת השקולה היא:

$$\begin{cases} x+2y-2z+2s-t=0 \\ z+s-t=0 \end{cases}$$

$\Leftarrow$ $s=-x-2y+3z,\ t=-x-2y+4z$

$\Leftarrow$ פ. כללי למערכת הנו $(x,y,z,-x-2y+3z,-x-2y+4z)$

$\Leftarrow$ מרחב הפתרונות של המערכת הוא:

$$W=\{(x,y,z,-x-2y+3z,-x-2y+4z)\mid x,y,z\in\mathbb{R}\}$$

נגדיר $S=\{(1,0,0,-1,-1),(0,1,0,-2,-2),(0,0,1,3,4)\}$ ונוכיח כי S בסיס של W:

(1) S בת"ל כי המט'

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

הינה מט'

מדורגת ללא שורת אפסים.

(7)

(ב) לכל $(x,y,z,-x-2y+3z,-x-2y+4z)\in W$ מתקיים

$$(x,y,z,-x-2y+3z,-x-2y+4z)=x(1,0,0,-1,-1)+y(0,1,0,-2,-2)+z(0,0,1,3,4)$$

$\Leftarrow$ $span(S)=W$

סה"כ לכן, S בסיס של W ! $\dim W=3$.

תרגיל מס' 10

הגשה עד: 11.1.2004

1. מצאו בסיס ומימד לכל אחד מן המרחבים הבאים (אין צורך להוכיח כי הם מרחבים):

א. $W = span\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\right\}$

ב. $V = \left\{ (x_1, x_2, \ldots, x_{2n}) \in R^{2n} \;\middle|\; \left(\sum_{i=1}^{n} x_{2i-1}\right) - \left(\sum_{i=1}^{n} x_{2i}\right) = 0 \right\}$

2. יהיו $U = \{p(x) \in R_3[x] \mid p(2) = 0\}$ ו- $W = span\{x^2 + x + 1, x^2 - x, x - 2\}$ תתי מרחבים של $R_3[x]$. מצאו בסיס ומימד ל- $U \cap W$, $U + W$, W , U.

3. ידוע כי C^2 הינו מ"ו מעל R. מצאו מ"ו איזומורפי ל- C^2. הוכיחו.

4. יהי V מ"ו מעל שדה F ויהי $e = \{e_1, \ldots, e_n\}$ בסיס של V. הוכיחו או הפריכו: גם $e' = \{e_1 + e_2, e_2 + e_3, e_3 + e_4, \ldots, e_{n-1} + e_n, e_n + e_1\}$ בסיס של V.

5. יהיו $U = \{A \in R^{n \times n} \mid A^t = A\}$ ו- $W = \{A \in R^{n \times n} \mid A^t = -A\}$ תתי מרחבים של $R^{n \times n}$. הוכיחו או הפריכו: U ו- W איזומורפיים.

בהצלחה!

(1)

פתרון תרגיל מס' 10

שאלה 1:

א.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{R_3-2R_1\to R_3 \\ R_4-2R_1\to R_4}]{R_2+R_1\to R_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -6 & -5 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[R_4-R_2\to R_4]{R_3-2R_2\to R_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & -11 & -8 \\ 0 & 0 & -11 & -8 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_4-R_3\to R_4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & -11 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\Leftarrow$ $\{(1,0,2,3),(0,1,5,3),(0,0,-11,-8)\}$ בסיס ל- W

ו: $\dim W=2$.

ב. יהי $(x_1,\dots,x_{2n})\in V$.

$\Leftarrow$ $x_1+x_3+x_5+\dots+x_{2n-1}-x_2-x_4-x_6-\dots-x_{2n}=0$

$\Leftarrow$ $x_1-x_2+x_3-x_4+x_5-x_6+\dots+x_{2n-1}-x_{2n}=0$

$\Leftarrow$ $x_1=x_2-x_3+x_4-x_5+\dots+x_{2n-2}-x_{2n-1}+x_{2n}$

$\Leftarrow$ $(x_1,\dots,x_n)=(x_2-x_3+x_4-x_5+\dots+x_{2n-2}-x_{2n-1}+x_{2n},x_2,\dots,x_{2n})$

③

נגדיר לכן

$$S=\{\overset{v_1}{(1,1,0,\dots,0)},\overset{v_2}{(-1,0,1,0,\dots,0)},\overset{v_3}{(1,0,0,1,0,\dots,0)},\overset{v_4}{(-1,0,0,0,-1,0,\dots,0)},\dots,$$
$$\dots,\underset{v_{2n-2}}{(-1,0,\dots,0,1,0)},\underset{v_{2n-1}}{(1,0,\dots,0,1)}\}$$

נשים לב ב-S מקיים כי סכום הקואורדינטות באי זוגיות פחות סכום הקואורדינטות הזוגיות שווה לאפס ולכן $S\subseteq V$.

נראה כי S בסיס ל-V:

(1) נראה כי S בת"ל:

יהיו $a_1,a_2,\dots,a_{2n-1}$ סקלרים (נשים לב כי ב-S יש $2n-1$ וקטורים) כך ש

$$(*)\quad \sum_{i=1}^{2n-1} a_i v_i=\vec{0}$$

נשים לב כי ב-v_i הקואורדינטה ה-$i+1$ שונה מאפס (והיא שווה ל-±1) והוא הוקטור היחיד ב-S שמקיים זאת (כלומר, לכל $v_j\in S$ כך ש-$j\neq i$, הקואורדינטה ה-$i+1$ ב-v_j שווה לאפס), לכן מאחר שמתקיים $(*)$ נדרש $a_i=0$, לכל $1\le i\le 2n-1$.

$\Leftarrow\quad a_1=a_2=\dots=a_{2n-1}=0$

$\Leftarrow$ S בת"ל.

(2) נראה כי S פורשת את V:

יהי $(x_1,\dots,x_{2n})\in V \;\Leftarrow\; x_1+x_3+x_5+\dots+x_{2n-1}-x_2-x_4-\dots-x_{2n}=0$

$\Leftarrow$ ומתקיים: $x_1=x_2+x_4+\dots+x_{2n}-x_3-x_5-\dots-x_{2n-1}$

$$(x_1,\dots,x_{2n})=(x_2+x_4+\dots+x_{2n}-x_3-x_5-\dots-x_{2n-1},x_2,x_3,\dots,x_{2n})=$$
$$=x_2v_1+x_3v_2+x_4v_3+\dots+x_{2n}v_{2n-1}\in span(S)\Rightarrow span(S)\supseteq V$$

כמו כן, ראינו כי $S\subseteq V$ (ולכן $span(S)\subseteq V$) $\Leftarrow$ $V=span(S)$.

לכן S בסיס של V ! $\dim V=2n-1$ (כי ב-S יש $2n-1$ וקטורים).

שאלה 2:

(א) נמצא בסיס ל U:

יהי $U \ni p(x)=ax^3+bx^2+cx+d$

$\Rightarrow p(2) = 8a+4b+2c+d=0 \Rightarrow d=-8a-4b-2c$

נגדיר $S=\{\underset{p_1(x)}{x^3-8},\ \underset{p_2(x)}{x^2-4},\ \underset{p_3(x)}{x-2}\}$

ונוכיח כי S בסיס ל U:

(1) S בת"ל כי דרך האיזומורפיזם המשרה $f:\mathbb{R}_3[x]\to\mathbb{R}^4$

ע"י $f(ax^3+bx^2+cx+d)=(a,b,c,d)$ נקבל כי

$f(p_1(x))=f(x^3-8)=(1,0,0,-8)$, $f(p_2(x))=f(x^2-4)=(0,1,0,-4)$

$f(p_3(x))=f(x-2)=(0,0,1,-2)$

וכי המט'

$$\begin{pmatrix}1&0&0&-8\\0&1&0&-4\\0&0&1&-2\end{pmatrix}$$

היא מדורגת ללא שורות אפסים.

(2)(א) ברור כי $S\subseteq U$ (כיוון ש $p_1(2)=p_2(2)=p_3(2)=0$) ולכן $span(S)\subseteq U$.

(ב) יהי $U\ni p(x)=ax^3+bx^2+cx+d$

$\Leftarrow$ $p(2)=8a+4b+2c+d=0$

$\Leftarrow$ $d=-8a-4b-2c$

$\Leftarrow$ $p(x)=ax^3+bx^2+cx-8a-4b-2c=$

$=a(x^3-8)+b(x^2-4)+c(x-2)\in span(S)$

$\Leftarrow$ $U\subseteq span(S)$.

לכן $U=span(S)$.

סה"כ קיבלנו S בסיס ל U ! $\dim U=3$.

(ב) נמצא בסיס ל W: נגדיר $S=\{x^2+x+1,\ x^2-x,\ x-2\}$

ונעזר באיזומורפיזם f שהוגדר לעיל:

$$\begin{pmatrix}0&1&1&1\\0&1&-1&0\\0&0&1&-2\end{pmatrix}\xrightarrow{R_2-R_1\to R_2}\begin{pmatrix}0&1&1&1\\0&0&-2&-1\\0&0&1&-2\end{pmatrix}\xrightarrow{R_3+\frac{1}{2}R_2\to R_3}\begin{pmatrix}0&1&1&1\\0&0&-2&-1\\0&0&0&-2\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

(4)

קיבלנו כי במט' המדורגת אין שורת אפסים ולכן S בת"ל. כמו כן הוכחנו כי S פורשת את W (לפי הגדרת W).

$\Leftarrow$ S בסיס ל W ! $\dim W=3$.

(*) נמצא בסיס ל $U+W$:

$$U+W=span\{x^3-8,\ x^2-4,\ x-2,\ x^2+x+1,\ x^2-x\}$$

נמצא בסיס ל $U+W$ בעזרת האיזומורפיזם f שהוגדר לעיל:

$$\begin{array}{cc} x^3-8 \leftrightarrow & \\ x^2-4 \leftrightarrow & \\ x-2 \leftrightarrow & \\ x^2+x+1 \leftrightarrow & \\ x^2-x \leftrightarrow & \end{array}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_5-R_2\to R_5]{R_4-R_2\to R_4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_5+R_3\to R_5]{R_4-R_3\to R_4}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_5+\frac{-2}{7}R_4\to R_5} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\Leftarrow$ בסיס ל $U+W$ הינו $\{x^3-8,\ x^2-4,\ x-2,\ 7\}$! $\dim(U+W)=4$

(*) נמצא בסיס ל $U\cap W$:

יהי $p(x)\in U\cap W$ $\Leftarrow$ $p(x)\in W$ וגם $p(x)\in U$.

$p(x)\in W \Leftarrow$ $p(x)$ הינו צ"ל של איברי הבסיס שמצאנו ל-W

$$\Leftarrow \quad p(x)=a(x^2+x+1)+b(x^2-x)+c(x-2)$$

$p(x)\in U \Leftarrow p(2)=0 \Leftarrow$ $\quad p(2)=7a+2b=0$

$$\Leftarrow \quad b=-\frac{7}{2}a$$

לכן:

$$p(x)=a(x^2+x+1)-\frac{7}{2}a(x^2-x)+c(x-2)=$$

$$=-\frac{5}{2}a\,x^2+\left(\frac{9}{2}a+c\right)x+(a-2c)$$

(5)

לכן:

$$U \cap W = \left\{ -\tfrac{5}{2}ax^2 + \left(\tfrac{9}{2}a+c\right)x + (a-2c) \;\middle|\; a,c \in \mathbb{R} \right\} =$$

$$= \left\{ -5ax^2 + (9a+2c)x + (2a-4c) \;\middle|\; a,c \in \mathbb{R} \right\}$$

נגדיר $S = \{ \overset{q_1(x)}{\overset{\shortparallel}{x-2}}, \overset{q_2(x)}{\overset{\shortparallel}{-5x^2+9x+2}} \}$.

נראה כי S בסיס ל $U \cap W$:

(1) S בת"ל כי אם $a(x-2)+b(-5x^2+9x+2)=0$ אזי:

$$\begin{cases} -5b=0 \\ a+9b=0 \\ 2b=0 \end{cases} \Rightarrow a=b=0$$

(2) $S \subseteq U \cap W$ כי:

$q_1(2)=q_2(2)=0$ ולכן $q_1,q_2 \in U$

כמו כן:

$$q_1(x) = 0\cdot(x^2+x+1)+0\cdot(x^2-x)+1\cdot(x-2) = x-2$$

$$q_2(x) = 2\cdot(x^2+x+1)-7(x^2-x)+0\cdot(x-2) = -5x^2+9x+2$$

כלומר, הינן צ"ל של הבסיס שמצאנו ל- W ולכן $q_1,q_2 \in W$.

מכיון ש $S \subseteq U \cap W$ נובע גם $span(S) \subseteq U \cap W$.

(ג) יהי $p(x) \in U \cap W \Leftarrow$

קיימים $a,c \in \mathbb{R}$ כך ש $p(x) = -5ax^2+(9a+c)x+(2a-4c)$ ומתקיים

$$p(x) = a(-5x^2+9x+2)+c(x-2)$$

$\Leftarrow$ $p(x) \in span(S)$ ולכן $U \cap W \subseteq span(S)$.

סה"כ קיבלנו $U \cap W = span(S)$.

לכן S בסיס ל- $U \cap W$ ומתקיים $\dim(U \cap W)$.

נשים לב שאכן מתקיים משפט המימדים:

$$\underset{4}{\underset{\shortparallel}{\dim(U+W)}} = \underset{3}{\underset{\shortparallel}{\dim U}} + \underset{3}{\underset{\shortparallel}{\dim W}} - \underset{2}{\underset{\shortparallel}{\dim(U \cap W)}}$$

שאלה 3

נגדיר $S=\{(1,0),(i,0),(0,1),(0,i)\}$.

נראה כי S בסיס ל-$\mathbb{C}^2$ מעל $\underline{\mathbb{R}}$:

(1) נראה כי S בת"ל:

יהיו $a,b,c,d\in\mathbb{R}$ כך ש

$$a(1,0)+b(i,0)+c(0,1)+d(0,i)=(0,0)$$

$$\Rightarrow\quad (a+bi,\ c+di)=(0,0)$$

לכן:

$$\begin{cases} a+bi=0 \\ c+di=0 \end{cases}$$

a,b,c,d ממשיים, ומשוואות במשוואה הנ"ל ממשי ומדומה ונקבל:

$a=b=c=d=0 \Leftarrow S$ בת"ל.

(2) נראה כי $span(S)=\mathbb{C}^2$:

(א) $S\subseteq\mathbb{C}^2$ ולכן גם $span(S)\subseteq\mathbb{C}^2$.

(ב) יהי $(a+bi,\ c+di)$ ~~וקטור~~ כלשהו ב-$\mathbb{C}^2$. אזי:

$$(a+bi,\ c+di)=a(1,0)+b(i,0)+c(0,1)+d(0,i)\in span(S)$$

$\Leftarrow \mathbb{C}^2\subseteq span(S)$

לכן $\mathbb{C}^2=span(S)$.

סה"כ לכן S בסיס של $\mathbb{C}^2$! $dim(\mathbb{C}^2)=4$ מעל $\underline{\mathbb{R}}$.

$\mathbb{R}^4$! $\mathbb{C}^4$ שניהם מימד 4 מעל $\mathbb{R}$ ולכן לפי משפט איזומורפיזם

ולכן נסיק $\mathbb{C}^4\cong\mathbb{R}^4$ מעל $\mathbb{R}$.

הערה: שימו לב לשדה הנדרש, מקודם אמרנו $\mathbb{C}^2$ מימד מעל $\mathbb{C}$!

שאלה 4:

הטענה אינה נכונה. נראה דוגמא נגדית:

יהי $V=\mathbb{R}^2$ ויהי $e=\{\underset{e_1}{(1,0)},\underset{e_2}{(0,1)}\}$ הבסיס הסטנדרטי של V.

אזי $e'=\{e_1+e_2,\ e_2+e_1\}=\{(1,1)\}$

איננו בסיס של V כי $|e'|=1<\dim\mathbb{R}^2=|e|=2$.

[illegible] המגדירה את [illegible]

(7)

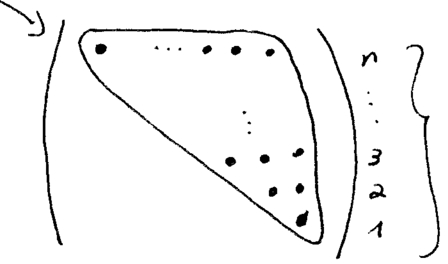
שאלה 5: נוכיח כי הטענה אינה נכונה:

* נמצא בסיס ומימד ל-U: נגדיר E בקבוצת מט' מסדר $n\times n$ כך ש

$$E=\{ e_{ij}\in\mathbb{R}^{n\times n} \mid 1\le i\le j\le n \ ,\ e_{ij} \text{ מט' מסדר } n\times n \text{ כך שהאיבר במקום ה-} ij \text{ וה-} ji \text{ שווים ל-1 וכל השאר אפס} \} =$$

$$=\{ e_{11},e_{12},\dots,e_{1n},e_{22},e_{23},\dots,e_{2n},e_{33},e_{34},\dots,e_{3n},\dots,e_{(n-1)(n-1)},e_{(n-1)n},e_{nn}\}$$

הסבר: במט' סימטרית אנו למעשה "קובעים" את האיברים שעל האלכסון הראשי ומעליו (או מתחתיו) ואז מקבלים אוטומטית ערכי האיברים שמתחת (או מעל) לאלכסון הראשי, סה"כ $\frac{n(n+1)}{2}$ איברים



$1+2+\dots+n=\frac{n(n+1)}{2}$

E לכן מכילה $\frac{n(n+1)}{2}$ מט', כל מט' e_{ij} מייצגת את האיבר הנ"ל, a_{ij}, שעליו לשמור (וכן גם האיבר הסימטרי לו - a_{ji}) וכל השאר אפס.

(1) נוכיח כי E בת"ל:

יהיו $a_{11},\dots,a_{1n},a_{22},\dots,a_{2n},\dots,a_{nn}\in\mathbb{R}$ כך ש

$$\sum_{1\le i\le j\le n} a_{ij}e_{ij}=[0]$$

$$\Leftarrow\quad \sum_{1\le i\le j\le n} a_{ij}e_{ij} \underset{\text{לפי הגדרת } e_{ij}}{=} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & a_{3n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = [0]$$

$\Leftarrow$ $a_{ij}=0$ לכל $1\le i\le j\le n$

$\Leftarrow$ E בת"ל.

(2) פורשת: תהי $A\in U$ כלשהי $\Leftarrow$ $a_{ij}=a_{ji}$ ב-A ולכן

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & a_{3n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = a_{11}e_{11}+a_{12}e_{12}+\dots+a_{1n}e_{1n}+a_{22}e_{22}+\dots+a_{2n}e_{2n}+\dots+a_{nn}e_{nn}=$$

(8)

$$= \sum_{1\le i\le j\le n} a_{ij} e_{ij} \in span(E)$$

(ב) לפי הג' נגמ' e_{ij} עבור $1\le i\le j\le n$ ברור כי $e_{ij}^t = e_{ij}$

ולכן $e_{ij}\in U \Leftarrow E\subseteq U$ ולכן גם $span(E)\subseteq U$.

לכן $span(E)=U$.

סה"כ לכן E בסיס של U ! $\dim U = |E| = \frac{n(n+1)}{2}$.

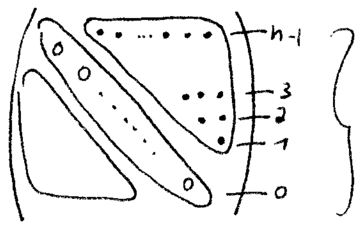
⊛ נמצא בסיס ומימד של W:

נגדיר S קבוצת מט' מסדר $n\times n$ כך ש

$S = \{ e_{ij}\in \mathbb{R}^{n\times n} \mid 1\le i<j\le n$, e_{ij} מט' מסדר $n\times n$ כך שהאיבר במקום ה-ij שווה ל-1, והאיבר במקום ה-ji שווה ל- -1- וכל השאר אפסים $\} =$

$= \{ e_{12}, e_{13}, \dots, e_{1n}, e_{23}, \dots, e_{2n}, e_{34}, \dots, e_{3n}, \dots, e_{(n-1)n} \}$

הסבר: במט' אנטי סימטרית איברי האלכסון הראשי שווים לאפס (כי $a_{ii}=-a_{ii}$ גורר $a_{ii}=0$) ועלינו למעשה "לקבוע" את האברים שמעל לאלכסון הראשי (או מתחתיו) ואז מתקבלים אוטומטית ערכי האברים שמתחת (או שמעל לאלכסון), סה"כ $\frac{n(n-1)}{2}$ איברים:



$$1+2+\dots+(n-1) = \frac{n(n-1)}{2}$$

S לכן מכילה $\frac{n(n-1)}{2}$ איברים, בכל מט' $e_{ij}\in S$ האיבר במקום ה-ij שווה לאחד, האיבר במקום ה-ji שווה ל- 1- וכל השאר אפסים (ומתקיים כי $1\le i<j\le n$).

(1) נראה כי S בת"ל:

יהיו $a_{12}, a_{13}, \dots, a_{1n}, a_{23}, \dots, a_{2n}, \dots, a_{(n-1)n} \in \mathbb{R}$ כך ש

$$\sum_{1\le i<j\le n} a_{ij} e_{ij} = [0].$$

(9)

$$\sum_{1\le i<j\le n} a_{ij}e_{ij} \underset{\downarrow}{=} \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ -a_{13} & -a_{23} & 0 & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_{1n} & -a_{2n} & -a_{3n} & \cdots & 0 \end{pmatrix} = [0] \quad \Leftarrow$$

לפי הג' e_{ij}

$\Leftarrow$ $a_{ij}=0$ לכל $1\le i<j\le n$

$\Leftarrow$ S בת"ל

(2) (א) תהי $A\in W$ כלשהי.

$\Leftarrow$ $a_{ij}=-a_{ji}$ (ו- $a_{ii}=0$) ב- A ולכן:

$$A=\begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ -a_{13} & -a_{23} & 0 & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_{1n} & -a_{2n} & -a_{3n} & \cdots & 0 \end{pmatrix} = \sum_{1\le i<j\le n} a_{ij}e_{ij} \in span(S)$$

לכן $W\subseteq span(S)$

(ב) לפי הג' המט' $e_{ij}\in S$ ברור כי $e_{ij}^t=-e_{ij}$ ולכן

$S\subseteq W$ ולכן גם $span(S)\subseteq W$.

לכן $W=span(S)$.

סה"כ לכן S בסיס של W ו- $\dim W=|S|=\frac{n(n-1)}{2}$.

סה"כ לכן קיבלנו כי לכל n טבעי, $\dim W=\frac{n(n-1)}{2}\neq\frac{n(n+1)}{2}=\dim U$

ולכן לא ייתכן ש- U ו- W איזומורפיים, לכל n טבעי.

בפרט, עבור $U,W\subseteq\mathbb{R}^{2\times2}$ המתאימים לא איזומורפיים כי

$\dim W=1\neq3=\dim U$.

תרגיל מס' 11

הגשה עד: 18.1.2004

1. יהי V מ"ו ותהי $B \subseteq V$ קבוצה בת"ל מקסימלית ב- V. הוכיחו כי B בסיס של V.

2. יהי V מ"ו מעל שדה F ויהי e בסיס כלשהוא ב-V. הוכיחו כי לכל $v \in V,\ \alpha \in F$ מתקיים $(\alpha u)_e = \alpha(u_e)$.

3. מצאו את וקטור הקואורדינטות של $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ ביחס לבסיס $\left\{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\right\}$.

4. תהי $S = \left\{ax^2 + 2,\, x^2 + ax - 2,\, x + 1\right\}$.

א. הוכיחו כי לכל $a \in R$, S בסיס ל- $R_2[x]$.

ב. עבור איזה ערך של a מתקיים $v_S = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ כאשר $v = 3x^2 + x + 9$.

5. מצאו את מטריצת שינוי הבסיס מהבסיס $\{1 + x - x^2, 1 - x, 1\}$ לבסיס $\{1 - 2x + x^2, 2x + x^2, x^2\}$.

6. עבור $d \in R$ תהי הפונקציה $f : R^2 \to R_1[x]$ המוגדרת ע"י $f((a,b)) = a + b + d^2 + 1 + ax$. האם קיים ערך d שעבורו f היא העתקה לינארית?

7. קבעו עבור כל אחת מן ההעתקות הבאות האם היא לינארית, ואם כן, האם היא איזומורפיזם:

א. $f : R_3[x] \to R^{2\times 3}$ המוגדרת ע"י $f\left(ax^3 + bx^2 + cx + d\right) = \begin{pmatrix} a+b & 2c & d \\ a & abc & -d \end{pmatrix}$.

ב. $f : R^2 \to R^{2\times 2}$ המוגדרת ע"י $f\left(a,b\right) = \begin{pmatrix} a+b & a+2b \\ a+3b & a+4b \end{pmatrix}$.

ג. $f : R^4 \to R^{2\times 2}$ כאשר ידוע כי $f\left(1,-1,3,0\right) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, $f\left(2,1,0,2\right) = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $f\left(3,0,3,2\right) = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$.

בהצלחה!

①

פתרון תרגיל מס' 11

שאלה 1:

יהי V מ"ו ותהי $B\subseteq V$ קב' בת"ל מקסימלית ב- V.

נראה כי B בסיס של V:

(א) B בת"ל נתון.

(ב) נראה כי $span(B)=V$:

(1) $B\subseteq V$ ולכן $span(B)\subseteq V$.

(2) יהי $v\in V$ כלשהו.

אם $v\in B$ אזי ברור כי $v\in span(B)$.

אם $v\notin B$ אזי $B\cup\{v\}$ תל"ל (כי B בת"ל מקסימלית) ולכן קיים ב- $B\cup\{v\}$ וקטור שהינו צ"ל של האחרים. כיון ש- B בת"ל אזי בהכרח וקטור זה הינו v ולכן v צ"ל של איברי B, כלומר, $v\in span(B)$.

לכן $V\subseteq span(B)$ ולכן $V=span(B)$.

סה"כ לכן B בסיס של V.

מש"ל.

שאלה 2:

יהי V מ"ו מעל שדה F ויהי $e=\{e_1,\dots,e_n\}$ בסיס של V.

יהיו $v\in V$, $\alpha\in F$ כלשהם. אזי:

$v\in V$! e בסיס של V ולכן קיימים $\beta_1,\dots,\beta_n$ כך ש $v=\beta_1e_1+\dots+\beta_ne_n$ ומתקיים:

$$(\alpha v)_e=\big(\alpha(\beta_1e_1+\dots+\beta_ne_n)\big)_e \underset{\substack{\text{דיסטריבוטיביות}\\ \text{ב-}V}}{=} \big(\alpha(\beta_1e_1)+\alpha(\beta_2e_2)+\dots+\alpha(\beta_ne_n)\big)_e=$$

$$\underset{\substack{\text{אסוציאטיביות הכפל}\\ \text{בסקלר ב-}V}}{=}\big((\alpha\beta_1)e_1+\dots+(\alpha\beta_n)e_n\big)_e \underset{\substack{\text{הג' וקטור}\\ \text{קואורדינטות}}}{=} \begin{pmatrix}\alpha\beta_1\\ \alpha\beta_2\\ \vdots\\ \alpha\beta_n\end{pmatrix} \underset{\substack{\text{הג' כפל וקטור}\\ \text{בסקלר}}}{=} \alpha\begin{pmatrix}\beta_1\\ \beta_2\\ \vdots\\ \beta_n\end{pmatrix}=$$

②

$$= \alpha\left(\beta_1 e_1 + \dots + \beta_n e_n\right)_e = \alpha(V_e)$$

הג' וקטור קואורדינטות

משל.

שאלה 3:

$$\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & -1\end{pmatrix} = a\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & -1\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}2 & 1\\ 3 & 0\end{pmatrix} + c\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix} + d\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 2\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a + 2b = 1 \\ a + b + c = 2 \\ 3b + c + d = 0 \\ -a + 2c + 2d = -1 \end{cases} \Longrightarrow a = 1,\ b = 0,\ c = 1,\ d = -1$$

$\Leftarrow$ אם נסמן $v = \begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & -1\end{pmatrix}$

$$e = \left\{\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & -1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2 & 1\\ 3 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 2\end{pmatrix}\right\}$$!

נקבל כי $V_e = \begin{pmatrix}1\\0\\1\\-1\end{pmatrix}$.

שאלה 4:

א.

$$\begin{pmatrix}a & 0 & 2\\ 1 & a & -2\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \begin{pmatrix}1 & a & -2\\ a & 0 & 2\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 - aR_1 \to R_2} \begin{pmatrix}1 & a & -2\\ 0 & -a^2 & 2+2a\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_3 \leftrightarrow R_2} \begin{pmatrix}1 & a & -2\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & -a^2 & 2+2a\end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 + a^2R_2 \to R_3} \begin{pmatrix}1 & a & -2\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & a^2+2a+2\end{pmatrix}$$

כי $a^2+2a+2 > 0$ לכל a $(\Delta = 4 - 4\cdot 2 = -4 < 0)$ ולכן לכל $a \in \mathbb{R}$, במט' המדורגת

אין שורת אפסים.

$\Leftarrow$ לכל $a \in \mathbb{R}$, S בת"ל. $3 = |S| = \dim \mathbb{R}_2[x]$! S בסיס

$\mathbb{R}_2[x]$. כנדרש

③

ב.

$$V_S = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow V = 2(ax^2+2) - (x^2+ax-2) + 3(x+1) = x^2(2a-1) + x(-a+3) + (9)$$

$$= 3x^2 + x + 9$$

נתון

$$\begin{cases} 2a-1 = 3 \\ -a+3 = 1 \\ 9 = 9 \end{cases} \Rightarrow a = 2 \qquad \Leftarrow$$

⇐ עבור $a=2$ מתקיים הנדרש.

שאלה 5:

נסמן $e = \{\underset{e_1}{1+x-x^2}, \underset{e_2}{1-x}, \underset{e_3}{1}\}$

$$f = \{\underset{f_1}{1-2x+x^2}, \underset{f_2}{2x+x^2}, \underset{f_3}{x^2}\}$$

$$f_1 = 1-2x+x^2 = -1\cdot(1+x-x^2) + 1\cdot(1-x) + 1\cdot(1)$$
$$f_2 = 2x+x^2 = -1\cdot(1+x-x^2) - 3(1-x) + 4\cdot(1)$$
$$f_3 = x^2 = -1\cdot(1+x-x^2) - 1\cdot(1-x) + 2(1)$$

לכן מט' שינוי הבסיס מ-e ל-f היא:

$$P = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & -3 & -1 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

שאלה 6:

ראשית, ברור כי f אכן פונקציה (הסבר). עלינו לבדוק האם מתקיים
שני תנאי הלינאריות:

א)

$$f\left((a_1,b_1)+(a_2,b_2)\right) \underset{\text{חיבור ב-}\mathbb{R}^2}{=} f(a_1+a_2,\ b_1+b_2) \underset{\text{הג' }f}{=} a_1+a_2+b_1+b_2+d^2+1+(a_1+a_2)x$$

$$f(a_1,b_1)+f(a_2,b_2) \underset{\text{הג' }f}{=} a_1+b_1+d^2+1+a_1x+a_2+b_2+d^2+1+a_2x$$

על מנת שתתקיים לינאריות החיבור תחת f נדרוש:

$$\cancel{a_1}+\cancel{a_2}+\cancel{b_1}+\cancel{b_2}+d^2+1+\cancel{(a_1+a_2)x} = \cancel{a_1}+\cancel{b_1}+d^2+1+\cancel{a_1x}+\cancel{a_2}+\cancel{b_2}+d^2+1+\cancel{a_2x}$$

$$d^2+1=2d^2+2 \Leftarrow$$

$$d^2=-1 \Leftarrow$$

וזה לא מתקיים לכל $d\in\mathbb{R}$, ולכן לא קיים d עבורו f היא ה"ל.

שאלה 7:

א) f לא ה"ל כי לא מתקיימת לינאריות החיבור, למשל:

$$f\left((2x^3+3x^2+x)+(4x^3+4x^2+x)\right) = f(6x^3+7x^2+2x) = \begin{pmatrix}13&4&0\\6&84&0\end{pmatrix}$$

$$\neq$$

$$f(2x^3+3x^2+x)+f(4x^3+4x^2+x) = \begin{pmatrix}5&2&0\\2&6&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}8&2&0\\4&16&0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}13&4&0\\6&22&0\end{pmatrix}$$

ב) נוכיח כי f ה"ל

(1) ברור כי f אכן פונקציה מ-$\mathbb{R}^2$ ל-$\mathbb{R}^{2\times 2}$.

(2) לכל $(a,b),(c,d)\in\mathbb{R}^2$ מתקיים:

$$f\left((a,b)+(c,d)\right) \underset{\text{חיבור ב-}\mathbb{R}^2}{=} f(a+c,\ b+d) \underset{\text{הג' }f}{=} \begin{pmatrix}(a+c)+(b+d) & (a+c)+2(b+d)\\ (a+c)+3(b+d) & (a+c)+4(b+d)\end{pmatrix} =$$

(5)

$$\underset{\substack{\text{קומוטטיב' ואסוציאטיביות}\\ \text{החיבור בממשי}}}{=} \begin{pmatrix} (a+b)+(c+d) & (a+2b)+(c+2d) \\ (a+3b)+(c+3d) & (a+4b)+(c+4d) \end{pmatrix} =$$

$$\underset{\text{חיבור מט'}}{=} \begin{pmatrix} a+b & a+2b \\ a+3b & a+4b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c+d & c+2d \\ c+3d & c+4d \end{pmatrix} = f(a,b) + f(c,d)$$

(2) לכל $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ ולכל $\alpha\in\mathbb{R}$ מתקיים:

$$f\left(\alpha(a,b)\right) \underset{\substack{\text{הג' כפל בסקלר}\\ \text{ב-}\mathbb{R}^2}}{=} f(\alpha a, \alpha b) \underset{\text{הג' } f}{=} \begin{pmatrix} \alpha a+\alpha b & \alpha a+2\alpha b \\ \alpha a+3\alpha b & \alpha a+4\alpha b \end{pmatrix} =$$

$$\underset{\text{כפל מט' בסקלר}}{=} \alpha \begin{pmatrix} a+b & a+2b \\ a+3b & a+4b \end{pmatrix} = \alpha f(a,b)$$

$\Leftarrow$ f ה"ל.

f בהכרח אינה איזומורפיזם כיון שלא קיים איזומורפיזם בין $\mathbb{R}^2$ ל- $\mathbb{R}^{2\times 2}$

כי $\underset{2}{\dim(\mathbb{R}^2)} \neq \underset{4}{\dim(\mathbb{R}^{2\times 2})}$.

(3) f אינה ה"ל כי לא מתקיימת לינאריות החיבור ב-f:

$$f\left((1,-1,3,0)+(2,1,0,2)\right) \underset{\text{חיבור ב-}\mathbb{R}^4}{=} f(3,0,3,2) \underset{\text{נתון}}{=} \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\not\parallel$$

$$f(1,-1,3,0) + f(2,1,0,2) \underset{\text{נתון}}{=} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$\Leftarrow$ f אינה ה"ל.

תרגיל מס' 12

הגשה עד: 25.1.2004

1. תהי $f: R^{2\times 2} \to R^4$ העתקה לינארית ונתון:

$$f\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\right) = (3,0,3,-1) \quad , \quad f\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\right) = (2,0,-2,2)$$

$$f\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = (1,0,2,1) \quad , \quad f\left(\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = (-2,0,0,0)$$

א. חשבו $f\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\right)$

ב. חשבו: $f(v) \quad \forall v \in R^{2\times 2}$.

ג. מצאו בסיס ומימד של Im(f) ו- ker(f).

ד. האם f איזומורפיזם?

2. יהיו V,U מ"ו מעל שדה F ותהי $T: U \to V$ ה"ל. הוכיחו כי $\ker T$ תת מרחב של U.

3. יהי V מ"ו מעל שדה F. נגדיר $L(V) = \{T: V \to V \mid T \text{ is a linear operator}\}$. הוכיחו כי L(V) הינו מ"ו מעל F ביחס לפעולות חיבור פונקציות וכפל פונקציה בסקלר. מיהו איבר האפס ב- $L(V)$?

4. הוכיחו או הפריכו: אם V מ"ו ממימד אי זוגי אזי לא קיים אופרטור לינארי $T: V \to V$ כך ש $\operatorname{Im} T = KerT$.

5. הוכיחו כי בממ"פ V מתקיים $< a,b+c > = < a,b > + < a,c >$ לכל $a,b,c \in V$.

6. הוכיחו כי בממ"פ V מתקיים לכל $a \in V$ $< a,0_v > = < 0_v,a > = 0_F$.

7. יהי $V = R^2$. האם הפונקציה $g: V \times V \to R$ המוגדרת ע"י $g((a,b),(c,d)) = a(c+d) + b(c+2d)$ מהווה מכפלה פנימית על V ? אם כן, נרמלו את הוקטור (2,3).

8. יהי $V = R^{n\times n}$. האם הפונקציה $f: V \times V \to R$ המוגדרת ע"י $f(A,B) = |AB|$ מהווה מכפלה פנימית על V ? אם כן, נרמלו את 2I.

בהצלחה!

①

פתרון תרגיל מס' 12

שאלה 1:

ב. נגדיר $S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$.

נראה כי S בסיס ל- $\mathbb{R}^{2\times 2}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_4+R_1 \to R_4]{R_2-R_1 \to R_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_4+R_2 \to R_4]{R_3+R_2 \to R_3}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \Longrightarrow$$ S בת"ל
(כי בשורה המדורגת אין שורת אפסים)

S בת"ל ו- $\dim(\mathbb{R}^{2\times 2}) = |S| = 4$ $\Leftarrow$

S בסיס ל- $\mathbb{R}^{2\times 2}$. $\Leftarrow$

יהי $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ כלשהו. נציג אותו כצ"ל של S:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (-c)\cdot\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \left(\frac{d-b-c}{2}\right)\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + (b+c)\cdot\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \left(\frac{-2a-b-3c+d}{2}\right)\cdot\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

לכן:

$$f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = f\left((-c)\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \left(\frac{d-b-c}{2}\right)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + (b+c)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \left(\frac{-2a-b-3c+d}{2}\right)\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) =$$

$$\overset{f \text{ לינ'}}{=} -c\, f\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \frac{d-b-c}{2}\cdot f\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + (b+c)\, f\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{-2a-b-3c+d}{2}\cdot f\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$\overset{\text{נתון}}{=} -c(3,0,3,-1) + \frac{d-b-c}{2}(2,0,-2,2) + (b+c)\cdot(1,0,2,1) + \frac{-2a-b-3c+d}{2}(-2,0,0,0) =$$

$$= (2a+b,\ 0,\ 3b-d,\ c+d) \Longrightarrow \boxed{f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (2a+b, 0, 3b-d, c+d)}$$

②

א. $f\begin{pmatrix}1&1\\2&1\end{pmatrix} \underset{\text{עפ"י סעיף א'}}{=} (3,0,2,3)$

ב. ⊛ נמצא בסיס ומימד של $\ker f$:

$\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix} \in \ker f$

$\Rightarrow f\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix} = (2a+b, 0, 3b-d, c+d) = (0,0,0,0)$

$\Rightarrow \begin{cases}2a+b=0\\3b-d=0\\c+d=0\end{cases} \Rightarrow a=-\frac{b}{2},\ c=-3b,\ d=3b$

$\Rightarrow \ker f = \left\{\begin{pmatrix}-\frac{b}{2} & b\\ -3b & 3b\end{pmatrix} \middle| b\in\mathbb{R}\right\} = \left\{\begin{pmatrix}-b & 2b\\ -6b & 6b\end{pmatrix} \middle| b\in\mathbb{R}\right\}$

⟸ בסיס ל- $\ker f$ הינו $\left\{\begin{pmatrix}-1&2\\-6&6\end{pmatrix}\right\}$! $\dim\ker f = 1$.

⊛ נמצא בסיס ומימד של $Im f$:

הפעלנו את f על וקטורי קב' B שהראינו כי הוא בסיס של $\mathbb{R}^{2\times 2}$, לכן לא משנה:

$Im f = span\left\{ f\begin{pmatrix}1&1\\-1&0\end{pmatrix}, f\begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix}, f\begin{pmatrix}0&1\\0&1\end{pmatrix}, f\begin{pmatrix}-1&0\\0&0\end{pmatrix}\right\} =$

$= span\{(3,0,3,-1), (2,0,-2,2), (1,0,2,1), (-2,0,0,0)\}$

$$\begin{pmatrix}3&0&3&-1\\2&0&-2&2\\1&0&2&1\\-2&0&0&0\end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \leftrightarrow R_1} \begin{pmatrix}1&0&2&1\\2&0&-2&2\\3&0&3&-1\\-2&0&0&0\end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{R_3-3R_1\to R_3\\R_4+2R_1\to R_4}]{R_2-2R_1\to R_2} \begin{pmatrix}1&0&2&1\\0&0&-6&0\\0&0&-3&-4\\0&0&4&2\end{pmatrix} \xrightarrow[R_4\cdot\frac{1}{2}\to R_4]{R_2\cdot -\frac{1}{6}\to R_2}$$

$$\begin{pmatrix}1&0&2&1\\0&0&1&0\\0&0&-3&-4\\0&0&2&1\end{pmatrix} \xrightarrow[R_4-2R_2\to R_4]{R_3+3R_2\to R_3} \begin{pmatrix}1&0&2&1\\0&0&1&0\\0&0&0&4\\0&0&0&1\end{pmatrix} \xrightarrow{R_4-\frac{1}{4}R_3\to R_4} \begin{pmatrix}1&0&2&1\\0&0&1&0\\0&0&0&4\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$\Leftarrow$ בסיס ל Imf $\{(1,0,2,1),(0,0,1,0),(0,0,4,0)\}$

ו- $\dim(Imf)=3$.

(3) בסעיף ג' קיבלנו כי $kerf \neq \{\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\}$ ולכן לסיכום,

f לא איזומורפיזם.

שאלה 2:

יהיו U,V מ"ו מעל שדה F ותהי $T:U\to V$ ה"ל.

נראה כי $kerT$ תת מרחב של U:

[תזכורת: $kerT = \{v\in U \mid T(u)=0_V\} \subseteq U$]

(1) $0_U \in kerT$ כי ידוע (הוכח בהרצאה) כי אם T ה"ל אזי

$T(0_U)=0_V \Leftarrow kerT \neq \phi$.

(2) יהיו $u,v \in kerT$.

$\Leftarrow u,v\in U$ (כי $kerT \subseteq U$) ולכן כיון ש U מ"ו גם

$u+v\in U$ ומתקיים:

$$T(u+v) \underset{T\text{ ה"ל}}{=} T(u)+T(v) \underset{u,v\in kerT}{=} 0_V+0_V \underset{V\text{ מ"ו}}{=} 0_V$$

$\Leftarrow u+v\in kerT$.

(3) יהי $u\in kerT$ ו- $\alpha\in F$ סקלר.

$\Leftarrow u\in U$ (כי $kerT\subseteq U$) ולכן $\alpha u\in U$ (כי U מ"ו) ומתקיים:

$$T(\alpha u) \underset{T\text{ ה"ל}}{=} \alpha T(u) \underset{u\in kerT}{=} \alpha\cdot 0_V \underset{V\text{ מ"ו}}{=} 0_V$$

$\Leftarrow \alpha u\in kerT$

סה"כ קבלנו, $kerT$ היננו תת מרחב של U.

מש"ל.

4

שאלה 3:

יהי V מ"ו מעל שדה F.

ידוע כי $U = \{T : V \to V \mid T \text{ פונ'}\}$ הינו מ"ו (מרחב הפונ' מ-V ל-V). נוכיח כי $L(V)$ הינו תת מרחב של U:

(1) $f: V \to V$ המוגדרת ע"י $\forall v \in V \;\; f(v) = 0_V$

הינו ה"ל (העתקת האפס) ולמעשה אופרטור לינארי ולכן

$L(V) \neq \emptyset$.

(2) תהיינה $f_1, f_2 \in L(V)$.

$\Leftarrow$ $f_1 : V \to V$ וכן $f_2 : V \to V$ הינן אופרטורים לינאריים.

$\Leftarrow$ $\underbrace{(f_1+f_2)(v) =}_{\text{הג' חיבור ב-}U} \underbrace{f_1(v)}_{V} + \underbrace{f_2(v)}_{V} \in V \quad \forall v \in V$

$\Leftarrow$ $f_1 + f_2 : V \to V$ הינה פונ' מ-V ל-V.

נוכיח כי זו אכן ה"ל:

(א) לכל $u, v \in V$ מתקיים

$$(f_1+f_2)(u+v) \underset{U \supseteq L(V)\text{ הג' חיבור ב-}}{=} f_1(u+v) + f_2(u+v) \underset{f_1,f_2 \in L(V)\text{ אופרטורים לינאריים}}{=} (f_1(u)+f_1(v)) + (f_2(u)+f_2(v)) =$$

$$\underset{U\text{ קומוטטיביות ואסוציאטיביות החיבור ב-}}{=} (f_1(u)+f_2(u)) + (f_1(v)+f_2(v)) \underset{U \supseteq L(V)\text{ הג' החיבור ב-}}{=} (f_1+f_2)(u) + (f_1+f_2)(v)$$

(ב) לכל $u \in V$ ולכל $\alpha \in F$ מתקיים

$$(f_1+f_2)(\alpha u) \underset{U \supseteq L(V)\text{ הג' החיבור ב-}}{=} f_1(\alpha u) + f_2(\alpha u) \underset{f_1,f_2 \in L(V)\text{ ולכן אופרטורים לינאריים}}{=} \alpha f_1(u) + \alpha f_2(u) =$$

$$\underset{U\text{ דיסטריבוטיביות ב-}}{=} \alpha(f_1(u) + f_2(u)) = \alpha(f_1+f_2)(u)$$

לכן $f_1 + f_2$ ה"ל $\Leftarrow$ $f_1 + f_2 \in L(V)$.

(3) תהי $f\in L(V)$ ויהי $\alpha\in F$.

$\Leftarrow$ $f:V\to V$ אופרטור לינארי.

$\Leftarrow$ $\forall v\in V \quad (\alpha f)(v)=\alpha\cdot f(v)\in V$

הגדרת כפל בסקלר ב- $U\supseteq L(V)$

$f(v)\in V$

V מ"ו וסגור תחת כפל בסקלר

ולכן $\alpha f:V\to V$ פונק' מ-V ל-V. נראה כי αf ה"ל:

(א) לכל $u,v\in V$ מתקיים

$$(\alpha f)(u+v)=\alpha\cdot f(u+v)=\alpha\left(f(u)+f(v)\right)=\alpha\cdot f(u)+\alpha\cdot f(v)$$

הגדרת כפל בסקלר ב- $L(V)$; $f\in L(V)$ ה"ל ; דיסטריבוטיביות ב- U

$$=(\alpha f)(u)+(\alpha f)(v)$$

(ב) לכל $v\in V$ ולכל $\beta\in F$ מתקיים

$$(\alpha f)(\beta v)=\alpha\cdot f(\beta v)=\alpha\cdot\left(\beta\cdot f(v)\right)=(\alpha\beta)\cdot f(v)=$$

הגדרת כפל בסקלר ב- $L(V)$; $f\in L(V)$ ה"ל ; אסוציאטיביות הכפל בסקלר ב- U

$$=(\beta\alpha)\cdot f(v)=\beta\cdot\left(\alpha\cdot f(v)\right)=\beta\cdot(\alpha f)(v)$$

קומוטטיביות הכפל ב- F

לכן αf ה"ל $\Leftarrow$ $\alpha f\in L(V)$.

סה"כ לכן $L(V)$ תת-מרחב של U ולכן מ"ו.

שאלה 4:

הטענה נכונה. הוכחה:

יהי V מ"ו ממימד אי זוגי. נניח בשלילה שקיים אופרטור לינארי $T:V\to V$ המקיים $\mathrm{Im}T=\ker T$.

$\mathrm{Im}\,T=\ker T \Rightarrow \dim(\mathrm{Im}\,T)=\dim(\ker T)$ ממשפט המימדים

$$\dim(\mathrm{Im}\,T)+\dim(\ker T)=\dim V$$

ולכן $\underbrace{2\dim(\mathrm{Im}\,T)}_{\text{זוגי}}=\underbrace{\dim V}_{\text{אי זוגי}}$ סתירה!

⇐ הנחת השלילה היתה מוטעית ולא קיים אופרטור לינארי T כנ"ל.

שאלה 5:

יהי V ממ"פ ויהי $a,b,c\in V$ כלשהם, אזי:

$$\langle a,b+c\rangle \underset{(3)}{=} \overline{\langle b+c,a\rangle} \underset{(1)}{=} \overline{\langle b,a\rangle+\langle c,a\rangle} \underset{\substack{\text{תכונות צמוד} \\ \overline{x+y}=\bar{x}+\bar{y}}}{=} \overline{\langle b,a\rangle}+\overline{\langle c,a\rangle}$$

$$\underset{(3)}{=} \langle a,b\rangle+\langle a,c\rangle$$

מש"ל.

שאלה 6:

יהי V ממ"פ ויהי $a\in V$ כלשהו, אזי:

$$\langle 0_V,a\rangle \underset{\text{V מ"ו}}{=} \langle 0_V+0_V,a\rangle \underset{(1)}{=} \langle 0_V,a\rangle+\langle 0_V,a\rangle \quad (*)$$

קיבלנו $\langle 0_V,a\rangle+\langle 0_V,a\rangle=\langle 0_V,a\rangle$

⇐ $\langle 0_V,a\rangle=0_F$.

$$\langle a,0_V\rangle = \langle a,0_V+0_V\rangle \underset{\text{עפ"י שאלה 5}}{=} \langle a,0_V\rangle+\langle a,0_V\rangle \quad (*)$$

קיבלנו $\langle a,0_V\rangle=\langle a,0_V\rangle+\langle a,0_V\rangle$

⇐ $\langle a,0_V\rangle=0_F$

סה"כ לכן $\langle a,0_V\rangle=\langle 0_V,a\rangle=0_F$.

שאלה 7:

$V=\mathbb{R}^2$ הינו מ"פ כן. נבדוק האם g מקיימת את אקסיומות ממ"פ:

(1) $\forall\ (a,b),(c,d),(e,f)\in\mathbb{R}^2$

$$\langle (a,b)+(c,d),(e,f)\rangle \underset{\text{חיבור ב-}\mathbb{R}^2}{=} \langle (a+c,b+d),(e,f)\rangle \underset{\text{הג' g}}{=}$$

$$= (a+c)(e+f)+(b+d)(e+2f) =$$

(7)

$$= \big(a(e+f)+b(e+2f)\big) + \big(c\cdot(e+f)+d(e+2f)\big) =$$

תכונות ממשיים: דיסטריבוטיביות וקומוטטיביות ואסוציאטיביות

$$\underset{\text{הג' } g}{=} \langle (a,b),(e,f)\rangle + \langle (c,d),(e,f)\rangle$$

(2)

$$\forall\ (a,b),(c,d)\in\mathbb{R}^2,\ \alpha\in\mathbb{R}$$

$$\langle \alpha(a,b),(c,d)\rangle \underset{\text{כפל בסקלר ב-}\mathbb{R}^2}{=} \langle(\alpha a,\alpha b),(c,d)\rangle \underset{\text{הג' } g}{=}$$

$$= \alpha a(c+d) + \alpha b(c+2d) \underset{\text{דיסטריבוטיביות ב-}\mathbb{R}}{=} \alpha\left[a(c+d)+b(c+2d)\right] =$$

$$\underset{\text{הג' } g}{=} \alpha\langle(a,b),(c,d)\rangle$$

(3)

$$\forall\ (a,b),(c,d)\in\mathbb{R}^2$$

$$\langle(a,b),(c,d)\rangle \underset{\text{הג' } g}{=} a(c+d)+b(c+2d) =$$

$$\underset{\text{דיסטריבוטיביות ב-}\mathbb{R}}{=} ac+ad+bc+2bd \underset{\text{קומוטטיביות כפל וחיבור ב-}\mathbb{R}}{=} ca+cb+da+2db =$$

$$= c(a+b)+d(a+2b) \underset{\substack{\text{לכל } x\in\mathbb{R} \\ x=\bar{x}}}{=} \overline{c(a+b)+d(a+2b)} \underset{\text{הג' } g}{=} \overline{\langle(c,d),(a,b)\rangle}$$

(4) (א)

$$\forall\ (a,b)\in\mathbb{R}^2\quad \langle(a,b),(a,b)\rangle \underset{\text{הג' } g}{=} a(a+b)+b(a+2b) =$$

$$= a^2+2ab+2b^2 = \underbrace{(a+b)^2}_{\geq 0}+\underbrace{b^2}_{\geq 0} \geq 0$$

(ב)

$$\forall\ (a,b)\in\mathbb{R}^2$$

$$\langle(a,b),(a,b)\rangle = 0$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$(a+b)^2+b^2=0$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$a+b=0 \quad \text{וגם} \quad b=0$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$a=b=0$$

עבור הוקטור (2,3) מתקיים לכן:

$$\|(2,3)\| = \sqrt{<(2,3),(2,3)>} \underset{\text{הג' } g}{=} \sqrt{2(2+3)+3(2+6)} = \sqrt{34}$$

$\Leftarrow$ אם $V=(2,3)$ אזי

$$\hat{V} = \frac{1}{\sqrt{34}}(2,3) = \left(\frac{2}{\sqrt{34}}, \frac{3}{\sqrt{34}}\right)$$

שאלה 8:

זו אינה מכפלה פנימית, כי עבור המט' המקיימת שבמקום ה 11 יש 1

ובכל השאר יש אפסים, כלומר עבור $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & 0 & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$ מתקיים

$$f(A,A) \underset{\text{הג' } f}{=} |A\cdot A| \underset{\text{תכונות דט'}}{=} |A|\cdot|A| \underset{\text{דט' של מט' עם שורת אפסים שווה לאפס}}{=} 0\cdot 0 = 0$$

אך $A \neq 0$, כלומר לא מתקיימת אקסיומה 4 בהגדרת מ"פ!

תרגיל מס' 13

הגשה עד: 29.1.2004

1. **מצאו וקטור נורמלי ב-** R^4 **הניצב לכל אחד מהוקטורים** $(3,1,-1,0), (2,2,1,-1), (0,1,-1,1)$.

2. **יהי** $V = R^4$ **ויהי** $U = span\{(0,2,1,2), (2,1,-1,1), (2,3,-4,0)\}$ **תת מרחב של** V.

א. מצאו בסיס למשלים האורתוגונלי של U ב- V .

ב. מצאו proj(v,U) **עבור** $v = (2,3,4,6)$.

3. **יהי** $V = R^2$ **ויהי** $U = \{(a,b) \in R^2 \mid a + 3b = 0\}$ **תת מרחב של** V.

א. מצאו בסיס למשלים האורתוגונלי של U ב- V .

ב. מצאו proj(v,U) **עבור** $v = (7,1)$.

4. **חזרו על תרגיל 3 אך הפעם כאשר המכפלה הפנימית היא** $< (a_1, a_2), (b_1, b_2) >= a_1b_1 - a_1b_2 - a_2b_1 + 3a_2b_2$.

5. **יהיו** W,U **תתי מרחבים במרחב אוקלידי** V**. הוכיחו או הפריכו:** $(W + U)^{\perp} \supseteq U^{\perp} \bigcap W^{\perp}$.

6. **תוך שימוש בתהליך גרם-שמידט מצאו בסיס אורתוגונלי ואורתונורמלי של** $span\{(2,1,3,-1), (7,4,3,-3), (5,7,7,8), (1,1,-6,0)\}$.

בהצלחה!

(1)

פתרון תרגיל מס' B

שאלה 1:

יהי $(a,b,c,d) \in U^\perp$. נדרוש:

$$\begin{cases} \langle (a,b,c,d),(3,1,-1,0)\rangle = 3a+b-c=0 \\ \langle (a,b,c,d),(2,2,1,-1)\rangle = 2a+2b+c-d=0 \\ \langle (a,b,c,d),(0,1,-1,1)\rangle = b-c+d=0 \end{cases}$$

$$\Longleftarrow \quad b=-\tfrac{2}{3}a,\ c=\tfrac{7}{3}a,\ d=3a$$

אם נבחר $a=3$ נקבל כי הוקטור $(3,-2,7,9)$

ניצב לכל אחד משלושת הוקטורים הנדרש.

שאלה 2:

נמצא בסיס ל U:

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & -4 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_1} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & -4 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 - R_1 \to R_3}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -3 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 - R_2 \to R_3} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -4 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{-R_3 \to R_3} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

$\Longleftarrow$ $\{(2,1,-1,1),(0,2,1,2),(0,0,4,3)\}$ בסיס ל U.

א. נמצא בסיס ל $U^\perp$:

נחפש וקטורים $(a,b,c,d) \in U^\perp$ כך שיתקיים:

(ב)

$$\begin{cases} \langle (a,b,c,d),(2,1,-1,1)\rangle = 2a+b-c+d=0 \\ \langle (a,b,c,d),(0,2,1,2)\rangle = 2b+c+2d=0 \\ \langle (a,b,c,d),(0,0,4,3)\rangle = 4c+3d=0 \end{cases} \Longrightarrow a=-\frac{9}{16}d,\ b=-\frac{5}{8}d,\ c=-\frac{3}{4}d$$

$$\Leftarrow \quad U^\perp = \left\{\left(-\frac{9}{16}d,-\frac{5}{8}d,-\frac{3}{4}d,d\right)\Big| d\in\mathbb{R}\right\} =$$

$$=\{(-9d,-10d,-12d,16d)\mid d\in\mathbb{R}\}$$

נראה כי $S=\{(-9,-10,-12,16)\}$ בסיס ל-$U^\perp$:

(א) S בת"ל כי קבוצה המכילה וקטור אחד שונה מאפס היא בת"ל.

(ב) יהי $(-9d,-10d,-12d,16d)\in U^\perp$ כלשהו אזי

$$(-9d,-10d,-12d,16d)=d(-9,-10,-12,16)$$

$$\Leftarrow \quad U\subseteq span(S)$$

כמו כן $S\subseteq U$ (ברור) ולכן $span(S)\subseteq U$.

לכן $span(S)=U$.

לכן S בסיס ל-$U^\perp$ ו-$\dim(U^\perp)=1$.

(ג)

$$(2,3,4,6) = \underbrace{a(2,1,-1,1)+b(0,2,1,2)+c(0,0,4,3)}_{\in U}+\underbrace{d(-9,-10,-12,16)}_{\in U^\perp}$$

$$\begin{cases} 2a-9d=2 \\ a+2b-10d=3 \\ -a+b+4c-12d=4 \\ a+2b+3c+16d=6 \end{cases} \Longrightarrow a=b=c=1,\ d=0$$

לכן:

$$proj(v,U)=(2,1,-1,1)+(0,2,1,2)+(0,0,4,3)=(2,3,4,6)$$

$$proj(v,U^\perp)=0\cdot(-9,-10,-12,16)=(0,0,0,0)$$

(הערה: שים לב $v\in U$!)

שאלה 3:

נמצא בסיס ל U:

נגדיר $S=\{(-3,1)\}$ ונראה כי S בסיס ל U:

(א) S בת"ל (כי כל קבוצה המכילה וקטור אחד שונה מאפס היא בת"ל).

(ב) $S\subseteq U$ ולכן $span(S)\subseteq U$.

יהי $(a,b)\in U$ $\Leftarrow$ $a+3b=0$ $\Leftarrow$ $a=-3b$ ונקבל:

$$(a,b)=(-3b,b)=b(-3,1)\in span(S)$$

ולכן $U\subseteq span(S)$.

לכן $span(S)=U$.

סה"כ לכן S בסיס ל U.

(ב)

$$U^\perp=\{(a,b)\in\mathbb{R}^2 \mid \langle (a,b),(-3,1)\rangle=0\}=$$

לפי הגדרת המ"פ הסטנדרטית!

$$=\{(a,b)\in\mathbb{R}^2 \mid -3a+b=0\}=\{(a,3a)\mid a\in\mathbb{R}\}$$

נראה כי $S'=\{(1,3)\}$ בסיס ל $U^\perp$:

(א) S' בת"ל (כי כל קבוצה המכילה וקטור אחד שונה מאפס היא בת"ל).

(ב) $S'\subseteq U^\perp$ ולכן בוודאי $span(S')\subseteq U^\perp$.

כמו כן אם $(a,b)\in U^\perp$ אז $b=3a$ ולכן:

$$(a,b)=(a,3a)=a(1,3)\in span(S')$$

ולכן $U^\perp\subseteq span(S')$.

לכן $U^\perp=span(S')$.

לכן S' בסיס ל $U^\perp$.

(ג)

$$v=(7,1)=\overbrace{a(-3,1)}^{U}+\overbrace{b(1,3)}^{U^\perp}$$

$$\begin{cases}-3a+b=7\\ a+3b=1\end{cases} \Rightarrow a=-2,\ b=1$$

לכן:

$$proj(v,U)=-2(-3,1)=(6,-2)$$

$$proj(v,U)=(1,3)$$

(4)

שאלה 4:

$S=\{(-3,1)\}$ עדיין בסיס ל U.

ג. נמצא בסיס ל $U^\perp$:

$$U^\perp=\{(a,b)\in\mathbb{R}^2 \mid \langle(a,b),(-3,1)\rangle=0\}=$$

$$\overset{\text{הג' המ"פ}}{=}\{(a,b)\in\mathbb{R}^2 \mid -3a-a+3b+3b=0\}=$$

$$=\{(a,b)\in\mathbb{R}^2 \mid -2a+3b=0\}=\{(a,b)\in\mathbb{R}^2 \mid a=\tfrac{3b}{2}\}=$$

$$=\{(\tfrac{3b}{2},b) \mid b\in\mathbb{R}\}=\{(3b,2b) \mid b\in\mathbb{R}\}$$

נטען כי $S''=\{(3,2)\}$ בסיס ל $U^\perp$:

(א) S'' בת"ל (כי קב' המכילה וקטור אחד שונה מוקטור האפס היא בת"ל).

(ב) - $S''\subseteq U^\perp$ ולכן $span(S'')\subseteq U^\perp$.

- יהי $(a,b)\in U^\perp$ מתקיים $a=\frac{3b}{2}$ ולכן

$$(a,b)=\left(\tfrac{3b}{2},b\right)=\tfrac{b}{2}(3,2)\in span(S'')$$

ולכן $U^\perp\subseteq span(S'')$.

לכן $span(S'')=U^\perp$.

סה"כ לכן S'' בסיס ל $U^\perp$ (עבור המ"פ שהוגדרה!).

ה.

$$v=(7,1)=\underbrace{a(-3,1)}_{\in U}+\underbrace{b(3,2)}_{\in U^\perp}$$

$$\begin{cases}-3a+3b=7\\ a+2b=1\end{cases} \Longrightarrow a=\frac{-11}{9},\ b=\frac{10}{9}$$

לכן:

$$proj(v,U)=\frac{-11}{9}(-3,1)=\left(\frac{33}{9},\frac{-11}{9}\right)$$

$$proj(v,U^\perp)=\frac{10}{9}(3,2)=\left(\frac{30}{9},\frac{20}{9}\right)$$

שאלה 5:

הטענה נכונה. הוכחה:

יהי V מ"פ ויהיו U,W תת-מרחבים של V.

יהי $v\in V$ כך ש- $v\in U^\perp \cap W^\perp$.

$\Leftarrow$ $v\in W^\perp$ וגם $v\in U^\perp$.

$\Leftarrow$ $(\forall w\in W \quad \langle w,v\rangle = 0)$ וגם $(\forall u\in U \quad \langle u,v\rangle = 0)$

$$\Leftarrow \quad \forall u\in U, w\in W \quad \langle u,v\rangle + \langle w,v\rangle \underset{\substack{\text{אקסיומה 1} \\ \text{בהג' מ"פ}}}{=} \langle u+w,v\rangle = 0$$

$$\Leftarrow \quad \forall u\in U, w\in W \quad \langle u+w,v\rangle = 0$$

$$\Leftarrow \quad \forall x\in U+W \quad \langle x,v\rangle = 0$$

$$\Leftarrow \quad v\in (U+W)^\perp.$$

לכן סה"כ $(U+W)^\perp \supseteq U^\perp \cap W^\perp$.

מש"ל.

שאלה 6:

בדקנו והראנו כי $\{\underset{a_1}{(2,1,3,-1)}, \underset{a_2}{(7,4,3,-3)}, \underset{a_3}{(5,7,7,8)}\}$ בסיס ל- W!

נהפוך אותו לבסיס אורתוגונלי בעזרת תהליך גרם-שמידט:

$$b_1 = a_1 = (2,1,3,-1)$$

$$b_2 = a_2 - \frac{\langle a_2,b_1\rangle}{\langle b_1,b_1\rangle} b_1 = a_2 - \frac{30}{15} b_1 = a_2 - 2b_1 = (3,2,-3,-1)$$

6

$$b_3 = a_3 - \frac{\langle a_3, b_1 \rangle}{\langle b_1, b_1 \rangle} b_1 - \frac{\langle a_3, b_2 \rangle}{\langle b_2, b_2 \rangle} b_2 =$$

$$= (5,7,7,8) - \frac{30}{15}(2,1,3,-1) - 0 \cdot (3,2,-3,-1) =$$

$$= (5,7,7,8) - 2(2,1,3,-1) = (1,5,1,10)$$

לכן $\{\underbrace{(2,1,3,-1)}_{b_1}, \underbrace{(3,2,-3,-1)}_{b_2}, \underbrace{(1,5,1,10)}_{b_3}\}$ בסיס אורתוגונלי ל-W.

$$\hat{b_1} = \frac{1}{\|b_1\|} \cdot b_1 = \frac{1}{\sqrt{15}}(2,1,3,-1) = \left(\frac{2}{\sqrt{15}}, \frac{1}{\sqrt{15}}, \frac{3}{\sqrt{15}}, \frac{-1}{\sqrt{15}}\right)$$

$$\hat{b_2} = \frac{1}{\|b_2\|} \cdot b_2 = \frac{1}{\sqrt{23}}(3,2,-3,-1) = \left(\frac{3}{\sqrt{23}}, \frac{2}{\sqrt{23}}, \frac{-3}{\sqrt{23}}, \frac{-1}{\sqrt{23}}\right)$$

$$\hat{b_3} = \frac{1}{\|b_3\|} \cdot b_3 = \frac{1}{\sqrt{127}}(1,5,1,10) = \left(\frac{1}{\sqrt{127}}, \frac{5}{\sqrt{127}}, \frac{1}{\sqrt{127}}, \frac{10}{\sqrt{127}}\right)$$

לכן:

$$\left\{\left(\frac{2}{\sqrt{15}}, \frac{1}{\sqrt{15}}, \frac{3}{\sqrt{15}}, \frac{-1}{\sqrt{15}}\right), \left(\frac{3}{\sqrt{23}}, \frac{2}{\sqrt{23}}, \frac{-3}{\sqrt{23}}, \frac{-1}{\sqrt{23}}\right), \left(\frac{1}{\sqrt{127}}, \frac{5}{\sqrt{127}}, \frac{1}{\sqrt{127}}, \frac{10}{\sqrt{127}}\right)\right\}$$

בסיס אורתונורמלי ל-W.

תרגיל מס' 1 - מספרים מרוכבים

הגשה עד: 27.10.2002 .

א. מודול, ארגומנט וצורה קוטבית:

מצאו מודול וארגומנט של המספרים הבאים והעבירו אותם לצורה קוטבית.

1. $z = 11$
2. $z = 1/2 + \sqrt{3}/2\, i$
3. $z = \cot\alpha + i$
4. $z = -1 - i$
5. $z = -25i$

ב. פעולות יסודיות במרוכבים:

יהיו $p = 2-2i$, $v = 5$, $u = 4i$, $w = 1+i$, $z = 4+3i$. חשבו:

1. $p - 3w + \dfrac{u}{p+v}$
2. $\bar{z} + |w| - 3p$
3. z^3
4. יהיו $w = 1/2 + \sqrt{3}/2\, i$, $z = 2-2i$. חשבו $\arg\left(\dfrac{z^3\bar{w}}{\bar{z}w}\right)$.

ג. פתרון משוואות במספרים מרוכבים:

מצאו לכל משוואה את כל פתרונותיה.

1. $2z^2 = 3\bar{z}$
2. $z^2 + z + 1 = 0$
3. $|z| + z = 2 + i$

ד. מקומות גיאומטריים:

מהו המקום הגיאומטרי של כל המספרים המרוכבים המקיימים:

1. $\mathrm{Im}(z) < -3$
2. $1 < |z-2| < 2$
3. $\pi/3 < \arg z < 2\pi/3$

ה.תכונות המספרים המרוכבים:

1. הוכיחו כי $\forall z \neq 0$ $\dfrac{1}{z} = \dfrac{\bar{z}}{|z|^2}$ וחשבו את הביטוי $1 + \{[(1+i)^{-1} + 1]^{-1} + 1\}^{-1}$.
2. הוכיחו או הפריכו: לכל z_1, z_2 מרוכבים, קיים k ממשי כך ש- $z_1\bar{z}_2 - \bar{z}_1 z_2 = ki$.
3. הוכיחו כי הביטוי $(z+1-2i)^{1996} + (\bar{z}+1+2i)^{1996}$ ממשי טהור לכל z מרוכב.
4. הוכיחו או הפריכו: לכל z,w מרוכבים המקיימים $\mathrm{Im}(z) \neq 0$, $z \neq 0$

   הביטוי $\dfrac{z\cdot w + \bar{z}\cdot\bar{w}}{w - \bar{w}}$ הוא מדומה טהור.
5. יהי $z = \dfrac{1-ti}{1+ti}$ מספר מרוכב כאשר t ממשי. מהו $|z|$?
6. פשטו את הביטוי $\dfrac{3(z-i)}{1+iz}$.

בהצלחה!

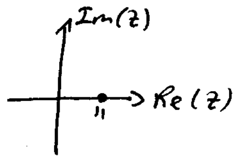
(1)

פתרון תרגיל מס' 1

שאלה א':

1) $z=11 \Rightarrow |z|=11 \quad , \quad \alpha=\arg(z)=0$

$$\Rightarrow \quad z=11=11\left(\cos(0)+i\sin(0)\right)=11e^{0i}$$



2) $z=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$

$|z|=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}}=1$

$tg\alpha=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}}=\sqrt{3} \Rightarrow \frac{\pi}{3}$

$$\Rightarrow \quad z=e^{\frac{\pi}{3}i}$$

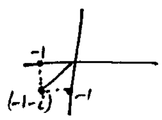
3) $z=\cot\alpha+i$

$|z|=\sqrt{\cot^2\alpha+1}=\sqrt{\frac{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha}}=\frac{1}{\sqrt{\sin^2\alpha}}=\frac{1}{|\sin\alpha|}$

$tg(\arg z)=\frac{1}{\cot\alpha}=tg\alpha \Rightarrow \arg z=\alpha$

$$\Rightarrow z=\frac{1}{|\sin\alpha|}e^{\alpha i}$$

4) $z=-1-i$

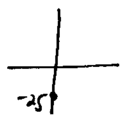


$|z|=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$

$tg\alpha=\frac{-1}{-1}=1 \Rightarrow \alpha=\frac{5\pi}{4}$

$$\Rightarrow z=\sqrt{2}\,e^{5\pi/4\, i}$$

5) $z=-25i \Rightarrow |z|=25 \ , \ \arg z=\frac{3\pi}{2}$



$$\Rightarrow z=25e^{3\pi/2\, i}$$

שאלה ב':

1) $p-3w+\frac{4}{p+v}=(2-2i)-3(1+i)+\frac{4i}{(2-2i)+5}=$

$=(2-2i)+(-3-3i)+\frac{4i(7+2i)}{(7-2i)(7+2i)}=-1-5i+\frac{28i-8}{49+4}=$

$=-1-5i+\frac{28}{53}i-\frac{8}{53}=-1\frac{8}{53}+\left(\frac{28}{53}-5\right)i$

2

$$\bar{z}+|w|-3p = 4-3i+\sqrt{1+1}-6+6i = (-2+\sqrt{2})+3i$$ (2

$$z^3 = (4+3i)^3 = 64+144i-108-27i = -44+117i$$ (3

$$\boxed{(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3b^2a+b^3}$$

$$\arg\left(\frac{z^3\bar{w}}{\bar{z}w}\right) = \arg\left(\frac{z^3\bar{w}\ z\bar{w}}{\bar{z}w\,z\bar{w}}\right) = \arg\left(\frac{z^4(\bar{w})^2}{|z|^2\,|w|^2}\right) =$$ (4

$$= \arg\left(\frac{(2-2i)^4\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^2}{|2-2i|^2\,\left|\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right|^2}\right) = \arg\left(\frac{(-8i)^2\left(\frac{1}{4}-\frac{\sqrt{3}}{2}i-\frac{3}{4}\right)}{8\cdot 1}\right) =$$

$$= \arg\left(\frac{-64\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)}{8}\right) = \arg(4+4\sqrt{3}i)$$

$$\Rightarrow tg\left(\arg(4+4\sqrt{3}i)\right) = \frac{4\sqrt{3}}{4} = \sqrt{3} \Rightarrow \arg(4+4\sqrt{3}i) = \frac{\pi}{3}$$

סוף :)

$$2z^2 = 3\bar{z}$$ (4

נציב $z=a+bi$ ונקבל:

$$2(a+bi)^2 = 3(a-bi)$$

$$2a^2+4abi-2b^2 = 3a-3bi$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2a^2-2b^2 = 3a & (1) \\ 4ab = -3b & (2) \end{cases}$$

(2) $4ab+3b=0$

$b(4a+3)=0$

$b=0$ או $a=-\frac{3}{4}$

$(b=0 \rightarrow (1))$ $2a^2=3a$

$a=0$ $2a=3$

$a=\frac{3}{2}$

$z_1=0$, $z_2=\frac{3}{2}$

$\left(a=-\frac{3}{4} \rightarrow (1)\right)$

$$2\cdot\frac{9}{16}-2b^2 = -\frac{9}{4}$$

$$b^2 = \frac{27}{16}$$

$$b = \pm\frac{3\sqrt{3}}{4}$$

$$z_3 = -\frac{3}{4}+\frac{3\sqrt{3}}{4}i$$

$$z_4 = -\frac{3}{4}-\frac{3\sqrt{3}}{4}i$$

③

2)

$$z^2+z+1=0$$

$$z_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{1-4}}{2}=\frac{-1\pm\sqrt{-3}}{2}=\frac{-1\pm\sqrt{3i^2}}{2}=\frac{-1\pm 3i}{2}$$

$$z_1=-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}i\ ,\quad z_2=-\frac{1}{2}-\frac{3}{2}i$$

3)

$$|z|+z=2+i$$

נציב $z=a+bi$ ונקבל:

$$|a+bi|+a+bi=2+i$$

$$\sqrt{a^2+b^2}+a+bi=2+i$$

$$\Rightarrow \begin{cases}\sqrt{a^2+b^2}+a=2\\ b=1\end{cases} \Rightarrow \sqrt{a^2+1}=2-a \quad /()^2$$

$$\cancel{a^2}+1=4-4a+\cancel{a^2}$$

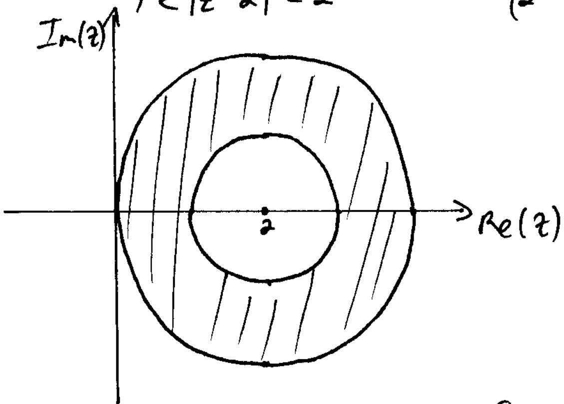
$$4a=3$$

$$a=\frac{3}{4} \qquad \Rightarrow z=\frac{3}{4}+i$$

סעיף ג':

2)

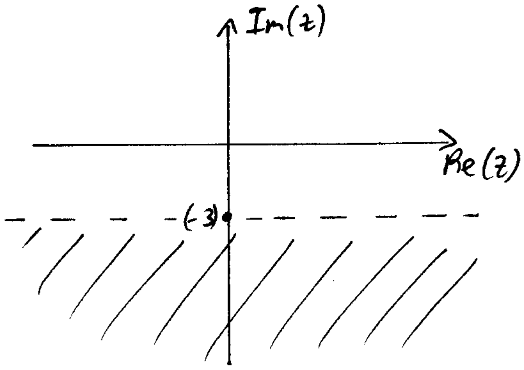
$$1<|z-2|<2$$



אלו הנק' הנמצאות בין שני המעגלים,
האחד ברדיוס 1 והשני ברדיוס 2 שמרכזם
בנק' $z=2$.

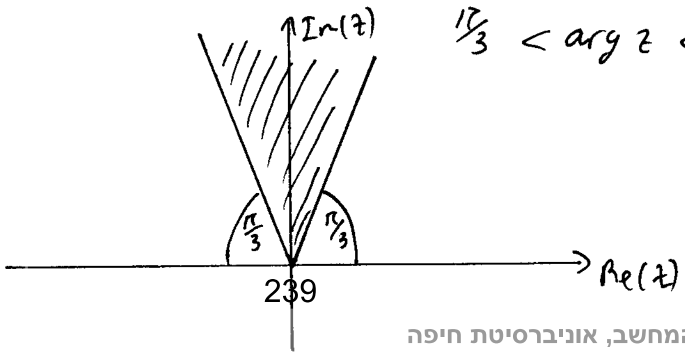
4)

$$Im(z)<-3$$



3)

$$\frac{\pi}{3}<\arg z<\frac{2\pi}{3}$$



(4)

שאלה ה':

1) הוכחה - בהרצאה.

$$1+\left\{\left[(1+i)^{-1}+1\right]^{-1}+1\right\}^{-1} = 1+\left\{\left[\frac{1-i}{2}+1\right]^{-1}+1\right\}^{-1} =$$

$$= 1+\left\{\left[\frac{3}{2}-\frac{1}{2}i\right]^{-1}+1\right\}^{-1} = 1+\left\{\frac{\frac{3}{2}+\frac{1}{2}i}{\frac{9}{4}+\frac{1}{4}}+1\right\}^{-1} =$$

$$= 1+\left\{\frac{3}{5}+\frac{1}{5}i+1\right\}^{-1} = 1+\left\{\frac{8}{5}+\frac{1}{5}i\right\}^{-1} = 1+\frac{\frac{8}{5}-\frac{1}{5}i}{\frac{64}{25}+\frac{1}{25}} =$$

$$= 1+\frac{5}{13}\left(\frac{8}{5}-\frac{1}{5}i\right) = 1+\frac{8}{13}-\frac{1}{13}i = 1\frac{8}{13}-\frac{1}{13}i$$

2) הטענה נכונה. נוכיח:

נסמן $a = z_1\overline{z_2}$ אזי

$$z_1\overline{z_2}-\overline{z_1}z_2 = a-\bar{a} = Im(a)\cdot 2i$$

לכן נבחר $k=2Im(a)$! וזה היינו ממשי ולכן הטענה נכונה.

מש"ל.

3) נסמן $t=(z+1-2i)^{1996}+(\bar{z}+1+2i)^{1996}$

צ"ל:

$$Im(t) = \frac{t-\bar{t}}{2i} = 0$$

$$\bar{t} = \overline{(z+1-2i)^{1996}+(\bar{z}+1+2i)^{1996}} = \overline{(z+1-2i)}^{1996}+\overline{(\bar{z}+1+2i)}^{1996} =$$

$$= (\bar{z}+1+2i)^{1996}+(z+1-2i)^{1996} = t$$

$$\Rightarrow Im(t) = \frac{t-\bar{t}}{2i} = \frac{t-t}{2i} = 0$$

מש"ל.

4) הטענה נכונה. נוכיח:

$$\frac{zw+\bar{z}\bar{w}}{w-\bar{w}} = \frac{zw+\overline{(zw)}}{w-\bar{w}} = \frac{2Re(zw)}{2i\,Im(w)} =$$

$$= \frac{Re(zw)}{Im(w)}(-i) = \underbrace{i\cdot\frac{-Re(zw)}{Im(w)}}_{\text{מדומה טהור}}$$

מש"ל.

(5)

$$|z| = \left|\frac{1-ti}{1+ti}\right| \underset{\boxed{\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}}}{=} \frac{|1-ti|}{|1+ti|} \underset{t \text{ ממשי}}{=} \frac{\sqrt{1+(-t)^2}}{\sqrt{1+t^2}} =$$ 5)

$$= \frac{\sqrt{1+t^2}}{\sqrt{1+t^2}} = 1$$

$$\frac{3(z-i)}{1+iz} = \frac{3(z-i)(1-iz)}{(1+iz)(1-iz)} = \frac{3(z-i-iz^2-z)}{1+z^2} =$$ 6)

$$= \frac{-3i(1+z^2)}{1+z^2} = -3i$$

תרגיל מס' 2

הגשה עד: 3.11.2001

1. חשבו: א. $(3+\sqrt{3}i)^{10}$ ב. $\left(\frac{1+i}{i}\right)^{6}$

2. מצאו את כל הפתרונות של המשוואות הבאות:

א. $(z+2)^4 = 81$ ב. $z^3(1+i)+i-1=0$

3. נתון כי $z=1-i$. חשבו את הביטוי $\frac{z^6+z^4+z^2+1}{z^6-z^4-z^2+1}$.

4. חשבו את דרגת המטריצה

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 4 & 0 \\ -2 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

5. פתרו בשיטת האלימינציה של גאוס:

א.
$$\begin{cases} y-5z+w=-2 \\ 2x+y+w+3z=10 \\ 3x+2y-3z-w=9 \\ 5x+5y-20z-4w=0 \end{cases}$$

ב.
$$\begin{cases} 5x-3y+z=2 \\ -x+2y=1 \\ x-y+4z=0 \end{cases}$$

בהצלחה!

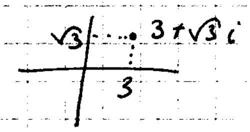
(1)

פתרון תרגיל 2

1. (א) נגדיר $z=3+\sqrt{3}i$ ונעבור להצגה קטבית.

$$r=\sqrt{3^2+(\sqrt{3})^2}=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$$

$$tg\alpha=\frac{\sqrt{3}}{3}\Longrightarrow\quad \alpha=\frac{\pi}{6}$$



ולכן:
$$z=3+\sqrt{3}i=2\sqrt{3}\,e^{\frac{\pi}{6}i}$$

$$\Longrightarrow\quad (3+\sqrt{3})^{10}=\left(2\sqrt{3}e^{\frac{\pi}{6}i}\right)^{10}=(2\sqrt{3})^{10}\left(e^{\frac{\pi}{6}i}\right)^{10}=$$

$$=2^{10}\cdot(\sqrt{3})^{10}\cdot e^{\frac{10\pi}{6}i}=2^{10}\cdot 3^5\cdot e^{\frac{5\pi}{3}i}=$$

$$=2^{10}\cdot 3^5\left(\cos\frac{5\pi}{3}+i\sin\frac{5\pi}{3}\right)=$$

$$=2^{10}\cdot 3^5\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=2^9\cdot 3^5(1-\sqrt{3}i)$$

(ב)
$$\left(\frac{1+i}{i}\right)^6=\frac{(1+i)^6}{i^6}=\frac{[(1+i)^2]^3}{[i^2]^3}=\frac{(1+2i-1)^3}{(-1)^3}=$$

$$=\frac{(2i)^3}{-1}=-(2^3\cdot i^3)=-(8\cdot i\cdot i^2)=8i$$

2. (א)
$$(z+2)^4=81$$

נגדיר $t=z+2$ ונפתור את המשוואה

$$t^4=81=81e^{0i}$$

$$(r=81,\ \varphi=0,\ n=4,\ k=0,1,2,3)$$

ולכן:

$$t_0=\sqrt[4]{81}\,e^{\frac{0+2\pi\cdot 0}{4}i}=3e^{0i}=3$$

$$t_1=\sqrt[4]{81}\,e^{\frac{0+2\pi\cdot 1}{4}i}=3e^{\frac{\pi}{2}i}=3\left(\overset{0}{\cos\frac{\pi}{2}}+i\overset{1}{\sin\frac{\pi}{2}}\right)=3i$$

$$t_2=\sqrt[4]{81}\,e^{\frac{0+2\pi\cdot 2}{4}i}=3e^{\pi i}=-3$$

$$t_3=\sqrt[4]{81}\,e^{\frac{0+2\pi\cdot 3}{4}i}=3e^{\frac{6\pi}{4}i}=3e^{\frac{3\pi}{2}i}=3\left(\overset{0}{\cos\frac{3\pi}{2}}+i\overset{-1}{\sin\frac{3\pi}{2}}\right)=$$

$$=-3i$$

(2)

ולכן:

$$z_0 = t_0 - 2 = 3 - 2 = 1$$

$$z_1 = t_1 - 2 = 3i - 2 = -2+3i$$

$$z_2 = t_2 - 2 = -3 - 2 = -5$$

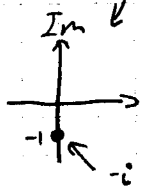
$$z_3 = t_3 - 2 = -3i - 2 = -2-3i$$

(ב)

$$z^3(1+i) + i - 1 = 0$$

$$z^3(1+i) = 1-i$$

$$z^3 = \frac{1-i}{1+i} = \frac{(1-i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{1-2i-1}{1+1} = \frac{-2i}{2} = -i = 1e^{\frac{3\pi}{2}i}$$



$$\left(r=1,\ \varphi = \frac{3\pi}{2},\ n=3,\ k=0,1,2\right)$$

ולכן:

$$z_0 = \sqrt[3]{1}\, e^{\frac{\frac{3\pi}{2}+2\pi\cdot 0}{3} i} = 1e^{\frac{\pi}{2}i} = \underset{0}{\cos\frac{\pi}{2}} + i\underset{1}{\sin\frac{\pi}{2}} = i$$

$$z_1 = \sqrt[3]{1}\, e^{\frac{\frac{3\pi}{2}+2\pi\cdot 1}{3} i} = e^{\frac{7\pi}{6}i} = \cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$$

$$z_2 = \sqrt[3]{1}\, e^{\frac{\frac{3\pi}{2}+2\pi\cdot 2}{3} i} = e^{\frac{11\pi}{6}i} = \cos\frac{11\pi}{6} + i\sin\frac{11\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$$

(3) נתון $z = 1-i$, לכן:

$$z^2 = (1-i)^2 = 1-2i-1 = -2i$$

$$z^4 = (z^2)^2 = (-2i)^2 = -4$$

$$z^6 = (z^2)^3 = (-2i)^3 = 8i$$

ולכן:

$$\frac{z^6+z^4+z^2+1}{z^6-z^4-z^2+1} = \frac{8i-4-2i+1}{8i+4+2i+1} = \frac{-3+6i}{5+10i} = \frac{-3}{5}\cdot\frac{1-2i}{1+2i} =$$

$$= -\frac{3}{5}\cdot\frac{(1-2i)^2}{(1+2i)(1-2i)} = \frac{-3}{5}\cdot\frac{1-4i-4}{1+4} = -\frac{3}{5}\cdot\frac{-3-4i}{5} = \frac{9}{25} + \frac{12}{25}i$$

3

4.

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 4 & 0 \\ -2 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{R_3-R_1\to R_3 \\ R_4-2R_1\to R_4}]{R_2+2R_1\to R_2} \begin{pmatrix} 1 & 5 & 4 & 0 \\ 0 & 13 & 9 & 1 \\ 0 & -4 & -3 & 1 \\ 0 & -7 & -8 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[13R_4\to R_4]{13R_3\to R_3} \begin{pmatrix} 1 & 5 & 4 & 0 \\ 0 & 13 & 9 & 1 \\ 0 & -52 & -39 & 13 \\ 0 & -91 & -104 & -13 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_4+7R_2\to R_4]{R_3+4R_2\to R_3} \begin{pmatrix} 1 & 5 & 4 & 0 \\ 0 & 13 & 9 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 17 \\ 0 & 0 & -41 & -6 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{-3R_4\to R_4} \begin{pmatrix} 1 & 5 & 4 & 0 \\ 0 & 13 & 9 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 17 \\ 0 & 0 & 123 & 18 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_4+41R_3\to R_4} \begin{pmatrix} 1 & 5 & 4 & 0 \\ 0 & 13 & 9 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 17 \\ 0 & 0 & 0 & 715 \end{pmatrix}$$

במט' המדורגת יש 4 שורות לא מאופסות,

$\Leftarrow$ דרגת המט' היא 4.

5. א.

$$\begin{cases} y-5z+w=-2 \\ 2x+y+u+3z=10 \\ 3x+2y-3z-w=9 \\ 5x+5y-20z-4w=0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -5 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 3 & 1 & 10 \\ 3 & 2 & -3 & -1 & 9 \\ 5 & 5 & -20 & -4 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{2R_3\to R_3 \\ 2R_4\to R_4}]{R_2\leftrightarrow R_1} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 & 10 \\ 0 & 1 & -5 & 1 & -2 \\ 6 & 4 & -6 & -2 & 18 \\ 10 & 10 & -40 & -8 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[R_4-5R_1\to R_4]{R_3-3R_1\to R_3} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 & 10 \\ 0 & 1 & -5 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -15 & -5 & -12 \\ 0 & 5 & -55 & -13 & -50 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_4-5R_2\to R_4]{R_3-R_2\to R_3} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 & 10 \\ 0 & 1 & -5 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -10 & -6 & -10 \\ 0 & 0 & -30 & -18 & -40 \end{pmatrix}$$

4

$$\xrightarrow[-\frac{1}{2}R_4 \to R_4]{-\frac{1}{2}R_3 \to R_3} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 & 10 \\ 0 & 1 & -5 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 5 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 15 & 9 & 20 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_4 - 3R_3 \to R_4} \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{A} \left| \underbrace{\begin{matrix} 10 \\ -2 \\ 5 \\ 5 \end{matrix}}_{b} \right)$$

$$3 = r(A) < r(A|b) = 4$$

מסקנה

ולכן למערכת אין פתרון!

ניתן לראות כי כאשר נחזיר את המט' למערכת משוואות, נקבל במשוואה האחרונה $5=0$ וזוהי סתירה לוגית!)

ב.

$$\begin{cases} 5x - 3y + z = 2 \\ -x + 2y = 1 \\ x - y + 4z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 5 & -3 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 4 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ 5 & -3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[R_3 - 5R_1 \to R_3]{R_2 + R_1 \to R_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & -19 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 - 2R_2 \to R_3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & -27 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} x - y + 4z = 0 & \Longrightarrow x = 1 \\ y + 4z = 1 & \Longrightarrow y = 1 \\ -27z = 0 & \Longrightarrow z = 0 \end{cases}$$

$$(x, y, z) = (1, 1, 0) \Leftarrow$$

תרגיל מס' 3

הגשה עד: 10.11.2001

1. נתונה מערכת המשוואות:

$$\begin{cases} x+y+z=6 \\ 2x-y+4z=2 \\ 3x+(a^2-4)z=a+5 \end{cases}$$

מצא עבור אילו ערכי a יש למערכת א) פתרון יחיד ב) אינסוף פתרונות ג) אין פתרון
הציגו את הפתרונות במקרים בהם הם קיימים.

2. מצא עבור אילו ערכי k,p,m למערכת יש א) פתרון יחיד ב) אינסוף פתרונות ג) אין פתרון

$$\begin{cases} x-y+3z=k \\ 2x+y-z=m \\ 3x+3y-5z=p \end{cases}$$

3. לכל אחת מן הקבוצות הבאות הוכיחו או הפריכו האם היא מהווה תת-מרחב של R^n מעל R (עבור n המתאים):

א. $W=\{(a,b,c,d)\in R^4 \mid a-b=c\ ,\ b+2d=a\}$

ב. $W=\{(x,y)\in R^2 \mid x^2+y^2=0\}$

ג. $W=\{(a,b,c,d)\in R^4 \mid a=0 \vee c=0\}$

4. כתבו את הוקטור $(4,1,7)$ כצירוף לינארי של איברי הקבוצה $\{(1,0,2),(3,2,6),(4,2,10)\}$.

5. קבעו תנאים על הוקטור (α,β,γ) כך ש $(\alpha,\beta,\gamma)\in span\{(1,-1,2),(2,1,0),(0,3,-4)\}$.

6. עבור כל קבוצה הראה האם היא ת"ל או בת"ל:

א. $\{(1,2,3,4),(2,3,4,1),(3,4,1,2)\}$

ב. $\{(1,2,1,0),(2,1,1,-1),0,3,1,1)\}$

7. עבור אילו ערכי b הקבוצה $\{(1,0,1,0,1),(1,1,1,1,b),(0,-1,0,-1,0)\}$ בת"ל?

8. במ"ו V נתונים 3 וקטורים u,w,v בת"ל.
הוכיחו או הפריכו: גם הוקטורים $u+v,v-w,w+2u$ בת"ל.
(נסו תחילה לפתור עבור V כלשהוא. במידה ואינכם מצליחים, פתרו עבור $V=R^n$).

בהצלחה!

1

פתרון תרגיל 3:

1

$$\begin{cases} x+y+z=6 \\ 2x-y+4z=2 \\ 3x+(a^2-4)z=a+5 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 4 & 2 \\ 3 & 0 & a^2-4 & a+5 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3-3R_1\to R_3]{R_2-2R_1\to R_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -3 & 2 & -10 \\ 0 & -3 & a^2-7 & a-13 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_3-R_2\to R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & 1 & 6 \\ 0 & \boxed{-3} & 2 & -10 \\ 0 & 0 & \boxed{a^2-9} & a-3 \end{array}\right)$$

$A \qquad b$

(א) למערכת יש פ. יחיד?

$\Longleftrightarrow r(A)=3$

$\Longleftrightarrow a^2-9\neq 0$

$\Longleftrightarrow a^2\neq 9$

$\Longleftrightarrow a\neq\pm3$

נמצא פ. יחיד זה (להניח ש $a\neq\pm3$):

$$\begin{cases} x+y+z=6 & \Longrightarrow x=6-y-z=\frac{8a+19}{3(a+3)} \\ -3y+2z=-10 & \Longrightarrow y=\frac{2z+10}{3}=\frac{10a+32}{3(a+3)} \\ (a^2-9)z=a-3 & \Longrightarrow z=\frac{a-3}{a^2-9}=\frac{a-3}{(a+3)(a-3)}=\frac{1}{a+3} \end{cases}$$

$a\neq\pm3$

לכן עבור $a\neq\pm3$ נקבל כי למערכת יש פ. יחיד והוא:

$$\left(\frac{8a+19}{3(a+3)},\ \frac{10a+32}{3(a+3)},\ \frac{1}{a+3}\right)$$

(ב) למערכת יש אינסוף פתרונות

$\Longleftrightarrow r(A)=r(A|b)<3$

$\Longleftrightarrow a^2-9 = a-3=0$

(2)

$(a+3)(a-3) = a-3 = 0 \quad \Leftarrow$

$a = 3 \quad \Leftarrow$

כאשר $a=3$ המערכת המדורגת תהיה:

$$\begin{cases} x+y+z=6 \\ -3y+2z=-10 \end{cases} \Rightarrow y=\frac{2z+10}{3},\ x=\frac{8-5z}{3}$$

עבור $a=3$ למערכת יש אינסוף פתרונות כאשר הפ. הכללי הוא מן הצורה $\left(\frac{8-5z}{3}, \frac{2z+10}{3}, z\right)$

!z משתנה חופשי.

ב) למערכת אין פתרון

$\Leftarrow \quad r(A) < r(A|b)$

$\Leftarrow \quad a-3 \neq 0$ וגם $a^2-9=0$

$\Leftarrow \quad a \neq 3$ וגם $a=\pm 3$

$\Leftarrow \quad a=-3$.

.2

$$\begin{cases} x-y+3z=k \\ 2x+y-z=m \\ 3x+3y-5z=p \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & k \\ 2 & 1 & -1 & m \\ 3 & 3 & -5 & p \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3-3R_1 \to R_3]{R_2-2R_1 \to R_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & k \\ 0 & 3 & -7 & m-2k \\ 0 & 6 & -14 & p-3k \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_3-2R_2 \to R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & k \\ 0 & 3 & -7 & m-2k \\ 0 & 0 & 0 & p-2m+k \end{array}\right)$$

$A \qquad b$

(א) למערכת פ. יחיד $\Leftarrow$ $r(A)=3$ זה לא קורה אף פעם

$\Leftarrow$ לכל ערך של k,m,p למערכת אין פ. יחיד

③

(ב) למערכת אינסוף פתרונות $\Longleftrightarrow$ $\underset{2}{r(A)}=r(A|b)<3$

$\Longleftrightarrow$ $p-2m+k=0$

(ג) למערכת אין פתרון $\Longleftrightarrow$ $\underset{2}{r(A)}<r(A|b)$

$\Longleftrightarrow$ $p-2m+k\neq 0$.

3. א.

$$W=\{(a,b,c,d)\in\mathbb{R}^4 \mid a-b=c\ ,\ b+2d=a\}$$

נראה כי W תת-מרחב של $\mathbb{R}^4$:

(א) $(0,0,0,0)\in W$ $\Longrightarrow$ $W\neq\emptyset$.

(ב) יהיו $W\ni(a_1,b_1,c_1,d_1),(a_2,b_2,c_2,d_2)$ אזי:

לפי הג' W

$$\circledast \quad \begin{matrix} a_1-b_1=c_1 & b_1+2d_1=a_1 \\ a_2-b_2=c_2 & b_2+2d_2=a_2 \end{matrix}$$

$$(a_1,b_1,c_1,d_1)+(a_2,b_2,c_2,d_2)=(a_1+a_2,\ b_1+b_2,\ c_1+c_2,\ d_1+d_2)$$

ומתקיים:

$$(a_1+a_2)-(b_1+b_2)\overset{\downarrow}{=}(a_1-b_1)+(a_2-b_2)\overset{\downarrow}{=}c_1+c_2$$

בגל' קומוטטיב', אסוצי' של $\mathbb{R}$ — לפי $\circledast$

$$(b_1+b_2)+2(d_1+d_2)\overset{\uparrow}{=}(b_1+2d_1)+(b_2+2d_2)=a_1+a_2$$

$\Longleftarrow$ $(a_1+a_2,\ b_1+b_2,\ c_1+c_2,\ d_1+d_2)\in W$

$\Longleftarrow$ W סגור תחת חיבור וקטורים.

(ג) יהי $(a,b,c,d)\in W$! $\alpha\in\mathbb{R}$ אזי:

לפי הג' W

$$\circledast \quad a-b=c\ ,\ b+2d=a$$

$$\alpha(a,b,c,d)=(\alpha a,\ \alpha b,\ \alpha c,\ \alpha d)$$

ומתקיים:

$$(\alpha a)-(\alpha b)=\alpha(a-b)=\alpha c$$

$$(\alpha b)+2(\alpha d)=\alpha(b+2d)=\alpha a$$

$\Longleftarrow$ $(\alpha a,\alpha b,\alpha c,\alpha d)\in W$

$\Longleftarrow$ W סגור לכפל בסקלר.

סה"כ קיבלנו W תת-מרחב של $\mathbb{R}^4$

ב.

$$W = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2=0\} =$$

$$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x=y=0\} = \{(0,0)\} = \{0_V\}$$

$\boxed{x^2+y^2=0 \iff x=y=0}$

כאשר $V=\mathbb{R}^2$.

$\{0_V\}$ תת-מרחב (יחיד במינו) של V וכמובן
$\{(0,0)\} = \{0_{\mathbb{R}^2}\}$ תת מרחב של $\mathbb{R}^2$.

ג.

$$W = \{(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 \mid a=0 \text{ או } c=0\}$$

W לא תת מרחב כי

$(0,1,1,1) \in W$

$(1,1,0,1) \in W$

אבל $(0,1,1,1)+(1,1,0,1) = (1,2,1,2) \notin W$

לכן W לא סגור תחת חיבור וקטורים ולכן אינו תת מרחב של $\mathbb{R}^4$.

4.

$$(4,1,7) = \alpha(1,0,2)+\beta(3,2,6)+\gamma(4,2,10)$$

$$\begin{cases} \alpha+3\beta+4\gamma = 4 \\ 2\beta+2\gamma = 1 \\ 2\alpha+6\beta+10\gamma = 7 \end{cases} \Longrightarrow \alpha=3,\ \beta=1,\ \gamma=-\tfrac{1}{2}$$

$$\Leftarrow \quad (4,1,7) = 3(1,0,2)+(3,2,6)-\tfrac{1}{2}(4,2,10)$$

5.

$$(\alpha,\beta,\gamma) = a(1,-1,2)+b(2,1,0)+c(0,3,-4)$$

$$\begin{cases} a+2b = \alpha \\ -a+b+3c=\beta \\ 2a-4c=\gamma \end{cases}$$

נקבל מערכת משוואות, כאשר הנעלמים הם a,b,c ואנו רוצים שיהיה לה פתרון (יחיד או אינסוף)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & \alpha \\ -1 & 1 & 3 & \beta \\ 2 & 0 & -4 & \gamma \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3-2R_1\to R_3]{R_2+R_1\to R_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & \alpha \\ 0 & 3 & 3 & \alpha+\beta \\ 0 & -4 & -4 & \gamma-2\alpha \end{pmatrix}$$

(5)

$$\xrightarrow[\frac{1}{4}R_4\to R_4]{\frac{1}{3}R_2\to R_2}\begin{pmatrix}1&2&0&\alpha\\0&1&1&\frac{\alpha+\beta}{3}\\0&-1&-1&\frac{\gamma-2\alpha}{4}\end{pmatrix}\xrightarrow{R_2+R_3\to R_3}\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&0&\alpha\\0&1&1&\frac{\alpha+\beta}{3}\\0&0&0&\frac{-2\alpha+4\beta+3\gamma}{12}\end{array}\right)$$

נדרוש שלמערכת יהיה פתרון.

למערכת אין פתרון כאשר $-2\alpha+4\beta+3\gamma\neq 0$,

לכן אנו לדרוש $-2\alpha+4\beta+3\gamma=0$

ואז יתקיים הנדרש.

(6.) (א.)

$$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&1\\3&4&1&2\end{pmatrix}\xrightarrow[R_3-3R_1\to R_3]{R_2-2R_1\to R_2}\begin{pmatrix}1&2&3&4\\0&-1&-2&-7\\0&-2&-8&-10\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_4-2R_2\to R_4}\begin{pmatrix}1&2&3&4\\0&-1&-2&-7\\0&0&-4&4\end{pmatrix}$$

היא מדורגת ללא שורת אפסים

$\Downarrow$

הוקטורים בת"ל.

(ב.)

$$\begin{pmatrix}1&2&1&0\\2&1&1&-1\\0&3&1&1\end{pmatrix}\xrightarrow{R_2-2R_1\to R_2}\begin{pmatrix}1&2&1&0\\0&-3&-1&-1\\0&3&1&1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_3+R_2\to R_3}\begin{pmatrix}1&2&1&0\\0&-3&-1&-1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

היא מדורגת עם שורת אפסים

$\Downarrow$

הוקטורים ת"ל.

(7.)

$$\begin{pmatrix}1&0&1&0&1\\1&1&1&1&b\\0&-1&0&-1&0\end{pmatrix}\xrightarrow{R_2-R_1\to R_2}\begin{pmatrix}1&0&1&0&1\\0&1&0&1&b-1\\0&-1&0&-1&0\end{pmatrix}$$

6

$$\xrightarrow{R_3+R_2\to R_3}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & b-1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b-1 \end{pmatrix}$$

הוקטורים בת"ל כאשר במצב המדורג אין שורת אפסים,

ולכן אנו לדרוש $b-1\neq 0$, כלומר, נדרש $b\neq 1$.

סה"כ עבור $b\neq 1$ הוקטורים בת"ל.

8. הטענה נכונה. הוכחה:

$$a(u+v)+b(v-w)+c(w+2u)=0_V$$

$$\Rightarrow (a+2c)u+(a+b)v+(-b+c)w=0_V$$

אבל נתון כי u,v,w בת"ל ולכן:

$$\Rightarrow \begin{cases} a+2c=0 \\ a+b=0 \\ -b+c=0 \end{cases} \Rightarrow a=b=c=0$$

$\Leftarrow$ $u+v,\ v-w,\ w+2u$ בת"ל.

מש"ל.

תרגיל מס' 4

הגשה עד: 17.11.2001

1. מצאו בסיס ומימד של כל אחד מן המרחבים הבאים:

א. $W = span\{(1,-7,-5,1),(1,-5,-4,2),(1,1,-1,5),(2,-4,-5,7)\}$

ב. $W = \{(a,b,c,d) \in R^4 \mid a = c+2d\ ,\ b+a = c+d\}$

2. מצא בסיס ומימד של מרחב הפתרונות של המערכת

$$\begin{cases} 6x-2y+2z+5w+7t=0 \\ 9x-3y+4z+8w+9t=0 \\ 6x-2y+6z+7w+t=0 \\ 3x-y+4z+4w-t=0 \end{cases}$$

3. יהי $V = R^n$ ויהיו:

$W = \{(x_1,\dots,x_n) \in V \mid x_1 = x_2 = \dots = x_n\}$; $U = \left\{(x_1,\dots,x_n) \in V \,\middle|\, \sum_{i=1}^{n} x_i = 0\right\}$.

א. הוכיחו כי U,W מרחבים וקטוריים מעל R.

ב. מצאו בסיס ומימד ל- U,W . הוכיחו.

הערה: שימו לב כי n הינו כלשהוא (לא ניתן להניח מהו ערכו).

4. י הי $0 \le \alpha \le \frac{\pi}{2}$ קבוע כלשהוא. הוכיחו או הפריכו:

$\{(\cos\alpha, \sin\alpha), (\sin\alpha, -\cos\alpha)\}$ בסיס ל- R^2.

5. יהי $\{v_1, v_2, v_3\}$ בסיס של מ"ו V מעל שדה F. הוכיחו או הפריכו:

גם $\{v_1+v_2, v_2+v_3, v_1-v_3\}$ בסיס של V.

בהצלחה!

פתרון תרגיל 4

.1 (א)

$$W = span\{\underbrace{(1,-7,-5,1),\ (1,-5,-4,2),\ (1,1,-1,5),(2,-4,-5,7)}_{=S}\}$$

S פורשת את W ולכן נותר "לצמצם" אותה לקבוצה בת"ל.

$$\begin{pmatrix} 1 & -7 & -5 & 1 \\ 1 & -5 & -4 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 5 \\ 2 & -4 & -5 & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{R_3-R_1\to R_3 \\ R_4-2R_1\to R_4}]{R_2-R_1\to R_2} \begin{pmatrix} 1 & -7 & -5 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 8 & 4 & 4 \\ 0 & 10 & 5 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[R_4-5R_2\to R_4]{R_3-4R_2\to R_3} \begin{pmatrix} 1 & -7 & -5 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\Leftarrow$ $\{(1,-7,-5,1),(0,2,1,1)\}$ בסיס של W ו- $\dim W=2$

(ב) $W = \{(a,b,c,d)\in\mathbb{R}^4 \mid a=c+2d,\ b+a=c+d\} =$

נגדיר $S=\{(1,0,1,0),(2,-1,0,1)\}$ ונראה כי S בסיס ל-W.

(*) $S\subseteq W$ ($(1,0,1,0),(2,-1,0,1)\in W$, בידקו!)

(*) נראה כי S בת"ל:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2-2R_1\to R_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

קיבלנו מט' מדורגת ללא שורת אפסים $\Leftarrow$ S בת"ל.

(*) נראה כי $L(S)=W$:

יהי $(a,b,c,d)\in W$

$\Leftarrow$ $a=c+2d\ ,\ b+a=c+d$

$\Leftarrow$ $a=c+2d\ ,\ b=c+d-a$

$\Leftarrow$ $a=c+2d\ ,\ b=c+d-c-2d=-d$

$\Leftarrow$ $a=c+2d,\ b=-d$ (*)

ב

אזי:

$$(a,b,c,d) \underset{\circledast \text{ לפי}}{=} (c+2d,-d,c,d) = c(1,0,1,0)+d(2,-1,0,1)$$

$\Leftarrow$ $L(S)=W$.

סה"כ קיבלנו כי S בסיס ל- W ו- $\dim W = 2$.

.2

$$\begin{cases} 6x-2y+2z+5w+7t=0 \\ 9x-3y+4z+8w+9t=0 \\ 6x-2y+6z+7w+t=0 \\ 3x-y+4z+4w-t=0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 6 & -2 & 2 & 5 & 7 \\ 9 & -3 & 4 & 8 & 9 \\ 6 & -2 & 6 & 7 & 1 \\ 3 & -1 & 4 & 4 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_4} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 & 4 & -1 \\ 9 & -3 & 4 & 8 & 9 \\ 6 & -2 & 6 & 7 & 1 \\ 6 & -2 & 2 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{R_3-2R_1\to R_3 \\ R_4-2R_1\to R_4}]{R_2-3R_1\to R_2} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & -8 & -4 & 12 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -6 & -3 & 9 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_4\cdot(-\frac{1}{3})\to R_4]{R_2\cdot(-\frac{1}{4})\to R_2} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\substack{R_3+R_2\to R_3 \\ R_4-R_2\to R_4}} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} 3x-y+4z+4w-t=0 \\ 2z+w-3t=0 \\ -2t=0 \end{cases}$$

$\Leftarrow$ $t=0$, $w=-2z$, $y=3x-4z$

$\Leftarrow$ פ. כללי למערכת הנ"ל $(x,3x-4z,z,-2z,0)$

$\Leftarrow$ בסיס למרחב הפתרונות של המערכת הנ"ל $\{(1,3,0,0,0),(0,-4,1,-2,0)\}$

וממד מרחב הפתרונות הנ"ל 2.

③

③ א. V הינו מ"ו ומעוניינים להראות כי U,W תתי-מרחבים של V.

(I) נראה כי U תת-מרחב של V:

(*) $\underbrace{(0,\dots,0)}_{n\text{ פעמים}}\in U$ כי $0+0+\dots+0=0$ ⇐ $U\neq\emptyset$

(*) יהיו $(x_1,\dots,x_n),(y_1,\dots,y_n)\in U$

⇐ $\sum_{i=1}^{n}x_i=\sum_{i=1}^{n}y_i=0$

$$(x_1,\dots,x_n)+(y_1,\dots,y_n)=(x_1+y_1,\dots,x_n+y_n)$$

ומתקיים $\sum_{i=1}^{n}(x_i+y_i)=\sum_{i=1}^{n}x_i+\sum_{i=1}^{n}y_i=0+0=0$

⇐ $(x_1+y_1,\dots,x_n+y_n)\in U$

⇐ U סגור תחת חיבור וקטורי.

(*) יהי $(x_1,\dots,x_n)\in U$ ו- $\alpha\in\mathbb{R}$.

⇐ $\sum_{i=1}^{n}x_i=0$

$$\alpha(x_1,\dots,x_n)=(\alpha x_1,\dots,\alpha x_n)$$

ומתקיים $\sum_{i=1}^{n}\alpha x_i=\alpha\sum_{i=1}^{n}x_i=\alpha\cdot 0=0$

⇐ $(\alpha x_1,\dots,\alpha x_n)\in U$

⇐ U סגור תחת כפל בסקלר.

סה"כ לכן, נובע כי U תת מרחב של V.

(II) נראה כי W תת מרחב של V:

(*) $(0,0,\dots,0)\in W$ כי $0=0=\dots=0$ ⇐ $W\neq\emptyset$

(*) יהיו $(x_1,\dots,x_n),(y_1,\dots,y_n)\in W$

⇐ $x_1=x_2=\dots=x_n$ וגם $y_1=y_2=\dots=y_n$ ⊛

$$(x_1,\dots,x_n)+(y_1,\dots,y_n)=(x_1+y_1,\dots,x_n+y_n)$$

ומתקיים כי ⊛ גורר קיום $x_1+y_1=x_2+y_2=\dots=x_n+y_n$

⇐ $(x_1+y_1,\dots,x_n+y_n)\in W$.

⇐ W סגור תחת חיבור וקטורי.

(4)

(*) יהי $(x_1,\dots,x_n)\in W$ ו- $\alpha\in\mathbb{R}$.

$\Leftarrow$ $x_1=x_2=\dots=x_n$

$\Leftarrow$ $\alpha x_1=\alpha x_2=\dots=\alpha x_n$

$\Leftarrow$ $\alpha(x_1,\dots,x_n)=(\alpha x_1,\dots,\alpha x_n)\in W$

$\Leftarrow$ W סגור ביחס לכפל בסקלר.

סה"כ לכן נובע כי W תת מרחב של V.

מש"ל.

ב. (1) נמצא בסיס ומימד ל- W:

נגדיר $S_W=\{(\underbrace{1,\dots,1}_{n\text{ פעמים}})\}$ ונראה כי S_W בסיס ל- W:

(*) $S_W\subseteq W$

(*) S_W בת"ל (כי קבוצה בעלת וקטור אחד השונה מוקטור האפס היא בת"ל).

(*) יהי $(x_1,\dots,x_n)\in W$

$\Leftarrow$ $x_1=\dots=x_n$

$\Leftarrow$ $(x_1,\dots,x_n)=(x_1,\dots,x_1)=x_1(1,\dots,1)$

$\Leftarrow$ $L(S_W)=W$

סה"כ לכן S_W בסיס ל- W ו- $\dim W=1$.

(2) נמצא בסיס ומימד ל- U:

(שימו לב כי לכל $(x_1,\dots,x_n)\in W$ מתקיים $x_1+\dots+x_n=0$ ולכן $(x_1,\dots,x_n)=(x_1,\dots,x_{n-1},-x_1-x_2-\dots-x_{n-1})$).

נגדיר

$S_U=\{(1,0,\dots,0,-1),(0,1,0,\dots,0,-1),(0,0,1,0,\dots,0,-1),\dots,(0,\dots,0,1,-1)\}$

כאשר בוקטור ה- i ב- S_U הקואורדינטה ה- i תהיה שווה ל- 1, הקואורדינטה ה- n תהיה שווה ל- -1 וכל השאר יהיו אפס.

נראה כי S_U בסיס ל- U:

(*) $S_U\subseteq U$

(5)

(*) S_u בת"ל כי המט'

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

היא מט' מדורגת ללא שורת אפסים.

(*) יהי $(x_1,\dots,x_n)\in U$

$\Leftarrow$ $$\sum_{i=1}^{n} x_i = x_1+\dots+x_n=0$$

$\Leftarrow$ $$x_n=-x_1-x_2-\dots-x_{n-1}$$

ומתקיים

$$(x_1,\dots,x_n)=(x_1,\dots,x_{n-1},-x_1-x_2-\dots-x_{n-1})=$$

$$=x_1(1,0,\dots,0,-1)+x_2(0,1,0,\dots,0,-1)+x_3(0,0,1,0,\dots,0,-1)$$
$$+\dots+x_{n-1}(0,\dots,0,1,-1)$$

$\Leftarrow$ $$L(S_u)=U$$

סה"כ לכן S_u בסיס ל- U ! $\dim U = n-1$.

4. יהי $0\le\alpha\le\frac{\pi}{2}$ כלשהו.

טענה: $S=\{(\cos\alpha,\sin\alpha),(\sin\alpha,-\cos\alpha)\}$ בסיס ל-$\mathbb{R}^2$.

הטענה נכונה. הוכחה:

ידוע כי $\dim\mathbb{R}^2=2$ ומתקיים $|S|=2$ ולכן מספיק להוכיח כי S בת"ל.

$$a(\cos\alpha,\sin\alpha)+b(\sin\alpha,-\cos\alpha)=(0,0)$$

$$\Rightarrow\begin{cases} a\cos\alpha+b\sin\alpha=0 \\ a\sin\alpha-b\cos\alpha=0\end{cases}$$

(*) אם $\alpha=0$ נקבל את המערכת

$$\begin{cases} a=0 \\ -b=0\end{cases}$$

ואז $a=b=0$ ו- S בת"ל.

(*) אם $\alpha\neq 0$ נקבל ממשוואה 2 כי $\quad a=\frac{b\cos\alpha}{\sin\alpha}$

($\alpha\neq 0$ ו- $0\le\alpha\le\frac{\pi}{2}$ גורר כי $\sin\alpha\neq 0$)

ע"י הצבה במשוואה ה-1 מקבלים:

$$\frac{b\cos\alpha}{\sin\alpha}\cdot\cos\alpha+b\sin\alpha=0 \quad /\cdot\sin\alpha$$

$$\Rightarrow \quad b\cos^2\alpha+b\sin^2\alpha=0$$

$$\Rightarrow \quad b(\underbrace{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}_{=1})=0$$

$$\Rightarrow \quad b=0 \quad \Rightarrow \quad a=0$$

ואז S בת"ל.

סה"כ מקבלים עבור $0\le\alpha\le\frac{\pi}{2}$ כי S בת"ל ו- $|S|=2=\dim\mathbb{R}^2$

ולכן נובע כי S בסיס של $\mathbb{R}^2$.

5. הטענה אינה נכונה. נביא דוגמא נגדית המפריכה אותה:

יהי $V=\mathbb{R}^3$ ויהי $F=\mathbb{R}$.

נקח $v_1=(1,0,0),\ v_2=(0,1,0),\ v_3=(0,0,1)$ ואז $\{v_1,v_2,v_3\}$

בסיס ל- $\mathbb{R}^3$ (זהו הבסיס הסטנדרטי ב- $\mathbb{R}^3$).

$$\{v_1+v_2,\ v_2+v_3,\ v_1-v_3\}=\{(1,0,0)+(0,1,0),\ (0,1,0)+(0,0,1),\ (1,0,0)-(0,0,1)\}=$$

$$=\{(1,1,0),(0,1,1),(1,0,-1)\}$$

אך זהו לא בסיס ל- $\mathbb{R}^3$ כיון שאיברי הקבוצה ת"ל:

$$\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\1&0&-1\end{pmatrix}\xrightarrow{R_3-R_1\to R_3}\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&-1&-1\end{pmatrix}\xrightarrow{R_3+R_2\to R_3}\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

קיבלנו מט' מדורגת עם שורת אפסים ולכן הוקטורים ת"ל!,

ובפרט ת"ל לא יכולה להיות בסיס

הראינו דוגמא נגדית ולכן הטענה אינה נכונה.

<u>תרגיל מס' 5</u>

<u>הגשה עד: 24.11.2001</u>

1. לכל אחת מן הקבוצות הבאות עם הפעולות הנתונות, הוכיחו או הפריכו האם היא מ"ו:

א. $W=\left\{A\in R^{2\times 2}\middle| AB=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}2&2\\3&3\end{pmatrix}\right\}$ עם חיבור מטריצות וכפל מטריצות בסקלר מעל R.

ב. $W=\left\{p(x)\in R[x]\middle|\exists n\in N\ \deg\left(p(x)\right)=2n-1\right\}$ עם פעולת חיבור פולינומים וכפל פולינומים בסקלר מעל R.

ג. $W=\left\{f:R\to R\middle|\exists c\in R\quad \forall x\in R\quad f(x)=c\right\}$ עם פעולת חיבור פונקציות וכפל פונקציות בסקלר מעל R.

ד. $W=\left\{f:R\to R^{+}\right\}$ עם פעולת חיבור פונקציות וכפל פונקציות בסקלר מעל R.

2. יהי $V=R^{+}=\{x\in R\mid x>0\}$ ויהי $F=R$. נגדיר פעולות '+' ו- '•' כדלהלן:

$\forall x,y\in V\quad x'+'y=x\cdot y$ ו- $\forall x\in V,\alpha\in F\quad \alpha'\bullet'x=x^{\alpha}$.

א. הוכיחו כי V המוגדר לעיל עם פעולות חיבור וקטורים וכפל וקטור בסקלר שהוגדרו מעל R הינו מ"ו.

ב. נגדיר $W=\{x\in V\mid x\geq 1\}$. הוכיחו או הפריכו: W תת-מרחב של V .

ג. יהי $V=(R^{+})^{3}=\{(x,y,z)\in R^{3}\mid x,y,z>0\}$ ויהי $F=R$. נגדיר פעולות '+' ו- '•' כדלהלן:

$$\forall(x_1,y_1,z_1),(x_2,y_2,z_2)\in V\quad (x_1,y_1,z_1)'+'(x_2,y_2,z_2)=(x_1x_2,y_1y_2,z_1z_2)$$

ו- $\forall(x,y,z)\in V,\alpha\in F\quad \alpha'\bullet'(x,y,z)=(x^{\alpha},y^{\alpha},z^{\alpha})$.

נתון כי V עם הפעולות שהוגדרו הינו מ"ו מעל R.

האם הוקטורים $v_1=(1,2,1)$, $v_2=(2,1,3)$, $v_3=(1,2,3)$ ת"ל או בת"ל ב- V ?

<u>בהצלחה!</u>

פתרון תרגיל 5:

1. א.

$$W=\left\{A\in\mathbb{R}^{2\times2} \;\middle|\; A\begin{pmatrix}2&2\\3&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\right\}$$

נראה כי W תת-מרחב של $\mathbb{R}^{2\times2}$:

(1) $W\neq\emptyset$ כי:

$\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{2\times2}$ וגם $\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&2\\3&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$

$\Leftarrow$ $\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\in W$

(2) סגירות לחיבור:

יהיו $A,B\in W$ אזי

$$(A+B)\begin{pmatrix}2&2\\3&3\end{pmatrix}\underset{\text{דיסטריביוטיביות כפל מט'}}{=}\underbrace{A\begin{pmatrix}2&2\\3&3\end{pmatrix}}_{=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}}+\underbrace{B\begin{pmatrix}2&2\\3&3\end{pmatrix}}_{=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}}\underset{A,B\in W}{=}\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$$

כמו כן $A,B\in\mathbb{R}^{2\times2}$ גורר גם $A+B\in\mathbb{R}^{2\times2}$

$\Leftarrow$ $A+B\in W$

(3) סגירות לכפל בסקלר:

יהי $A\in W$ ו- $\alpha\in\mathbb{R}$ אזי:

$$(\alpha A)\cdot\begin{pmatrix}2&2\\3&3\end{pmatrix}\underset{\text{תכונות כפל מט'}}{=}\alpha\Big(\underbrace{A\begin{pmatrix}2&2\\3&3\end{pmatrix}}_{=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}}\Big)\underset{A\in W}{=}\alpha\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$$

כמו כן $A\in\mathbb{R}^{2\times2}$ גורר גם $\alpha A\in\mathbb{R}^{2\times2}$

$\Leftarrow$ $\alpha A\in W$

סה"כ קיבלנו W תת מרחב של $\mathbb{R}^{2\times2}$ $\Leftarrow$ W מ"ו.

ב.

$$W=\{p(x)\in\mathbb{R}[x] \mid \exists n\in\mathbb{N}\ \deg(p(x))=2n-1\}$$

$W=$ קבוצת הפולינומים הממשיים ממעלה אי-זוגית.

W אינו מ"ו כי אינו סגור לחיבור פולינומים:

יהיו $q(x)=-x^3+x^2$ ו- $p(x)=x^3+x^2$

אזי $\deg(p(x))=\deg(q(x))=3$ $\Leftarrow$ $p(x),q(x)\in W$

②

אבל $p(x)+q(x)=2x^2$

ומכאן $deg(p(x)+q(x))=2$

$\Leftarrow$ $p(x)+q(x)\notin W$.

(ג)

$W=\{f:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \mid \exists c\in\mathbb{R}\ \ \forall x\in\mathbb{R}\ f(x)=c\}$

W = קבו' הפונ' הממשיות הקבועות.

נראה כי W תת-מרחב של $V=\{f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\}$:

(1) $W\neq\emptyset$ כי פונ' האפס ($\forall x\in\mathbb{R}\ f(x)=0$) נמצאת באפס (עבור $c=0$).

(2) סגירות לחיבור:

יהיו $f,g\in W$

$\Leftarrow$ קיימים $c,d\in\mathbb{R}$ כך ש $\forall x\in\mathbb{R}\ f(x)=c,\ g(x)=d$.

$\Leftarrow$

$\forall x\in\mathbb{R}\ \ (f+g)(x)=f(x)+g(x)=c+d$

$\Leftarrow$ $\forall x\in\mathbb{R}\ (f+g)(x)=\underbrace{c+d}_{\text{קבוע}}$

$\Leftarrow$ $f+g\in W$.

(3) סגירות לכפל בסקלר:

יהיו $f\in W$ ו $\alpha\in\mathbb{R}$

$\Leftarrow$ קיים $c\in\mathbb{R}$ כך ש $\forall x\in\mathbb{R}\ \ f(x)=c$

$\Leftarrow$ $\forall x\in\mathbb{R}\ \ (\alpha f)(x)=\alpha\cdot f(x)=\underbrace{\alpha c}_{\text{קבוע}}$

$\Leftarrow$ $\alpha f\in W$.

מ.ש.ל. לכן W תת-מרחב של V וזהו מ"ו.

(ד)

$W=\{f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^+\}$

W תת-קבוצה של $V=\{f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\}$ (אך איננה סגורה לגבי אותו שדה).

תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ המוגדרת ע"י $\forall x\in\mathbb{R}\ f(x)=0$.

ידוע (מהגדרת המרחב) ש $0_V=f$.

אבל $f\notin W$ (כי $0\notin\mathbb{R}^+$) ולכן $0_V\notin W$ ולכן W איננו תת-מרחב

של V ולכן איננו מ"ו.

③

2. ג.

$$V=\mathbb{R}^+=\{x\in\mathbb{R}\mid x>0\}$$

$$\forall x,y\in V\ \alpha\in\mathbb{R}\qquad x\,'{+}'\,y=x\cdot y\ ,\quad \alpha\,'{\cdot}'\,x=x^\alpha$$

(א) נראה קיום תנאי מ"ו:

(1) סגירות לחיבור:

תכונות מס' ממשיים, הג' V

יהיו $x\cdot y>0 \Leftarrow x,y>0 \Leftarrow x,y\in V=\mathbb{R}^+$

הג' V $\qquad x'+'y\in V \Leftarrow xy\in V \Leftarrow$

$\Leftarrow$ V סגור לחיבור וקטורים.

(2) קומוטטיביות החיבור:

$$\forall x,y\in V\qquad x'+'y \underset{\text{הג' החיבור ב-}V}{=} x\cdot y \underset{\text{קומוטטיב' הכפל ב-}\mathbb{R}}{=} y\cdot x \underset{\text{הג' החיבור ב-}V}{=} y'+'x$$

(3) אסוציאטיביות החיבור:

$$\forall x,y,z\in V\qquad (x'+'y)'+'z \underset{\text{הג' החיבור ב-}V}{=} (x\cdot y)'+'z = (x\cdot y)\cdot z \underset{\text{אסוציאטיב' הכפל ב-}\mathbb{R}}{=}$$

$$= x\cdot(y\cdot z) = x\cdot(y'+'z) = x'+'(y'+'z)$$

הג' החיבור ב-V

(4) קיום איבר אדיש חיבורי:

$1>0 \Leftarrow 1\in V$ ומתקיים

$$\forall x\in V\qquad 1'+'x \underset{\text{הג' החיבור ב-}V}{=} 1\cdot x \underset{\text{1 אדיש כפלי ב-}\mathbb{R}}{=} x$$

$\Leftarrow \quad 0_v=1$

(5) קיום איבר נגדי:

$$\forall x\in V\quad \exists\ \tfrac{1}{x}\in V\qquad x'+'\tfrac{1}{x} \underset{\text{הג' החיבור ב-}V}{=} x\cdot\tfrac{1}{x}=1=0_v$$

$\boxed{\begin{array}{r}\text{ולכן גם } \frac{1}{x}>0 \\ x\in V \text{ גורר } x>0\end{array}}$

(6) סגירות לכפל בסקלר:

יהיו $x\in V=\mathbb{R}^+$ ו- $\alpha\in\mathbb{R}$ $\Leftarrow x>0 \Leftarrow x^\alpha>0$

$\Leftarrow \alpha'\cdot'x>0 \Leftarrow \alpha'\cdot'x\in V=\mathbb{R}^+ \Leftarrow$ V סגור לכפל בסקלר

(4)

(7) דיסטריבוטיביות הכפל בסקלר מעל החיבור ב-V:

$$\forall x,y\in V,\ \alpha\in\mathbb{R} \qquad \alpha\,'\cdot'\,(y\,'+'\,x) \underset{\text{הג' החיבור ב-V}}{=} \alpha\,'\cdot'\,(x\cdot y) \underset{\text{הג' כפל בסקלר ב-V}}{=} (xy)^{\alpha} =$$

$$\underset{\text{חוקי חזקות ב-IR}}{=} x^{\alpha}\cdot y^{\alpha} = (x^{\alpha})\,'+'\,(y^{\alpha}) = (\alpha\,'\cdot'\,x)\,'+'\,(\alpha\,'\cdot'\,y)$$

(8) דיסטריבוטיביות הכפל בסקלר מעל החיבור ב-F:

$$\forall x\in V,\ \alpha,\beta\in\mathbb{R} \qquad (\alpha+\beta)\,'\cdot'\,x \underset{\text{הג' כפל בסקלר ב-V}}{=} x^{\alpha+\beta} \underset{\text{חוקי חזקות ב-IR}}{=} x^{\alpha}\cdot x^{\beta} =$$

$$\underset{\text{הג' החיבור ב-V}}{=} (x^{\alpha})\,'+'\,(x^{\beta}) = (\alpha\,'\cdot'\,x)\,'+'\,(x\,'\cdot'\,\beta)$$

(9) אסוציאטיביות:

$$\forall x\in V,\ \alpha,\beta\in\mathbb{R} \qquad (\alpha\beta)\,'\cdot'\,x \underset{\text{הג' כפל בסקלר ב-V}}{=} x^{\alpha\beta} \underset{\text{חוקי חזקות ב-IR}}{=} (x^{\beta})^{\alpha} =$$

$$= \alpha\,'\cdot'\,(x^{\beta}) = \alpha\,'\cdot'\,(\beta\,'\cdot'\,x)$$

(10) צביון:

$$\forall x\in V \quad 1_{\mathbb{R}}\,'\cdot'\,x = 1\,'\cdot'\,x \underset{\text{הג' כפל בסקלר ב-IR}}{=} x^{1} = x$$

$\Leftarrow$ סה"כ קיבלנו V עם הפעולות המוגדרות הינו מ"ו מעל IR.

(ב.)

$$W = \{x\in V \mid x \geq 1\}$$

W אינו תת מרחב של V (עם הפעולות שהוגדרו על V) מעל IR

כי אינו סגור תחת כפל בסקלר:

$2\in W$! $-\frac{1}{2}\in\mathbb{R}$ אבל

$$-\tfrac{1}{2}\,'\cdot'\,2 = 2^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \notin W$$

כי $\frac{\sqrt{2}}{2} < 1$

③

ג. נבדוק ~~תלות לינארית של~~ הגדרה:

$$a(1,2,1)+b(2,1,3)+c(1,2,3)=(1,1,1)$$

שמו ♡ כי זהו איבר היחידה ב-V (בהתאם אל סעיף א')

לפי הג' כפל וקטור ב-V

$$\Longrightarrow (1^a,2^a,1^a)+(2^b,1^b,3^b)+(1^c,2^c,3^c)=(1,1,1)$$

לפי הג' החיבור ב-V

$$\Longrightarrow (1^a\cdot 2^b\cdot 1^c,\ 2^a\cdot 1^b\cdot 2^c,\ 1^a\cdot 3^b\cdot 3^c)=(1,1,1)$$

$1^x=1$ לכל $x\in\mathbb{R}$ וחוקי חזקות

$$\Longrightarrow (2^b,\ 2^{a+c},\ 3^{b+c})=(1,1,1)$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} 2^b=1 \\ 2^{a+c}=1 \\ 3^{b+c}=1 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} 2^b=2^0 \\ 2^{a+c}=2^0 \\ 3^{b+c}=3^0 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} b=0 \\ a+c=0 \\ b+c=0 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow a=b=c=0$$

$\Longrightarrow$ הוכחנו כנ"ל.

החוג למדעי המחשב – אלגברה לינארית , סמסטר א' תשס"ג

<u>תרגיל מס' 6</u>

<u>הגשה עד: 8.12.2002</u>

1. מצאו בסיס ומימד לכל אחד מן המרחבים הבאים (אין צורך להוכיח כי הם מרחבים):

א. $W = span\{1+2x-4x^2+3x^3, 3+2x^3, x^2, -2+x+3x^2+x^3\}$

ב. $V = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix} \in R^{3\times 2} \;\middle|\; b = 3c-d \,,\, c+d+e+f = 0 \right\}$

2. יהיו $U = \left\{ ax^3+bx^2+cx+d \;\middle|\; a,b,c,d \in R \quad \wedge \quad a = 2b-3d \right\}$
ו- $W = span\left\{ x^3+x^2-2 \,,\, -x^2+x+1 \right\}$ תתי-מרחבים של $R_3[x]$.
מצאו בסיס ומימד של $U, W, U+W, U \cap W$.

3. תרגיל זה הינו תרגיל המשך לתרגיל 3 ב- תרגיל 4:

יהי $V = R^n$ ויהיו:

$$W = \{(x_1,\dots,x_n) \in V \mid x_1 = x_2 = \dots = x_n\} \quad ; \quad U = \left\{ (x_1,\dots,x_n) \in V \;\middle|\; \sum_{i=1}^{n} x_i = 0 \right\}.$$

מצאו בסיס ומימד של $U+W, U \cap W$.

4. יהי V מ"ו ולו תתי מרחבים U,W. ידוע כי $\dim V = 9, \;\; \dim U = \dim W = 6, \;\; U \neq W$.
למה יכול להיות שווה $\dim(U \cap W)$?

5. הוכיחו או הפריכו: יהי V מ"ו כלשהוא ממימד אי-זוגי, אזי קיימים תתי מרחבים U,W של V כך שמתקיים $V = U \oplus W$ וגם dimU=dimW.

תזכורת: $V = U \oplus W \quad \Leftrightarrow \quad V = U+W \wedge U \cap W = \{0_v\}$

6. עבור $d \in R$ תהי הפונקציה $f : R^2 \to R_1[x]$ המוגדרת ע"י $f((a,b)) = a+b+d^2+1+ax$. האם קיים ערך d שעבורו f היא העתקה לינארית?

<u>בהצלחה!</u>

פתרון תרגיל מס' 6

1. **א.** $W = span\{1+2x-4x^2+3x^3,\ 3+2x^3,\ x^2,\ -2+x+3x^2+x^3\}$

נגדיר איזומורפיזם $f: \mathbb{R}_3[x] \to \mathbb{R}^4$ ע"י $f(ax^3+bx^2+cx+d)=(a,b,c,d)$.

נשתמש באיזומורפיזם זה ונמצא בסיס ל

$$W' = span\{f(1+2x-4x^2+3x^3),\ f(3+2x^3),\ f(x^2),\ f(-2+x+3x^2+x^3)\} =$$
$$= span\{(3,-4,2,1),(2,0,0,3),(0,1,0,0),(1,3,1,-2)\}$$

נשתמש בדירוג:

$$\begin{pmatrix} 3 & -4 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_2 \leftrightarrow R_3]{R_1 \leftrightarrow R_4} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 3 \\ 3 & -4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_4-3R_1 \to R_4]{R_3-2R_1 \to R_3}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & -2 & 7 \\ 0 & -13 & -1 & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_4+6R_2 \to R_4]{R_3+6R_2 \to R_3} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 7 \\ 0 & 0 & -1 & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_4-\frac{1}{2}R_3 \to R_4}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{7}{2} \end{pmatrix}$$

⇐ בסיס ל- W' הוא $\{(1,3,1,-2),(0,1,0,0),(0,0,-2,7),(0,0,0,\frac{7}{2})\}$

⇐ בסיס ל- W (לפי הפך האיזומורפיזם שהגדרנו) הינו
$$\{x^3+3x^2+x-2,\ x^2,\ -2x+7,\ \frac{7}{2}\}$$

ב.

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times2} \;\middle|\; b=3c-d\ ,\ c+d+e+f=0 \right\} =$$

②

$$= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 2} \;\middle|\; b = 3c-d \,,\; f = -c-d-e \right\} =$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} a & 3c-d \\ c & d \\ e & -c-d-e \end{pmatrix} \;\middle|\; a,c,d,e \in \mathbb{R} \right\}$$

נגדיר
$$S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \right\}$$

ונראה כי S בסיס ל-V.

(*) $S \subseteq V$ כי כל איברי S הינם איברים ב-V.

(*) נראה כי S בת"ל:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 + \frac{1}{3}R_2 \to R_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 1 & 0 & -\frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

קיים מדורג ללא שורת אפסים

(שמנו ♡ כי השתמשנו באיזומורפיזם $f: \mathbb{R}^{3\times 2} \to \mathbb{R}^6$ המוגדר ע"י $f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix} = (a,b,c,d,e,f)$).

$\Leftarrow$ S בת"ל.

(*) נראה כי $L(S)=V$:

תהי $\begin{pmatrix} a & 3c-d \\ c & d \\ e & -c-d-e \end{pmatrix} \in V$ כלשהי, אזי

$$\begin{pmatrix} a & 3c-d \\ c & d \\ e & -c-d-e \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + e\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$\Leftarrow$ $L(S)=V$

סה"כ קיבלנו S בסיס של V.

2.

* נמצא בסיס ומימד של U:

$$U=\{ax^3+bx^2+cx+d\in\mathbb{R}_3[x]\mid a=2b-3d\}=$$
$$=\{(2b-3d)x^3+bx^2+cx+d\mid b,c,d\in\mathbb{R}\}$$

לכן, בסיס של U הינו $\{2x^3+x^2,\ x,\ -3x^3+1\}$

ו- $\dim U=3$.

* נמצא בסיס ומימד של W:

$$W=\operatorname{span}\{x^3+x^2-2,\ -x^2+x+1\}$$

$$a(x^3+x^2-2)+b(-x^2+x+1)=0$$

$$\Rightarrow\begin{cases}a=0\\ a-b=0\\ b=0\\ -2a+b=0\end{cases}\Rightarrow\quad a=b=0$$

$\Leftarrow$ $\{x^3+x^2-2,\ -x^2+x+1\}$ קבוצה בת"ל ופורשת את W (לפי הגד' W)

ולכן זהו בסיס ל- W ו- $\dim W=2$.

* נמצא בסיס ומימד ל- $U+W$:

$$U+W=\operatorname{span}\{2x^3+x^2,\ x,\ -3x^3+1,\ x^3+x^2-2,\ -x^2+x+1\}$$

נשתמש באיזומורפיזם של שאלה 1 א' ולכן נמצא בסיס ומימד של

$$V=\operatorname{span}\{(2,1,0,0),(0,0,1,0),(-3,0,0,1),(1,1,0,-2),(0,-1,1,1)\}$$

נשתמש בדירוג מט':

$$\begin{pmatrix}1&1&0&-2\\0&-1&1&1\\0&0&1&0\\-3&0&0&1\\2&1&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow[R_5-2R_1\to R_5]{R_4+3R_1\to R_4}\begin{pmatrix}1&1&0&-2\\0&-1&1&1\\0&0&1&0\\0&3&0&-5\\0&-1&0&4\end{pmatrix}\xrightarrow[R_5-R_2\to R_5]{R_4+3R_2\to R_4}\begin{pmatrix}1&1&0&-2\\0&-1&1&1\\0&0&1&0\\0&0&3&-2\\0&0&-1&3\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[R_5+R_3\to R_5]{R_4-3R_3\to R_4}\begin{pmatrix}1&1&0&-2\\0&-1&1&1\\0&0&1&0\\0&0&0&-2\\0&0&0&3\end{pmatrix}\xrightarrow{R_5+\frac{3}{2}R_4\to R_5}\begin{pmatrix}1&1&0&-2\\0&-1&1&1\\0&0&1&0\\0&0&0&-2\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

⇐ בסיס ל-V הוא $\{(1,1,0,-2),(0,-1,1,1),(0,0,1,0),(0,0,0,-2)\}$

⇐ בסיס ל-U+W הוא $\{x^3+x^2-2,\ -x^2+x+1,\ x,\ -2\}$

$\dim(U+W)=4$!

לפסך האינוורינטים שהגדרנו

(*) נמצא בסיס ומימד ל- $U\cap W$:

$$U=\{ax^3+bx^2+cx+d \mid a=2b-3d\ ,\ a,b,c,d\in\mathbb{R}\}$$

$$W=\text{span}\{x^3+x^2-2,\ -x^2+x+1\}=$$
$$=\{a(x^3+x^2-2)+b(-x^2+x+1) \mid a,b\in\mathbb{R}\}=$$
$$=\{ax^3+(a-b)x^2+bx+(b-2a) \mid a,b\in\mathbb{R}\}=$$
$$=\{ax^3+bx^2+cx+d\in\mathbb{R}_3[x] \mid b=a-c\ ,\ d=c-2a\}$$

יהי $ax^3+bx^2+cx+d\in U\cap W$

⇐ $ax^3+bx^2+cx+d\in U$ וגם $ax^3+bx^2+cx+d\in W$

$\Downarrow$ $a=2b-3d$

$\Downarrow$ $b=a-c$ וגם $d=c-2a$

⇐
$$\begin{cases} a=2b-3d \\ b=a-c \\ d=c-2a \end{cases} \Longrightarrow b=\frac{-2a}{5},\ c=\frac{7a}{5},\ d=\frac{-3a}{5}$$

⇐
$$U\cap W=\{ax^3-\frac{2a}{5}x^2+\frac{7a}{5}x-\frac{3a}{5} \mid a\in\mathbb{R}\}=$$
$$=\{5ax^3-2ax^2+7ax-3a \mid a\in\mathbb{R}\}$$

⇐ בסיס ל- $U\cap W$ הוא $\{5x^3-2x^2+7x-3\}$! $\dim(U\cap W)=1$.

(3) נמצא בסיס ומימד ל- $U\cap W$:

יהי $(x_1,\dots,x_n)\in U\cap W$

⇐ $(x_1,\dots,x_n)\in U$ וגם $(x_1,\dots,x_n)\in W$

$\Downarrow$ $x_1+\dots+x_n=0$

$\Downarrow$ $x_1=\dots=x_n$

⇐ $x_1=\dots=x_n=0$

(5)

$\Leftarrow$ $\dim(U\cap W)=0$, $U\cap W=\{0_V\}$

בתרגיל 3 בקבוצה בין 4 ראינו כי $\dim W=1$

ו- $\dim U=n-1$.

לפי משפט:

$$\dim(U+W)=\underbrace{\dim U}_{n-1}+\underbrace{\dim W}_{1}-\underbrace{\dim(U\cap W)}_{0}=n$$

כלומר, $U+W\subseteq V=\mathbb{R}^n$ וגם $\dim(U+W)=\dim V=n$

$\Leftarrow$ $U+W=V$ ולכן בסיס ל- $U+W$ הינו

למשל הבסיס הסטנדרטי של $\mathbb{R}^n$: $\{(1,0,\dots,0),(0,1,0,\dots,0),\dots,(0,\dots,0,1)\}$.

(4.) לפי משפט:

$$\dim(U+W)=\underbrace{\dim U}_{6}+\underbrace{\dim W}_{6}-\dim(U\cap W)$$

נתון

$U+W\subseteq V$

ולכן $\dim(U+W)\le\dim V=9$.

כמו כן $U\neq W$ ולכן $6=\dim U=\dim W<\dim(U+W)$

ובסה"כ $7\le\dim(U+W)\le 9$

כלומר:

$$\dim(U\cap W)=\underbrace{\dim U}_{6}+\underbrace{\dim W}_{6}-\underbrace{\dim(U+W)}_{\ge 7,\ \le 9}$$

$\Leftarrow$ $3\le\dim(U\cap W)\le 5$

(5.) טענה:

יהי V מ"ו ממימד אי זוגי, אזי קיימים תת-מרחבים U,W של V כך ש-

$V=U\oplus W$ וגם $\dim U=\dim W$

הטענה אינה נכונה. נוכיח זאת:

יהי V מ"ו ממימד אי זוגי כלשהו.

נניח בשלילה שקיימים תת-מרחבים U,W של V כך ש- $V=U\oplus W$

וגם $\dim U=\dim W$.

①

כי $V=U\oplus W$ אזי $U\cap W=\{0_V\}$ ולכן $\dim(U\cap W)=0$.

ולכן לפי משפט:

$$\dim V \underset{\boxed{\substack{V=U\oplus W \text{ כי} \\ V=U+W \text{ אזי}}}}{=} \dim(U+W) = \dim U + \dim W - \underbrace{\dim(U\cap W)}_{0} = \dim U + \dim W \underset{\boxed{\dim U=\dim W \text{ לפי הנתון}}}{=} 2\dim U$$

סה"כ לכן
$$\underbrace{\dim V}_{\text{מס' אי זוגי לפי נתון}} = \underbrace{2\dim U}_{\text{מס' זוגי}}$$

סתירה!

לכן הטענה השאלה היא מטעה והטענה אינה נכונה (לא קיימים תת מרחבים U,W כנ"ל).

6.

$\mathbb{R}^2$ ו $\mathbb{R}_2[x]$ הינם מ"ו, f הינה פונקציה.

לכן יש לבדוק לינאריות חיבור וכפל בסקלר.

יהיו $(a,b),(c,e)$ ב $\mathbb{R}^2$ אזי:

$$f((a,b)+(c,e)) \underset{\boxed{\text{הג' חיבור ב } \mathbb{R}^2}}{=} f(a+c,b+e) \underset{\boxed{\text{הג' } f}}{=} (a+c)+(b+e)+d^2+1+(a+c)x$$

$$f(a,b)+f(c,e) = (a+b+d^2+1+ax)+(c+e+d^2+1+cx)$$

נדרוש לכן:

$$f((a,b)+(c,e)) = f(a,b)+f(c,e)$$

$$\Leftarrow \quad (a+c+b+e+d^2+1)+(a+c)x = (a+b+c+e+2d^2+2)+(a+c)x$$

$$\Leftarrow \quad \begin{cases} a+c+b+e+d^2+1 = a+b+c+e+2d^2+2 \\ a+c = a+c \end{cases}$$

$$\Leftarrow \quad d^2+1 = 2(d^2+1)$$

$$\Leftarrow \quad \cancel{d^2=-1} \quad \text{לא נכון!}$$

לכן לא קיים d עבורו f הינה העתקה לינארית.

תרגיל מס' 7

הגשה עד: 15.12.2002

1. תהי $f:R(2\times2)\to R_2[x]$ העתקה לינארית ונתון:

$$f\left(\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix}\right)=2x^2\ ,\quad f\left(\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix}\right)=2\ ,\quad f\left(\begin{pmatrix}1&1\\1&2\end{pmatrix}\right)=1+x+x^2\ ,\quad f\left(\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}\right)=1+x^2$$

א. חשבו $f\left(\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\right)$

ב. חשבו $\forall v\in R(2\times2)\quad f(v)$.

ג. מצאו בסיס ומימד ל- $\mathrm{Im}(f),\ker(f)$.

2. יהי V מ"ו מעל שדה F ויהי e בסיס כלשהוא ב-V. הוכיחו כי לכל $u,v\in V,\ \alpha\in F$ מתקיים:

א. $(\alpha u)_e=\alpha(u_e)$ ב. $(u+v)_e=(u_e)+(v_e)$

3. מצאו את וקטור הקואודינטות של $\begin{pmatrix}0&2\\-3&4\end{pmatrix}$ ביחס לבסיס

$$\left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\-2&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\2&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\3&-2\end{pmatrix}\right\}.$$

4. מצאו את מטריצת שינוי הבסיס מהבסיס $\{1+x+x^2,1+x,1\}$ לבסיס $\{1-2x+x^2,2x+x^2,x^2\}$.

5. יהי $T:R^3\to R^3$ אופרטור לינארי המוגדר ע"י $T(a,b,c)=(2a,c-2b,a+c)$.

יהי $W=\{(1,1,1),(1,1,0),(1,0,0)\}$ בסיס ב- R^3 . חשבו את T_W.

6. יהי $T:R_2[x]\to R_2[x]$ אופרטור לינארי וידוע כי $T(2x+1)=2x^2+1$, $T(x+2)=x^2-3x+2$, $T(x^2-x+2)=-5x+3$.

נתון כי $W=\{x^2,x^2-2x,x^2-x+2\}$ בסיס ב- $R_3[x]$. חשבו את T_W.

7. יהיו $V=\{v_1,v_2,v_3\}$, $V'=\{v_3,v_1,v_2\}$, $V''=\{v_1,v_1+v_2,v_1+v_2+v_3\}$

בסיסים במ"ו V ו- $T:V\to V$ אופרטור לינארי. נתון:

$$T_V=\begin{pmatrix}1&1&0\\2&3&1\\-1&0&-2\end{pmatrix}$$

חשבו: א. $T_{V'}$ ב. $T_{V''}$

נמקו היטב!!!

בהצלחה!

(1)

פתרון תרגיל 7

1. א.

$$\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}=a\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}1&1\\1&2\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix}+d\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix}$$

(שימו ♡ כי S עוד לא הוכחנו עבור בת"ל מאזן, לבינתיים אנחנו
ראינו ערכים הירוקים באגף ימין הם בסיס או לא)

$$\Rightarrow \begin{cases}1=a+b+d\\0=a+b\\0=b+c+d\\0=2b+c\end{cases}\Longrightarrow a=-1,\ b=1,\ C=-2,\ d=1$$

ולכן:

$$f\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}=f\left(-\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&1\\1&2\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix}\right)=$$

$$\underset{f\text{ ה"ל}}{=}-f\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}+f\begin{pmatrix}1&1\\1&2\end{pmatrix}-2f\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix}+f\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix}=$$

$$\underset{\text{נתון}}{=}-(1+x^2)+(1+x+x^2)-2(2)+(2x^2)=2x^2+x-4$$

ב. נראה כי $S=\left\{\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&1\\1&2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix}\right\}$
בסיס ל- $\mathbb{R}^{2\times2}$:

נשתמש באיזומורפיזם $f:\mathbb{R}^{2\times2}\to\mathbb{R}^4$ המוגדר ע"י $f\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}=(a,b,c,d)$.

עכשיו נראה כי S בת"ל:

$$\begin{pmatrix}1&1&0&0\\1&1&1&2\\0&0&1&1\\1&0&1&0\end{pmatrix}\xrightarrow[R_4-R_1\to R_4]{R_2-R_1\to R_2}\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&0&1&2\\0&0&1&1\\0&-1&1&0\end{pmatrix}\xrightarrow{R_4\leftrightarrow R_2}\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&-1&1&0\\0&0&1&1\\0&0&1&2\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_4-R_3\to R_4}\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&-1&1&0\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

קיבלנו מדורגת ללא שורת אפסים ולכן
S בת"ל. S בת"ל ו- $\dim\mathbb{R}^{2\times2}=|S|=4$,
כלומר S קבוצה בת"ל מקסימלית ב- $\mathbb{R}^{2\times2}$
ולכן בסיס ל- $\mathbb{R}^{2\times2}$.

(2)

תהי $\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{2\times2}$ כלשהי. נייצג אותה כצ"ל של איברי הבסיס S:

$$\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}=\alpha\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}1&1\\1&2\end{pmatrix}+\gamma\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix}+\delta\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}a=\alpha+\beta+\delta\\ b=\alpha+\beta\\ c=\beta+\gamma+\delta\\ d=2\beta+\gamma\end{cases}\Longrightarrow\quad \begin{matrix}\alpha=-a+2b+c-d,\ \beta=a-b-c+d\\ \gamma=-2a+2b+2c-d,\ \delta=a-b\end{matrix}$$

לכן:

$$f\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}=f\Big((-a+2b+c-d)\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}+(a-b-c+d)\begin{pmatrix}1&1\\1&2\end{pmatrix}+(-2a+2b+2c-d)\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix}+(a-b)\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix}\Big)=$$

$$\overset{\text{ה"ל } f}{=}(-a+2b+c-d)\cdot f\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}+(a-b-c+d)\cdot f\begin{pmatrix}1&1\\1&2\end{pmatrix}+(-2a+2b+2c-d)\cdot f\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix}+(a-b)\cdot f\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix}=$$

$$\overset{\text{נתון}}{=}(-a+2b+c-d)(1+x^2)+(a-b-c+d)(1+x+x^2)+(-2a+2b+2c-d)(2)+(a-b)(2x^2)=$$

$$=(2a-b)x^2+(a-b-c+d)x+(-4a+5b+4c-2d)$$

סה"כ:

$$\forall\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{2\times2}\quad f\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}=(2a-b)x^2+(a-b-c+d)x+(-4a+5b+4c-2d)$$

ג) נמצא בסיס ומימד של $\ker f$:

יהי $\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\in\ker f$ אזי:

$$f\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}=(2a-b)x^2+(a-b-c+d)x+(-4a+5b+4c-2d)=0$$

$$\Rightarrow\begin{cases}2a-b=0\\ a-b-c+d=0\\ -4a+5b+4c-2d=0\end{cases}\Longrightarrow b=2a,\ c=-2a,\ d=-a$$

③

לכן:

$$\ker f=\left\{\begin{pmatrix} a & 2a \\ -2a & -a\end{pmatrix} \,\middle|\, a\in\mathbb{R}\right\}$$

לכן בסיס של $\ker f$ הוא $\left\{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -1\end{pmatrix}\right\}$ ו- $\dim(\ker f)=1$.

נמצא בסיס ומימד של $\operatorname{Im} f$:

ראינו בסעיף קודם כי S בסיס ל- $\mathbb{R}^{2\times 2}$, לכן לפי משפט מהתרגול התמונה נפרשת ע"י התמונות של איברי S, כלומר,

$$\operatorname{Im} f=\operatorname{span}\{1+x^2,\ 1+x+x^2,\ 2,\ 2x^2\}$$

נשתמש באיזומורפיזם $f:\mathbb{R}_2[x]\to\mathbb{R}^3$ המוגדר ע"י $f(ax^2+bx+c)=(a,b,c)$ על מנת למצוא בסיס ל- $\operatorname{Im} f$

בעזרת דירוג מט':

$$\begin{array}{r} 1+x^2 \cdots \\ 1+x+x^2 \cdots \\ 2 \cdots \\ 2x^2 \cdots \end{array}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_4-2R_1\to R_4]{R_2-R_1\to R_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_4+R_3\to R_4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

לכן (ע"י חזרה בעזרת אותו איזומורפיזם) בסיס של $\operatorname{Im} f$ הוא $\{x^2+1,\ x,\ 2\}$ ו- $\dim(\operatorname{Im} f)=3$.

2. א) יהי V מ"ו מעל שדה F ויהי $e=\{e_1,e_2,\dots,e_n\}$ בסיס של V.

יהי $u\in V$ כלשהו, אזי קיימים סקלרים $\beta_1,\dots,\beta_n\in F$ כך ש $u=\beta_1e_1+\beta_2e_2+\dots+\beta_ne_n$ ⊛ (כיוון ש-e בסיס של V, כל וקטור ב-V, כמו u, ניתן להצגה כצירוף של איברי e).

לכן:

$$(\alpha u)_e \underset{\text{לפי ⊛}}{=} \left(\alpha(\beta_1e_1+\dots+\beta_ne_n)\right)_e \underset{\text{דיסטריביוטיביות } V \text{ (מ"ו - נתון)}}{=} \left(\alpha(\beta_1e_1)+\alpha(\beta_2e_2)+\dots+\alpha(\beta_ne_n)\right)_e =$$

9

$$\underset{\text{אסוציאטיביות כפל סקלר ב-}V}{=} \left((\alpha\beta_1)e_1 + (\alpha\beta_2)e_2 + \dots + (\alpha\beta_n)e_n\right)_e =$$

$$\underset{\text{הגדרת וקטור קואורדינטות}}{=} \begin{pmatrix} \alpha\beta_1 \\ \alpha\beta_2 \\ \vdots \\ \alpha\beta_n \end{pmatrix} \underset{\text{תכונות וקטורים}}{=} \alpha \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}$$

$$= \alpha\left(\beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 + \dots + \beta_n e_n\right)_e \overset{\text{לפי } (*)}{=} \alpha(u_e)$$

מש"ל.

(ב) יהי V מ"ו מעל שדה F ויהי $e=\{e_1,\dots,e_n\}$ בסיס של V.

יהיו $u,v\in V$. אזי קיימים סקלרים $\alpha_1,\dots,\alpha_n,\beta_1,\dots,\beta_n\in F$

כך ש- e: $u=\alpha_1e_1+\dots+\alpha_ne_n$ ו- $v=\beta_1e_1+\dots+\beta_ne_n$. (*)

מתקיים:

$$(u+v)_e \overset{\text{לפי } (*)}{=} \left((\alpha_1e_1+\dots+\alpha_ne_n)+(\beta_1e_1+\dots+\beta_ne_n)\right)_e =$$

$$\underset{\boxed{\text{קומוטטיביות ואסוציאטיביות של } V \text{ כמ"ו}}}{=} \left((\alpha_1+\beta_1)e_1+\dots+(\alpha_n+\beta_n)e_n\right)_e =$$

$$\underset{\text{הגדרת וקטור קואורדינטות}}{=} \begin{pmatrix} \alpha_1+\beta_1 \\ \alpha_2+\beta_2 \\ \vdots \\ \alpha_n+\beta_n \end{pmatrix} \underset{\text{תכונות וקטורים}}{=} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} =$$

$$= (\alpha_1e_1+\dots+\alpha_ne_n)_e + (\beta_1e_1+\dots+\beta_ne_n)_e =$$

$$\underset{\text{לפי } (*)}{=} (u_e)+(v_e)$$

מש"ל.

(3)

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 0 = a \\ 2 = b+c \\ -3 = -2b+2c+3d \\ 4 = b+c-2d \end{cases} \Longrightarrow a=0,\ b=1,\ c=1,\ d=-1$$

⑤ לכן אם $V=\begin{pmatrix}0&2\\-3&4\end{pmatrix}$ ו- $e=\left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\-2&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\2&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\3&-2\end{pmatrix}\right\}$

אזי $V_e=\begin{pmatrix}0\\1\\1\\-1\end{pmatrix}$.

4. נגדיר $e=\{1+x+x^2,\ 1+x,\ 1\}$ ו- $f=\{1-2x+x^2,\ 2x+x^2,\ x^2\}$.

$$1-2x+x^2 = 1\cdot(1+x+x^2) - 3\cdot(1+x) + 3\cdot(1)$$
$$2x+x^2 = 1\cdot(1+x+x^2) + 1\cdot(1+x) - 2(1)$$
$$x^2 = 1\cdot(1+x+x^2) - 1\cdot(1+x) + 0\cdot(1)$$

לכן $P=\begin{pmatrix}1&1&1\\-3&1&-1\\3&-2&0\end{pmatrix}$ היא מטריצת המעבר מ-e ל-f.

5.

$$T(1,1,1)=(2,-1,2) = 2\cdot(1,1,1) - 3(1,1,0) + 3\cdot(1,0,0)$$
$$T(1,1,0)=(2,-2,1) = 1\cdot(1,1,1) - 3\cdot(1,1,0) + 4\cdot(1,0,0)$$
$$T(1,0,0)=(2,0,1) = 1\cdot(1,1,1) - 1\cdot(1,1,0) + 2\cdot(1,0,0)$$

$$\Longrightarrow\quad T_W=\begin{pmatrix}2&1&1\\-3&-3&-1\\3&4&2\end{pmatrix}$$

6. נחשב ראשית את התמונות של איברי הבסיס W באמצעות הנתונים.

$\{x^2-x+2,\ x+2,\ 2x+1\}$ אכן בסיס ל-W (בדיקה!), ולכן איברי W ניתנים להצגה כצ"ל של איברי בסיס זה.

עבור x^2:

$$T(x^2)=T\left(1\cdot(x^2-x+2) - \tfrac{5}{3}(x+2) + \tfrac{4}{3}(2x+1)\right) =$$

כי T ה"ל $=\ T(x^2-x+2) - \tfrac{5}{3}T(x+2) + \tfrac{4}{3}T(2x+1) =$

נתון $=\ -5x+3 - \tfrac{5}{3}(x^2-3x+2) + \tfrac{4}{3}(2x^2+1) = x^2+1$

עבור x^2-2x:

$$T(x^2-2x)=T\left(1\cdot(x^2-x+2) - 1\cdot(x+2) + 0\cdot(2x+1)\right) =$$

כי T ה"ל $=\ T(x^2-x+2) - T(x+2) =$

נתון $=\ (-5x+3) - (x^2-3x+2) = -x^2-2x+1$

עבור x^2-x+2:

$T(x^2-x+2) = -5x+3$

נתון

⑥

כעת, נחשב את T_W:

$$T(x^2) = x^2+1 = \frac{3}{4}\cdot(x^2) - \frac{1}{4}\cdot(x^2-2x) + \frac{1}{2}\cdot(x^2-x+2)$$
$$T(x^2-2x) = -x^2-2x+1 = -\frac{9}{4}(x^2) + \frac{3}{4}(x^2-2x) + \frac{1}{2}\cdot(x^2-x+2)$$
$$T(x^2-x+2) = -5x+3 = -\frac{13}{4}(x^2) + \frac{7}{4}(x^2-2x) + \frac{3}{2}(x^2-x+2)$$

$$\Longrightarrow \quad T_W = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{9}{4} & -\frac{13}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & \frac{7}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

(7.

$$T_V = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

עכשיו (לפי הג' מט' מייצגת בבסיס $V=\{v_1,v_2,v_3\}$):

$$T(v_1) = 1\cdot v_1 + 2\cdot v_2 + (-1)\cdot v_3$$
$$T(v_2) = 1\cdot v_1 + 3\cdot v_2 + 0\cdot v_3 \qquad (*)$$
$$T(v_3) = 0\cdot v_1 + 1\cdot v_2 + (-2)\cdot v_3$$

א.

$$T(v_3) = 0\cdot v_1 + 1\cdot v_2 - 2v_3 = (-2)v_3 + (0)\cdot v_1 + (1)\cdot v_2$$
$$T(v_1) = v_1 + 2v_2 - v_3 = (-1)v_3 + (1)\cdot v_1 + (2)\cdot v_2$$
$$T(v_2) = v_1 + 3v_2 + 0\cdot v_3 = (0)\cdot v_3 + (1)\cdot v_1 + (3)\cdot v_2$$

לפי (*)

התאמה לסדר האיברים ב- V'

$$\Longrightarrow \quad T_{V'} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

ב.

$$T(v_1) \underset{\text{לפי }(*)}{=} v_1 + 2v_2 - v_3 = (-1)\cdot(v_1) + (3)(v_1+v_2)\ (-1)\cdot(v_1+v_2+v_3)$$

$$T(v_1+v_2) \underset{T\text{ ה"ל}}{=} T(v_1) + T(v_2) \underset{\text{לפי }(*)}{=} (v_1+2v_2-v_3) + (v_1+3v_2) = 2v_1+5v_2-v_3 =$$
$$= (-3)(v_1) + (6)(v_1+v_2)\ (-1)\cdot(v_1+v_2+v_3)$$

$$T(v_1+v_2+v_3) = T(v_1) + T(v_2) + T(v_3) = (v_1+2v_2-v_3) + (v_1+3v_2) + (v_2-2v_3) =$$
$$= 2v_1 + 6v_2 - 3v_3 \quad (-4)\cdot(v_1) + (9)\cdot(v_1+v_2)\ (-3)\cdot(v_1+v_2+v_3)$$

ז

סה"כ קבלנו:

$$T_{v''} = \begin{pmatrix} -1 & -3 & -4 \\ 3 & 6 & 9 \\ -1 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

תרגיל מס' 8

הגשה עד: 24.12.2002, 10:00

1. תהי $T: R^{2\times 2} \to R_2[x]$ העתקה לינארית המוגדרת ע"י $T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (a-2d)x^2 + (b-c+d)x + (a-2c-b)$. יהיו $U = \{-x\ ,\ x^2-1\ ,\ x+2\}$ ו- $W = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \right\}$ בסיסים של $R_2[x]$ ו- $R^{2\times 2}$ בהתאמה.
חשבו את T_W^U.

2. חשבו את הדטרמיננטים הבאים:

א. $$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

ב. $$\begin{vmatrix} \sin^2\alpha & \sin^2\beta & \sin^2\gamma \\ \cos^2\alpha & \cos^2\beta & \cos^2\gamma \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$ (עבור α, β, γ כלשהן)

ג. $$\begin{vmatrix} 1 & n & n & \dots & n \\ n & 2 & n & \dots & n \\ n & n & 3 & \dots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n & n & n & \dots & n \end{vmatrix}$$ (דטמיננט מסדר n)

3. נתונה המטריצה:

$$\begin{pmatrix} a-6 & 0 & 0 & -8 \\ 5 & a-4 & 0 & 12 \\ -1 & 3 & a-2 & -6 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

קבעו עבור אילו ערכי a המטריצה הפיכה.

4. קבעו עבור אילו ערכי n המטריצה $\begin{pmatrix} n & 1 & 1 \\ 1 & n & 1 \\ 1 & 1 & n \end{pmatrix}$ הפיכה. חשבו את המטריצה ההופכית עבור $n = 2$.

5. הוכיחו או הפריכו: אם A מטריצה ריבועית אנטי סימטרית מסדר n ו- n אי-זוגי אזי $|A| = 0$.

תזכורת: מטריצה ריבועית A היא סימטרית אם $A^t = A$.
מטריצה ריבועית A היא אנטי סימטרית אם $A^t = -A$.

6. נתון $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 2$. חשבו $\begin{vmatrix} a_1 - 3c_1 & a_3 - 3c_3 & a_2 - 3c_2 \\ a_1 + b_1 & a_3 + b_3 & a_2 + b_2 \\ a_1 & a_3 & a_2 \end{vmatrix}$.

7. פתרו את מערכת המשוואות הבאה ע"י שימוש בכלל קרמר:

$$\begin{cases} 3x + 4y - z = 7 \\ x - 2y + 4z = 0 \\ 3x - y + z = -1 \end{cases}$$

בהצלחה!

1

פתרון תרגיל 8

1.

$$T\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & 0\end{pmatrix} = x^2+3x+1 = -2\cdot(-x) + 1\cdot(x^2-1) + 1\cdot(x+2)$$

$$T\begin{pmatrix}-1 & 2\\ -1 & 3\end{pmatrix} = -7x^2+6x-1 = -10\cdot(-x) -7\cdot(x^2-1) -4\cdot(x+2)$$

$$T\begin{pmatrix}-2 & -1\\ 1 & 3\end{pmatrix} = -8x^2+x-3 = -\frac{13}{2}\cdot(-x) -8\cdot(x^2-1) -\frac{11}{2}\cdot(x+2)$$

$$T\begin{pmatrix}4 & -1\\ 1 & 2\end{pmatrix} = 3 = \frac{3}{2}\cdot(-x) + 0\cdot(x^2-1) + \frac{3}{2}\cdot(x+2)$$

$$\Longrightarrow T_W^{\,4} = \begin{pmatrix}-2 & -10 & -\frac{13}{2} & \frac{3}{2}\\ 1 & -7 & -8 & 0\\ 1 & -4 & -\frac{11}{2} & \frac{3}{2}\end{pmatrix}$$

2. א.

$$\begin{vmatrix}1 & -1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & -1 & -1\\ 1 & 1 & -1 & -1\\ 1 & 1 & 1 & -1\end{vmatrix} \underset{\substack{R_2-R_1\to R_2\\ R_3-R_1\to R_3\\ R_4-R_1\to R_4}}{=} \begin{vmatrix}1 & -1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & -2 & -2\\ 0 & 2 & -2 & -2\\ 0 & 2 & 0 & -2\end{vmatrix} \underset{\text{פיתוח לפי } C_1}{=}$$

$$= \begin{vmatrix}0 & -2 & -2\\ 2 & -2 & -2\\ 2 & 0 & -2\end{vmatrix} \underset{R_2-R_3\to R_2}{=} \begin{vmatrix}0 & -2 & -2\\ 0 & -2 & 0\\ 2 & 0 & -2\end{vmatrix} \underset{\text{פיתוח לפי } C_1}{=}$$

$$= 2\cdot\begin{vmatrix}-2 & -2\\ -2 & 0\end{vmatrix} = 2\left(-2\cdot 0-(-2)(-2)\right) = -8$$

ב.

$$\begin{vmatrix}\sin^2\alpha & \sin^2\beta & \sin^2\gamma\\ \cos^2\alpha & \cos^2\beta & \cos^2\gamma\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix} \underset{\substack{R_2+R_1\to R_2\\ \boxed{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1}}}{=} \begin{vmatrix}\sin^2\alpha & \sin^2\beta & \sin^2\gamma\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix} = 0$$

דטרמיננט

של מט' עם שתי שורות זהות

שווה לאפס (תכונות דטרמיננט).

②

.2

$$\begin{vmatrix} 1 & n & n & \cdots & n \\ n & 2 & n & \cdots & n \\ n & n & 3 & \cdots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ n & n & n & \cdots & n \end{vmatrix} \underset{\substack{R_i - R_n \to R_i \\ 1 \le i \le n-1 \text{ לכל}}}{=} \begin{vmatrix} 1-n & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 2-n & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 3-n & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ n & n & n & \cdots & n \end{vmatrix} =$$

דט' של מט' משולשת תחתונה שווה למכפלת איברי האלכסון הראשי

$$= (1-n)(2-n)(3-n)\cdot\ldots\cdot n = (-1)^{n-1}\cdot n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-(n-1)) =$$

$$= (-1)^{n-1}\cdot n!$$

.3

$$|A| = \begin{vmatrix} a-6 & 0 & 0 & -8 \\ 5 & a-4 & 0 & 12 \\ -1 & 3 & a-2 & -6 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 & 1 \end{vmatrix} \underset{C_3 - C_4 \to C_3}{\overset{C_2 + \frac{1}{2}C_4 \to C_2}{=}} \begin{vmatrix} a-6 & -4 & 8 & -8 \\ 5 & a+2 & -12 & 12 \\ -1 & 0 & a+4 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

פיתוח לפי R_4

$$= \begin{vmatrix} a-6 & -4 & 8 \\ 5 & a+2 & -12 \\ -1 & 0 & a+4 \end{vmatrix} \overset{C_4 + (a+4)C_1 \to C_4}{=} \begin{vmatrix} a-6 & -4 & a^2-2a-16 \\ 5 & a+2 & 5a+8 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} =$$

פיתוח לפי R_3

$$= -\begin{vmatrix} -4 & a^2-2a-16 \\ a+2 & 5a+8 \end{vmatrix} = -\left(-4(5a+8) - (a+2)(a^2-2a-16)\right) =$$

$$= \underline{\underline{20a}} + 32 + \underline{a^3} - \cancel{2a^2} \underline{\underline{-16a}} + \cancel{2a^2} - \underline{\underline{4a}} - 32 = a^3$$

A הפיכה אמ"ם $|A| = a^3 \neq 0$

$\Leftarrow$ A הפיכה אמ"ם $a \neq 0$.

.4

$$|A| = \begin{vmatrix} n & 1 & 1 \\ 1 & n & 1 \\ 1 & 1 & n \end{vmatrix} \underset{R_1 - nR_3 \to R_1}{\overset{R_2 - R_3 \to R_2}{=}} \begin{vmatrix} 0 & 1-n & 1-n^2 \\ 0 & n-1 & 1-n \\ 1 & 1 & n \end{vmatrix} =$$

פיתוח לפי C_1

$$= \begin{vmatrix} 1-n & 1-n^2 \\ n-1 & 1-n \end{vmatrix} = (1-n)^2 - (n-1)(1-n^2) = (1-n)^2 + (1-n)^2(1+n) =$$

$$= (1-n)^2(2+n) = 0 \Rightarrow n=1 \text{ או } n=-2$$

$\Leftarrow$ A הפיכה אמ"ם $|A| \neq 0$ אמ"ם $n \neq 1,-2$

3

נחשב את A^{-1} עבור $n=2$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[2R_3 \to R_3]{2R_2 \to R_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 4 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3 - R_1 \to R_3]{R_2 - R_1 \to R_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & 0 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3 \cdot 3 \to R_3]{R_1 \cdot 3 \to R_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 6 & 3 & 3 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 9 & -3 & 0 & 6 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3 - R_2 \to R_3]{R_1 - R_2 \to R_1}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 6 & 0 & 2 & 4 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & -2 & -2 & 6 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{2R_1 \to R_1 \\ 4R_2 \to R_2}]{R_4 \cdot \frac{1}{2} \to R_4} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 12 & 0 & 4 & 8 & -4 & 0 \\ 0 & 12 & 4 & -4 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -1 & -1 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow[R_2 - R_3 \to R_3]{R_1 - R_3 \to R_1}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 12 & 0 & 0 & 9 & -3 & -3 \\ 0 & 12 & 0 & -3 & 9 & -3 \\ 0 & 0 & 4 & -1 & -1 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{\frac{1}{12}R_2 \to R_2 \\ \frac{1}{4}R_3 \to R_3}]{\frac{1}{12}R_1 \to R_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{array}\right)$$

$$\Leftarrow \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$$

5. הטענה נכונה. הוכחה:

תהי A מט' ריבועית מסדר n אי זוגי כך ש A אנטי סימטרית.

אזי:

$$|A| \underset{\text{תכונת דטרמיננטה}}{=} |A^t| \underset{\text{A אנטי סימטרית}}{=} |-A| \underset{\text{תכונת דטרמיננטה}}{=} (-1)^n |A| \underset{\text{n אי זוגי}}{=} -|A|$$

קיבלנו ש $|A| = -|A|$

$\Leftarrow \quad 2 \cdot |A| = 0$

$\Leftarrow \quad |A| = 0$.

מש"ל.

ד .6

$$\begin{vmatrix} a_1-3c_1 & a_3-3c_3 & a_2-3c_2 \\ a_1+b_1 & a_3+b_3 & a_2+b_2 \\ a_1 & a_3 & a_2 \end{vmatrix} \underset{R_2-R_3\to R_2}{\overset{R_1-R_3\to R_1}{=}}$$

$$= \begin{vmatrix} -3c_1 & -3c_3 & -3c_2 \\ b_1 & b_3 & b_2 \\ a_1 & a_3 & a_2 \end{vmatrix} \underset{\text{לינארי } C_3}{=} -3\cdot\begin{vmatrix} c_1 & c_3 & c_2 \\ b_1 & b_3 & b_2 \\ a_1 & a_3 & a_2 \end{vmatrix} \underset{\substack{\text{לינארי } C_3 \\ (|A|=|A^t|)}}{=}$$

$$= -3\cdot\begin{vmatrix} c_1 & b_1 & a_1 \\ c_3 & b_3 & a_3 \\ c_2 & b_2 & a_2 \end{vmatrix} \overset{C_1\leftrightarrow C_3}{=} 3\cdot\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} =$$

$$\underset{R_2\leftrightarrow R_3}{=} -3\cdot\underbrace{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}_{=2} \underset{\text{נתון}}{=} -3\cdot 2=-6$$

תרגיל מס' 9

הגשה עד: 29.12.2002

1. לכל זוג מטריצות קבעו האם הן דומות או לא:

א. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ב. $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 8 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

ג. $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 7 & 3 \\ 1 & 3 & 7 & 5 \\ 1 & 1 & 7 & 0 \\ 6 & 8 & 9 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 7 & 6 & 5 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

2. תהיינה A,B מטריצות ריבועיות מסדר n. הוכיחו או הפריכו:
אם A הפיכה אזי לכל B המטריצות AB ו- BA דומות.

3. עבור כל אחת מן המטריצות הבאות מצאו פ"א, ע"ע, ו"ע ומ"ע מתאימים ומטריצה הפיכה P ומטריצה אלכסונית D כך ש- $D = P^{-1}AP$:

א. $A = \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ ב. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

4. נתון כי λ הינו ע"ע של A , מטריצה ריבועית מסדר n. הוכיחו כי $m\lambda$ הינו ע"ע של המטריצה mA עבור סקלר כלשהוא m.

6. חשבו A^{20} עבור $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

בהצלחה!

1

פתרון תרגיל 9

1.

א.

$$A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=I\ ,\quad B=\begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&2\\0&0&1\end{pmatrix}$$

אין $A\sim B$ כי $A=I$ והמט' היחידה הדומה ל-I היא I (ראו הוכחה בדפי הסיכום תרגול מס' 9).

ב.

$$A=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}\ ,\quad B=\begin{pmatrix}2&0\\8&3\end{pmatrix}$$

אין $A\sim B$ כי $|A|=-2\neq 6=|B|$

ג.

$$A=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\5&6&7&8\\8&7&6&5\\4&3&2&1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}2&3&7&3\\1&3&7&5\\1&1&7&0\\6&8&9&3\end{pmatrix}$$

אין $A\sim B$ כי $tr(A)=14\neq 15=tr(B)$

2. הטענה נכונה. הוכחה:

תהי A מט' ריבועית הפיכה מסדר n ותהי B מט' ריבועית כלשהי.

A הפיכה ולכן קיימת A^{-1} ומתקיים:

$$BA=\underset{\text{אסוציאטיביות כפל מט'}}{I\cdot BA\cdot I}=(A^{-1}A)(BA)(A^{-1}A)=A^{-1}(AB)(AA^{-1})A=$$

$$=A^{-1}(AB)\cdot I\cdot A=A^{-1}(AB)\cdot A$$

$\Leftarrow$ $BA\sim AB$ (עבור $P=A$ הפיכה).

מש"ל.

3. א.

$$A=\begin{pmatrix}2&-6\\0&-1\end{pmatrix}$$

2

(*) נמצא פ"א של A:

$$\Delta_A(\lambda)=|A-\lambda I|=\begin{vmatrix} 2-\lambda & -6 \\ 0 & -1-\lambda \end{vmatrix}=(2-\lambda)(-1-\lambda)=-2+\lambda-2\lambda+\lambda^2=$$
$$=\lambda^2-\lambda-2$$

(*) ע"ע של A הם שורשי הפ"א של A:

$$\Delta_A(\lambda)=(2-\lambda)(-1-\lambda)=0 \Rightarrow \lambda_1=2\ ,\ \lambda_2=-1$$

⇐ ע"ע של A הם $\lambda_1=2$ ו- $\lambda_2=-1$.

(*) נמצא ו"ע ומ"ע המתאים לע"ע שמצאנו:

(**) עבור ערך עצמי $\lambda_1=2$:

$$\begin{pmatrix} 0 & -6 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -6y=0 \\ -3y=0 \end{cases} \Rightarrow y=0$$

⇐ פ. למערכת הינו מהצורה $(x,0)$.

⇐ מ"ע המתאים לע"ע $\lambda_1=2$ הוא $\{(x,0)|x\in\mathbb{R}\}=span\{(1,0)\}$

⇐ ו"ע " " " " $(1,0)$.

(**) עבור ע"ע $\lambda_2=-1$:

$$\begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow 3x-6y=0 \Rightarrow x=2y$$

⇐ פ. למערכת הינו מהצורה $(2y,y)$.

⇐ מ"ע המתאים לע"ע $\lambda_2=-1$ הוא $\{(2y,y)|y\in\mathbb{R}\}=span\{(2,1)\}$

⇐ ו"ע " " " " " $(2,1)$.

סה"כ A לכסינה!:

$$D=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\ ,\ P=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

מתקיים $D=P^{-1}AP$.

(ב)

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

③

(*) נמצא פ"א של A:

$$P_A(\lambda)=|A-\lambda I|=\begin{vmatrix}1-\lambda & 0 & 1\\ 0 & 1-\lambda & 0\\ 1 & 0 & 1-\lambda\end{vmatrix} \underset{\substack{\text{פיתוח}\\ \text{לפי } R_2}}{=} (1-\lambda)\begin{vmatrix}1-\lambda & 1\\ 1 & 1-\lambda\end{vmatrix}=$$

$$=(1-\lambda)\left[(1-\lambda)^2-1\right]=(1-\lambda)(\lambda^2-2\lambda)=\lambda(1-\lambda)(\lambda-2)$$

(*) $P_A(\lambda)=0 \Rightarrow \lambda_1=0,\ \lambda_2=1,\ \lambda_3=2$

$\Leftarrow$ ע"ע של A הם $\lambda_1=0,\ \lambda_2=1,\ \lambda_3=2$.

(*) נמצא ו"ע ומ"ע מתאימים לע"ע שמצאנו:

(-) עבור ע"ע $\lambda_1=0$:

$$\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases}x+z=0\\ y=0\end{cases} \Longrightarrow x=-z,\ y=0$$

$\Leftarrow$ פ. למערכת היא מן הצורה $(-z,0,z)$

$\Leftarrow$ מ"ע המתאים לע"ע $\lambda_1=0$ הוא $\{(-z,0,z)\mid z\in\mathbb{R}\}=span\{(-1,0,1)\}$

$\Leftarrow$ ו"ע " " " " $(-1,0,1)$.

(-) עבור ע"ע $\lambda_2=1$:

$$\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \Longrightarrow x=z=0$$

$\Leftarrow$ פ. למערכת היא מן הצורה $(0,y,0)$.

$\Leftarrow$ מ"ע המתאים לע"ע $\lambda_2=1$ הוא $\{(0,y,0)\mid y\in\mathbb{R}\}=span\{(0,1,0)\}$

$\Leftarrow$ ו"ע " " " " $(0,1,0)$.

(-) עבור ע"ע $\lambda_3=2$:

$$\begin{pmatrix}-1&0&1\\0&-1&0\\1&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \Longrightarrow x=z,\ y=0$$

$\Leftarrow$ פ. למערכת היא מן הצורה $(x,0,x)$.

$\Leftarrow$ מ"ע המתאים לע"ע $\lambda_3=2$ הוא $span\{(1,0,1)\}$

⇐ ו"ע המתאים לע"ע $\lambda_3=2$ הוא $(1,0,1)$.

סה"כ A לכסינה ו:

$$D=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix},\qquad P=\begin{pmatrix}-1&0&1\\0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}$$

ומתקיים $D=P^{-1}AP$.

(4.) תהי A מט' ריבועית מסדר n ויהי λ ע"ע של A.

⇐ קיים $\vec{v}\neq 0$ ב- $\mathbb{R}^n$ כך ש- $Av=\lambda v$. (*)

לפי הג' ע"ע

יהי $0\neq m$ סקלר כלשהו. נראה כי $m\lambda$ הינו ע"ע של mA.

מתקיים עבור v הנ"ל:

$$(mA)v \underset{\text{תכונות כפל מט'}}{=} m(Av) \underset{\text{לפי (*)}}{=} m(\lambda v) = (m\lambda)v$$

סה"כ מתקיים $(mA)v=(m\lambda)v$ ו- $v\neq\vec{0}$

⇐ לפי הג' ע"ע וו"ע הרי ש- $m\lambda$ הינו ע"ע של המט' mA המתאים לו"ע v.

מש"ל.

(5.) תהי A מט' לכסינה כך שקיימת P הפיכה ו- D אלכסונית ומתקיים $D=P^{-1}AP$.

⇐ $A=PDP^{-1}$.

$$A^n=(PDP^{-1})^n=\underbrace{(PD\cancel{P^{-1}})(\cancel{P}D\cancel{P^{-1}})(\cancel{P}D\cancel{P^{-1}})\cdots(\cancel{P}DP^{-1})}_{n\ \text{פעמים}}=PD^nP^{-1}=$$

$$=P\begin{pmatrix}\lambda_1&&0\\&\ddots&\\0&&\lambda_n\end{pmatrix}^nP^{-1}=P\begin{pmatrix}\lambda_1^n&&0\\&\ddots&\\0&&\lambda_n^n\end{pmatrix}P^{-1}$$

5

אזי:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{20} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}^{20} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

לפי תרגיל 3ב'

$$= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0^{20} & 0 & 0 \\ 0 & 1^{20} & 0 \\ 0 & 0 & 2^{20} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^{20} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2^{20} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^{20} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{19} & 0 & 2^{19} \\ 0 & 1 & 0 \\ 2^{19} & 0 & 2^{19} \end{pmatrix}$$

תרגיל מס' 10

הגשה עד: 5.1.2002

1. פתרו את מערכת המשוואות הבאה ע"י שימוש בכלל קרמר:

$$\begin{cases} 3x+4y-z=7 \\ x-2y+4z=0 \\ 3x-y+z=-1 \end{cases}$$

2. לכל אחת מן המטריצות הבאות קבעו האם המטריצה לכסינה או לא. אם כן, מצאו מטריצה הפיכה P ומטריצה אלכסונית D כך ש- $D=P^{-1}AP$.

א. $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 0 \\ 4 & -8 & -2 \end{pmatrix}$ ב. $\begin{pmatrix} 8 & 3 & -3 \\ -6 & -1 & 3 \\ 12 & 6 & -4 \end{pmatrix}$

3. עבור אילו ערכי k המטריצה $\begin{pmatrix} k+3 & 0 & 0 \\ -k-3 & k & k+3 \\ -k-3 & k & k+3 \end{pmatrix}$ אינה לכסינה מעל R ?

4. עבור אילו ערכי $a \in R$ המטריצה $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & a \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ אינה לכסינה:

א. מעל R ? ב. מעל C ?

5. A היא מטריצה מסדר 2×2 בעלת ע"ע 2 ו- 5, וו"ע $(1,-1)$ ו- $(1,2)$ בהתאמה. חשבו את A^{-1} (אם קיימת).

6. הוכיחו כי במרחב אוקלידי מתקיים $<a,b+c> = <a,b> + <a,c>$.

7. הוכיחו כי במרחב אוקלידי V מתקיים $<a,0_v> = <0_v,a> = 0$.

8. יהי $V=R^2$. האם הפונקציה $f:V\times V\to R$ המוגדרת ע"י $f([a,b],[c,d]) = a(c+d)+b(c+2d)$ מהווה מכפלה פנימית על V ?

בהצלחה!

(1)

פתרון תרגיל 10

(1)

$$\begin{cases} 3x+4y-z=7 \\ x-2y+4z=0 \\ 3x-y+z=-1 \end{cases}$$

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 1 & -2 & 4 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad b=\begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

(*)

$$|A|=\begin{vmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 1 & -2 & 4 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} \underset{C_2+C_3\to C_2}{\overset{C_1-3C_3\to C_1}{=}} \begin{vmatrix} 6 & 3 & -1 \\ -11 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \underset{\text{פיתוח לפי } R_3}{=}$$

$$= \begin{vmatrix} 6 & 3 \\ -11 & 2 \end{vmatrix} = 12+33=45\neq 0 \Rightarrow$$ למערכת יש פתרון יחיד

(*)

$$D_1=\begin{vmatrix} 7 & 4 & -1 \\ 0 & -2 & 4 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \overset{R_1+7R_3\to R_1}{=} \begin{vmatrix} 0 & -3 & 6 \\ 0 & -2 & 4 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \underset{\text{פיתוח לפי } C_1}{=} -\begin{vmatrix} -3 & 6 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$= -(-12+12) = 0$$

⑧

(*)
$$D_2=\begin{vmatrix}3&7&-1\\1&0&4\\3&-1&1\end{vmatrix}\overset{R_1+7R_3\to R_1}{=}\begin{vmatrix}24&0&6\\1&0&4\\3&-1&1\end{vmatrix}=$$ פיתוח לפי C_2

$$=\begin{vmatrix}24&6\\1&4\end{vmatrix}=96-6=90$$

$$D_3=\begin{vmatrix}3&4&7\\1&-2&0\\3&-1&-1\end{vmatrix}\overset{R_1+7R_3\to R_1}{=}\begin{vmatrix}24&-3&0\\1&-2&0\\3&-1&-1\end{vmatrix}=$$ פיתוח לפי C_3

$$=-\begin{vmatrix}24&-3\\1&-2\end{vmatrix}=-(-48+3)=45$$

סה"כ קבלנו:

$$x=x_1=\frac{D_1}{|A|}=\frac{0}{45}=0$$

$$y=x_2=\frac{D_2}{|A|}=\frac{90}{45}=2$$

$$z=x_3=\frac{D_3}{|A|}=\frac{45}{45}=1$$

$\Leftarrow$ $(x,y,z)=(0,2,1)$.

(.2) (א.)

$$\Delta_A(\lambda)=|A-\lambda I|=\begin{vmatrix}3-\lambda&1&0\\-4&-1-\lambda&0\\4&-8&-2-\lambda\end{vmatrix}\underset{\text{פיתוח לפי } C_3}{=}-(2+\lambda)\begin{vmatrix}3-\lambda&1\\-4&-1-\lambda\end{vmatrix}=$$

$$=-(2+\lambda)\big((3-\lambda)(-1-\lambda)+4\big)=-(2+\lambda)(-3+\lambda-3\lambda+\lambda^2+4)=$$

$$=-(2+\lambda)(\lambda^2-2\lambda+1)=-(\lambda+2)(\lambda-1)^2=0$$

$\Leftarrow$ ע"ע של A הם: $\lambda_1=-2,\ \lambda_2=\lambda_3=1$

(*) עבור ע"ע $\lambda_2=\lambda_3=1$:

$$\begin{pmatrix}2&1&0\\-4&-2&0\\4&-8&-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\Longrightarrow y=-2x,\ z=\frac{20}{3}x$$

$\Leftarrow$ ו"ע מתאים הינו $\left(1,-2,\frac{20}{3}\right)$

③

עבור ע״ע $\lambda=1$ קיבלנו ר״א $=2 \neq$ ר״ג $=1$

⇐ המט׳ לא לכסינה.

ב.

$$\Delta_A(\lambda)=|A-\lambda I|=\begin{vmatrix} 8-\lambda & 3 & -3 \\ -6 & -1-\lambda & 3 \\ 12 & 6 & -4-\lambda \end{vmatrix} \underset{C_2+C_3\to C_2}{=}$$

$$=\begin{vmatrix} 8-\lambda & 0 & -3 \\ -6 & 2-\lambda & 3 \\ 12 & 2-\lambda & -4-\lambda \end{vmatrix} \underset{R_3-R_2\to R_3}{=} \begin{vmatrix} 8-\lambda & 0 & -3 \\ -6 & 2-\lambda & 3 \\ 18 & 0 & -7-\lambda \end{vmatrix}$$

$$\underset{\text{פיתוח לפי } C_2}{=} (2-\lambda)\begin{vmatrix} 8-\lambda & -3 \\ 18 & -7-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(-56+7\lambda-8\lambda+\lambda^2+54) =$$

$$=(2-\lambda)(\lambda^2-\lambda-2) = (2-\lambda)(\lambda+1)(\lambda-2) = -(\lambda+1)(\lambda-2)^2 = 0$$

⇐ ע״ע של A הם $\lambda_1=-1,\ \lambda_2=\lambda_3=2$

⊛ עבור $\lambda_2=\lambda_3=2$:

$$\begin{pmatrix} 6 & 3 & -3 \\ -6 & -3 & 3 \\ 12 & 6 & -6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow z=2x+y$$

⇐ פ. למערכת ההומוגנית הצגה $(x,y,2x+y)$

⇐ ו״ע מתאימים הם: $(1,0,2),(0,1,1)$

⊛ עבור $\lambda_1=-1$:

$$\begin{pmatrix} 9 & 3 & -3 \\ -6 & 0 & 3 \\ 12 & 6 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow y=-x,\ z=2x$$

⇐ ו״ע מתאים הוא $(1,-1,2)$

סה״כ: $P=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $D=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ ומתקיים $D=P^{-1}AP$.

(4)

(3)

$$A=\begin{pmatrix} k+3 & 0 & 0 \\ -k-3 & k & k+3 \\ -k-3 & k & k+3 \end{pmatrix}$$

נמצא ע"ע של A:

$$P_A(\lambda)=|A-\lambda I|=\begin{vmatrix} k+3-\lambda & 0 & 0 \\ -k-3 & k-\lambda & k+3 \\ -k-3 & k & k+3-\lambda \end{vmatrix} \underset{\text{פיתוח לפי } R_1}{=} (k+3-\lambda)\begin{vmatrix} k-\lambda & k+3 \\ k & k+3-\lambda \end{vmatrix}=$$

$$=(k+3-\lambda)\left(\cancel{k^2}+\cancel{3k}-\lambda k-\lambda k-3\lambda+\lambda^2-\cancel{k^2}-\cancel{3k}\right)=$$

$$=(k+3-\lambda)\left(\lambda^2+\lambda(-2k-3)\right) \quad =(k+3-\lambda)\cdot\lambda\cdot(\lambda-2k-3)=0$$

$\Leftarrow$ ע"ע של A הם: $k+3$, 0 ו- $2k+3$.

כאשר ל- A יש 3 ע"ע שונים אזי לפי משפט A לכסינה.

כלומר, A בוודאי לכסינה כאשר $k+3\neq 0$ וגם $2k+3\neq 0$ וגם $k+3\neq 2k+3$

$\Leftarrow$ " " " $k\neq -3$ " $k\neq -\frac{3}{2}$ " $k\neq 0$

כלומר, עבור $k\neq -3,-\frac{3}{2},0$ A בוודאי לכסינה.

עכשיו נבדוק אם לכסינה A באופן נפרד עבור כל אחד משלושת ערכי k הנ"ל.

(א) עבור $k=0$:

עבור $k=0$ ע"ע של A הם 0 בר"א 1 ו- 3 בר"א 2.

עבור ע"ע 0: כיון שריבוי האלגברי 1, הרי שלפי משפט גם ריבוי גיאומטרי 1.

נבדוק מהו ר"ג של ע"ע $\lambda=3$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -3 & -3 & 3 \\ -3 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow x=0,\ y=z$$

$\Leftarrow$ פ.כללי הוקטור העצמי $(0,y,y)$

$\Leftarrow$ ו"ע מתאים הוא $(0,1,1)$

$\Leftarrow$ עבור $\lambda=3$ ר"א $=2\neq$ ר"ג $=1$ ולכן A לא לכסינה.

$\Leftarrow$ עבור $k=0$ המט' לא לכסינה.

(5)

(*) עבור $k=-3$:

עבור $k=-3$ ע"ע של A הם 0 בר"א 2 ו- -3 בר"א 1.

מאותם שיקולים כמקודם, מספיק לבדוק מהו הר"ג של ע"ע $\lambda=0$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow y=0$$

$\Leftarrow$ פ. כללי הוא מן הצורה $(x,0,z)$

$\Leftarrow$ ו"ע מתאימים הם $(1,0,0)$ ו $(0,0,1)$.

$\Leftarrow$ עבור ע"ע $\lambda=0$ ר"א = ר"ג = 2

סה"כ לכן המט' לכסינה.

$\Leftarrow$ עבור $k=-3$ המט' לכסינה.

(**) עבור $k=-\frac{3}{2}$:

עבור $k=-\frac{3}{2}$ ע"ע של A הם 0 בר"א 2 ו $\frac{3}{2}$ בר"א 1.

מאותם שיקולים כמקודם, מספיק לבדוק מהו הר"ג של ע"ע $\lambda=0$:

$$\begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x=0,\ y=z$$

$\Leftarrow$ פ. כללי הוא מן הצורה $(0,y,y)$

$\Leftarrow$ ו"ע מתאים הוא $(0,1,1)$.

$\Leftarrow$ עבור ע"ע $\lambda=0$ ר"א $=2 \neq 1=$ ר"ג

$\Leftarrow$ A לא לכסינה עבור $k=-\frac{3}{2}$.

סה"כ עבור $k=-\frac{3}{2}$ או $k=0$ המט' לא לכסינה מעל $\mathbb{R}$.

(4)

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & a \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

⑥

נמצא ע"ע של A:

$$P_A(\lambda) = |A-\lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & 1-\lambda & a \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} \underset{R_1 \text{ פיתוח לפי}}{=} (1-\lambda)\begin{vmatrix} 1-\lambda & a \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (1-\lambda)(1-2\lambda+\lambda^2-a) = (1-\lambda)(\lambda^2-2\lambda+(1-a)) = 0$$

$\Leftarrow$ $1-\lambda=0$ או $\lambda^2-2\lambda+(1-a)=0$

$\Downarrow$

$$\lambda_{1,2} = \frac{2\pm\sqrt{4-4(1-a)}}{2} = \frac{2\pm\sqrt{4a}}{2} = \frac{2\pm 2\sqrt{a}}{2} = 1\pm\sqrt{a}$$

$\Leftarrow$ ע"ע של A הם $1+\sqrt{a}$, $1-\sqrt{a}$ ו- 1.

א. מעל $\mathbb{R}$:

כאשר $a<0$ ל- A אין ע"ע ממשיים ולכן אינה לכסינה.

" $a>0$ " יש 3 ע"ע שונים ולכן לכסינה.

נבדוק עבור $a=0$:

כאשר $a=0$ ל- A ע"ע $\lambda=1$ בר"א 3. נבדוק מהו הר"ג שלו:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow x=y=0$$

$\Leftarrow$ ב. כללי המרחב העצמי $(0,0,z)$

$\Leftarrow$ עבור ע"ע $\lambda=1$ ר"ג $= 1 \neq 3 =$ ר"א

$\Leftarrow$ עבור $a=0$ המט' לא לכסינה.

סה"כ מעל $\mathbb{R}$, A לא לכסינה כאשר $a\le 0$.

ב. מעל $\mathbb{C}$:

לכל a ב- $\mathbb{C}$ למט' יש 3 ע"ע השייכים ל- $\mathbb{C}$.

עבור $a\neq 0$ ל- A יש 3 ע"ע שונים ולכן לפי משפט בוודאי לכסינה.

כאשר $a=0$ ראינו קודם כי A לא לכסינה

סה"כ מעל $\mathbb{C}$, A לא לכסינה כאשר $a=0$.

5. ידוע כי אם A לכסינה, D היא המט' האלכסונית, P מט' מלכסנת אזי $D=P^{-1}AP$ ולכן $A=PDP^{-1}$.

ע"ע של A הם 2, 5 $\Leftarrow$ $D=\begin{pmatrix}2&0\\0&5\end{pmatrix}$

ו"ע $P=\begin{pmatrix}1&1\\-1&2\end{pmatrix}$

לכן:

$$A=PDP^{-1}=\begin{pmatrix}1&1\\-1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&0\\0&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\-1&2\end{pmatrix}^{-1}=$$

$$=\begin{pmatrix}1&1\\-1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&0\\0&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{2}{3}&-\frac{1}{3}\\\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&5\\-2&10\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{2}{3}&-\frac{1}{3}\\\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}3&1\\2&4\end{pmatrix}$$

6. יהי V מרחב אוקלידי (כלומר, $\mathbb{F}=\mathbb{R}$ עבור מ"פ מעל V).
נוכיח כי לכל $a,b,c\in V$ מתקיים $\langle a,b+c\rangle=\langle a,b\rangle+\langle a,c\rangle$.
(שימו לב כי לא נתון להגיד מהי המ"פ ומהו V!)

$$L=\langle a,b+c\rangle \underset{\text{תכונות מ"פ}}{=} \overline{\langle b+c,a\rangle} = \langle b+c,a\rangle \underset{\text{תכונות מ"פ}}{=} \langle b,a\rangle+\langle c,a\rangle$$

במרחב אוקלידי, כלומר $\mathbb{F}=\mathbb{R}$
$\langle a,b\rangle=\langle b,a\rangle$
כי לכל $x\in\mathbb{R}$
מתקיים $\bar{x}=x$

$$=\overline{\langle a,b\rangle}+\overline{\langle a,c\rangle}=\langle a,b\rangle+\langle a,c\rangle$$

מש"ל.

7. לכל $a,b\in V$ כאשר V מרחב אוקלידי מתקיים $\langle a,b\rangle=\langle b,a\rangle$
(כי לכל $x\in\mathbb{R}$ $\bar{x}=x$ ולכן $\langle a,b\rangle=\overline{\langle b,a\rangle}=\langle b,a\rangle$),
ולכן בפרט $\langle a,0_V\rangle=\langle 0_V,a\rangle$.
נראה כי $\langle 0_V,a\rangle=0$

(8)

$$\langle 0_V, a\rangle = \langle a-a, a\rangle = \langle a,a\rangle + \langle -a,a\rangle =$$

תכונת מ"ו   תכונת מ"פ

$$= \langle a,a\rangle - \langle a,a\rangle = 0$$

מש"ל.

8. f אכן מתאימה לכל שני וקטורים ב- V סקלר מ- $\mathbb{R}$.

נבדוק האם f מקיימת את 4 תכונות מ"פ:

(1) $\forall (a,b),(c,d),(e,f) \in \mathbb{R}^2$ $\quad \langle (a,b)+(e,f),(c,d)\rangle =$

$$= \langle (a+e,b+f),(c,d)\rangle = (a+e)(c+d)+(b+f)(c+2d) =$$

חיבור וקטורים ב- $\mathbb{R}^2$ הג' f

$$= \big(a(c+d)+b(c+2d)\big) + \big(e(c+d)+f(c+2d)\big)$$

תכונות כפל וחיבור ב- $\mathbb{R}$

$$= \langle (a,b),(c,d)\rangle + \langle (e,f),(c,d)\rangle$$

הג' f

(2) $\forall (a,b),(c,d) \in \mathbb{R}^2, \alpha\in\mathbb{R}$ $\quad \langle \alpha(a,b),(c,d)\rangle =$

$$= \langle (\alpha a,\alpha b),(c,d)\rangle = \alpha a(c+d)+\alpha b(c+2d) =$$

כפל בסקלר ב- $\mathbb{R}^2$ הג' f

$$= \alpha\big(a(c+d)+b(c+2d)\big) = \alpha\langle (a,b),(c,d)\rangle$$

דיסטריבוטיביות ב- $\mathbb{R}$

(3) $\mathbb{F}=\mathbb{R}$ ולכן מספיק להראות כי לכל $u,v\in V$ $\langle u,v\rangle = \langle v,u\rangle$

(כי לכל $x\in\mathbb{R}$, $\bar{x}=x$)

$$\forall (a,b),(c,d)\in\mathbb{R}^2 \quad \langle (a,b),(c,d)\rangle = a(c+d)+b(c+2d) =$$

הג' f

$$= ac+ad+bc+2bd = ca+da+cb+2db =$$

קומוטטיביות ב- $\mathbb{R}$ בכפל

$$= ca+cb+da+2db = c(a+b)+d(a+2b) = \langle (c,d),(a,b)\rangle$$

קומוטטיביות החיבור ב- $\mathbb{R}$ דיסטריבוטיביות ב- $\mathbb{R}$ הג' f

(9)

(4)

(א)

$$\forall (a,b)\in\mathbb{R}^2 \quad \langle (a,b),(a,b)\rangle = a(a+b)+b(a+2b) =$$

$$= a^2+ab+ba+2b^2 = \underbrace{(a+b)^2}_{\geq 0}+\underbrace{b^2}_{\geq 0} \geq 0$$

(ב)

$$\forall (a,b)\in\mathbb{R}^2 \quad \langle (a,b),(a,b)\rangle = 0$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$(a+b)^2+b^2=0$$

$$\Longleftrightarrow$$

$a+b=0$ וגם $b=0$

$$\Longleftrightarrow$$

$$a=b=0$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$(a,b)=(0,0)$$

סה"כ נקבע כי f מהווה מ"פ מעל $V=\mathbb{R}^2$.

החוג למדעי המחשב – אלגברה לינארית , סמסטר א' תשס"ג

<u>תרגיל מס' 11</u>

<u>הגשה עד: 12.1.2002</u>

1. תוך שימוש בתהליך גרם-שמידט מצאו בסיס אורתוגונלי ואורתונורמלי של $W = span\{(2,1,3,-1),(7,4,3,-3),(5,7,7,8),(1,1,-6,0)\}$.

2. מצאו וקטור נורמלי ב- R^4 הניצב לכל אחד מן הוקטורים $(2,1,1,3),(1,-1,-1,1),(1,1,1,1)$.

3. האם קיים וקטור $v \neq 0_v$ ב- R^3 הניצב לכל אחד משלושת הוקטורים $(4,0,2),(1,-1,0),(3,1,3)$? אם כן, מצאו אותו. נמקו!!!

4. הוכיחו:
   א. אם A,B מטריצות מסדר $m \times n$ אזי $A^tB - B^tA$ אנטי סימטרית.
   ב. אם A,B מטריצות ריבועיות מאותו סדר ו- A סימטרית אזי B^tAB סימטרית.
   ג. אם A,B מטריצות ריבועיות אנטי-סימטריות מאותו סדר אזי ABA אנטי-סימטרית.

5. הוכיחו או הפריכו: קיימת מטריצה $A \in R(2\times 3)$ כך שמתקיים $AA^t = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

6. לכל אחת מן המטריצות הבאות מצאו P אורתוגונלית ו- D אלכסונית, כך ש $D = P^tAP$:

א. $\begin{pmatrix} 11 & 2 & -8 \\ 2 & 2 & 10 \\ -8 & 10 & 5 \end{pmatrix}$

ב. $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 0 & 5 & 0 \\ 4 & 0 & 6 \end{pmatrix}$

<u>בהצלחה!</u>

פתרון תרגיל מס' 11

(1.) לפי הנ' W מתקיים כי $S=\{(2,1,3,-1),(7,4,3,-3),(5,7,7,8),(1,1,-6,0)\}$ פורש את W.

כמו כן מתקיים $(1,1,-6,0)=-3(2,1,3,-1)+1\cdot(7,4,3,-3)+0\cdot(5,7,7,8)$

$\Leftarrow$ $e=\{\underset{e_1}{(2,1,3,-1)},\underset{e_2}{(7,4,3,-3)},\underset{e_3}{(5,7,7,8)}\}$ פורש את W.

נראה כי e בת"ל:

$$a(2,1,3,-1)+b(7,4,3,-3)+c(5,7,7,8)=(0,0,0,0)$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} 2a+7b+5c=0 \\ a+4b+7c=0 \\ 3a+3b+7c=0 \\ -a-3b+8c=0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 7 & 5 \\ 1 & 4 & 7 \\ 3 & 3 & 7 \\ -1 & -3 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_1} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 7 & 5 \\ 3 & 3 & 7 \\ -1 & -3 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{R_3-3R_1\to R_3 \\ R_4+R_1\to R_4}]{R_2-2R_1\to R_2} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 0 & -1 & -9 \\ 0 & -9 & -14 \\ 0 & 1 & 15 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[R_4+R_2\to R_3]{R_3-9R_2\to R_3} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 0 & -1 & -9 \\ 0 & 0 & 67 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_4-\frac{6}{67}R_3\to R_4} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 0 & -1 & -9 \\ 0 & 0 & 67 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} a+4b+7c=0 \\ 0-b-9c=0 \\ 67c=0 \end{cases} \Longrightarrow a=b=c=0$$

$\Leftarrow$ e בת"ל ופורש את W

$\Leftarrow$ e בסיס של W.

ע"י תהליך גרם-שמידט נמצא בסיס אורתוגונלי $f=\{f_1,f_2,f_3\}$ של W:

$$f_1=e_1=(2,1,3,-1)$$

$$f_2=e_2-\frac{\langle e_2,f_1\rangle}{\langle f_1,f_1\rangle}\cdot f_1=(7,4,3,-3)-\frac{30}{15}(2,1,3,-1)=(3,2,-2,-1)$$

(2)

$$f_3 = e_3 - \frac{\langle e_3, f_1\rangle}{\langle f_1, f_1\rangle}\cdot f_1 - \frac{\langle e_3, f_2\rangle}{\langle f_2, f_2\rangle}\cdot f_2 =$$

$$= (5,7,7,8) - \frac{10+7+21-8}{15}(2,1,3,-1) - \frac{15+14-14-8}{9+4+4+1}(3,2,-2,-1) =$$

$$= (5,7,7,8) - 2(2,1,3,-1) - \frac{7}{18}(3,2,-2,-1) = \left(\frac{-1}{6}, \frac{38}{9}, \frac{16}{9}, \frac{187}{18}\right)$$

$$\left\{(2,1,3,-1), (3,2,-2,-1), \left(-\frac{1}{6}, \frac{38}{9}, \frac{16}{9}, \frac{187}{18}\right)\right\} \Leftarrow$$

בסיס אורתוגונלי ל-W.

$$\|f_1\| = \sqrt{4+1+9+1} = \sqrt{15}$$

$$\|f_2\| = \sqrt{9+4+4+1} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

$$\|f_3\| = \sqrt{\frac{1}{36} + \frac{1444}{81} + \frac{256}{81} + \frac{34969}{324}} = \sqrt{\frac{41778}{324}} = \sqrt{\frac{2321}{18}}$$

$\Leftarrow$ בסיס אורתונורמלי ל-W הינו:

$$\left\{\left(\frac{2}{\sqrt{15}}, \frac{1}{\sqrt{15}}, \frac{3}{\sqrt{15}}, \frac{-1}{\sqrt{15}}\right), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{2}{3\sqrt{2}}, \frac{-2}{3\sqrt{2}}, \frac{-1}{3\sqrt{2}}\right), \left(-\frac{1}{6}\cdot\sqrt{\frac{18}{2321}}, \frac{38}{9}\cdot\sqrt{\frac{18}{2321}}, \frac{16}{9}\cdot\sqrt{\frac{18}{2321}}, \frac{187}{18}\cdot\sqrt{\frac{18}{2321}}\right)\right\}$$

3. נחפש תחילה וקטור $(a,b,c,d)\in\mathbb{R}^4$ האורתוגונלי לכל אחד מן הוקטורים.
נדרוש לכן:

$$\begin{cases} \langle (a,b,c,d),(2,1,1,3)\rangle = 2a+b+c+3d=0 \\ \langle (a,b,c,d),(1,-1,-1,1)\rangle = a-b-c+d=0 \\ \langle (a,b,c,d),(1,1,1,1)\rangle = a+b+c+d=0 \end{cases} \Longrightarrow a=d=0,\ b=-c$$

$\Leftarrow$ $(0,1,-1,0)$ אורתוגונלי לכל אחד מן הוקטורים.

$$\|(0,1,-1,0)\| = \sqrt{2}$$

$\Leftarrow$ $\left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}, 0\right)\in\mathbb{R}^4$ הינו וקטור אורתונורמלי הניצב לכל אחד
מן הוקטורים הנדרש.

3

3.

$$\begin{pmatrix}1&-1&0\\4&0&2\\3&1&3\end{pmatrix}\xrightarrow[R_3-3R_1\to R_3]{R_2-4R_1\to R_2}\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&4&2\\0&4&3\end{pmatrix}\xrightarrow{R_3-R_2\to R_3}\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&4&2\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$\Leftarrow$ $\{(3,1,3),(1,-1,0),(4,0,2)\}$ הם בת"ל,

הם גם מכילים 3 איברים ! $\dim\mathbb{R}^3=3$ ולכן לפי משפט הם

גם מהווים בסיס ל-$\mathbb{R}^3$.

הוקטור היחיד הניצב לבסיס הינו וקטור האפס ולכן

לא קיים וקטור $\vec{v}\neq 0$ הניצב לכל אחד מן הוקטורים הנ"ל.

4. א.

$$(A^tB-B^tA)^t \underset{\boxed{(C+D)^t=C^t+D^t}}{=} (A^tB)^t-(B^tA)^t =$$

$$\underset{\boxed{(CD)^t=D^tC^t}}{=} B^t(A^t)^t - A^t(B^t)^t \underset{\boxed{(C^t)^t=C}}{=} B^tA-A^tB = -(A^tB-B^tA)$$

$\Leftarrow$ A^tB-B^tA אנטי סימטרית.

ב.

$$(B^tAB)^t \underset{\text{אסוציאטיביות כפל מט'}}{=} (B^t(AB))^t = (AB)^t(B^t)^t =$$

$$= B^tA^t(B^t)^t \underset{(C^t)^t=C}{=} B^tA^tB \underset{\substack{A\text{ סימטרית}\\\text{(נתון)}}}{=} B^tAB$$

$\Leftarrow$ B^tAB סימטרית

ג.

$$(ABA)^t = ((AB)A)^t = A^t(AB)^t = A^tB^tA^t$$

$$\underset{\text{נתון: } A,B \text{ אנטי סימטריות}}{=} (-A)(-B)(-A) = -ABA$$

$\Leftarrow$ ABA אנטי סימטרית.

מש"ל.

(5.) טענה: קיימת $A\in\mathbb{R}(2\times 3)$ כך ש $AA^t=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$

הטענה אינה נכונה.

נניח בשלילה כי קיימת $A=\begin{pmatrix}a&b&c\\d&e&f\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{2\times 3}$ כך ש $AA^t=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$.

$$\Leftarrow \quad \begin{pmatrix}a&b&c\\d&e&f\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&d\\b&e\\c&f\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$$

$$\Leftarrow \quad \begin{pmatrix}a^2+b^2+c^2 & ad+be+cf\\ da+eb+fc & d^2+e^2+f^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$$

$$\Leftarrow \quad \begin{cases} a^2+b^2+c^2=0 \Rightarrow a=b=c=0\\ d^2+e^2+f^2=0 \Rightarrow d=e=f=0\\ ad+be+cf=1 \end{cases}$$

הצבה

$\Downarrow$

$\cancel{0=1}$ סתירה!

$\Leftarrow$ הנחת השלילה היתה מוטעית ולא קיימת $A\in\mathbb{R}^{2\times 3}$ כך ש $AA^t=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$.

(6.) (א.)

$$A=\begin{pmatrix}11&2&-8\\2&2&10\\-8&10&5\end{pmatrix}$$

$$P_A(\lambda)=|A-\lambda I|=\begin{vmatrix}11-\lambda&2&-8\\2&2-\lambda&10\\-8&10&5-\lambda\end{vmatrix}\overset{R_3+4R_2\to R_3}{=}\begin{vmatrix}11-\lambda&2&-8\\2&2-\lambda&10\\0&18-4\lambda&45-\lambda\end{vmatrix}$$

פיתוח לפי ע' 1

$$=(11-\lambda)\begin{vmatrix}2-\lambda&10\\18-4\lambda&45-\lambda\end{vmatrix}-2\begin{vmatrix}2&-8\\18-4\lambda&45-\lambda\end{vmatrix}=$$

$$=(11-\lambda)(90-45\lambda-2\lambda+\lambda^2-180+40\lambda)-2(90-2\lambda+144-32\lambda)=$$

$$=(11-\lambda)(\lambda^2-7\lambda-90)-2(-34\lambda+234)=$$

8

$$= 11\lambda^2 - 77\lambda - 990 - \lambda^3 + 7\lambda^2 + 90\lambda + 68\lambda - 468 =$$
$$= -\lambda^3 + 18\lambda^2 + 81\lambda - 1458 = (\lambda-9)(-\lambda^2+9\lambda+162) =$$
$$= (\lambda-9)(\lambda+9)(-\lambda+18) = 0$$

$\Leftarrow$ ע"ע של A הם $\lambda_1=9,\ \lambda_2=-9,\ \lambda_3=18$

* עבור $\lambda_1=9$:

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & -8 \\ 2 & -7 & 10 \\ -8 & 10 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \quad x=y=2z$$

$\Leftarrow$ ו"ע מתאים הוא $(2,2,1)$

$\Leftarrow$ ו"ע מנורמל הוא $(\frac{2}{3},\frac{2}{3},\frac{1}{3})$

* עבור $\lambda_2=-9$:

$$\begin{pmatrix} 20 & 2 & -8 \\ 2 & 11 & 10 \\ -8 & 10 & 14 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \quad y=-2x\ ,\ z=2x$$

$\Leftarrow$ ו"ע מתאים הוא $(1,-2,2)$

$\Leftarrow$ ו"ע מנורמל הוא $(\frac{1}{3},-\frac{2}{3},\frac{2}{3})$

* עבור $\lambda_3=18$:

$$\begin{pmatrix} -7 & 2 & -8 \\ 2 & -16 & 10 \\ -8 & 10 & -13 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \quad x=-2y\ ,\ z=2y$$

$\Leftarrow$ ו"ע מתאים הוא $(-2,1,2)$

$\Leftarrow$ ו"ע מנורמל הוא $(-\frac{2}{3},\frac{1}{3},\frac{2}{3})$

סה"כ A לכסינה אורתוגונלית,

$$D=\begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & -9 & 0 \\ 0 & 0 & 18 \end{pmatrix},\quad P=\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

ו P אורתוגונלית ומתקיים $D=P^tAP$.

6

ב.

$$A=\begin{pmatrix}2&0&4\\0&5&0\\4&0&6\end{pmatrix}$$

$$\Delta_A(\lambda)=|A-\lambda I|=\begin{vmatrix}2-\lambda&0&4\\0&5-\lambda&0\\4&0&6-\lambda\end{vmatrix}\underset{\text{פיתוח לפי } R_2}{=}(5-\lambda)\begin{vmatrix}2-\lambda&4\\4&6-\lambda\end{vmatrix}=$$

$$=(5-\lambda)(12-6\lambda-2\lambda+\lambda^2-16)=(5-\lambda)(\lambda^2-8\lambda-4)=0$$

⇐ ע"ע של A הם $\lambda=5$ ו- $\lambda=4\pm2\sqrt5$

* עבור ע"ע $\lambda=5$:

$$\begin{pmatrix}-3&0&4\\0&0&0\\4&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\Rightarrow x=z=0$$

⇐ ו"ע מנורמל מתאים הנו $(0,1,0)$

* עבור $\lambda=4+2\sqrt5$:

$$\begin{pmatrix}-2-2\sqrt5&0&4\\0&1-2\sqrt5&0\\4&0&2-2\sqrt5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\Rightarrow y=0,\ z=\frac{1+\sqrt5}{2}x$$

⇐ ו"ע מתאים הינו $\left(1,0,\frac{1+\sqrt5}{2}\right)$

$$\left\|\left(1,0,\frac{1+\sqrt5}{2}\right)\right\|=\sqrt{1+\frac{1+2\sqrt5+5}{4}}=\sqrt{\frac{5+\sqrt5}{2}}$$

⇐ ו"ע מנורמל הנו $\left(\sqrt{\frac{2}{5+\sqrt5}},0,\frac{1+\sqrt5}{\sqrt{2(5+\sqrt5)}}\right)$

* עבור $\lambda=4-2\sqrt5$:

$$\begin{pmatrix}-2+2\sqrt5&0&4\\0&1+2\sqrt5&0\\4&0&2+2\sqrt5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\Rightarrow y=0,\ z=\frac{1-\sqrt5}{2}x$$

(7)

$\left(1, 0, \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$ ⇐ ו"ע מתאים הוא

$$\left\|\left(1, 0, \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\right\| = \sqrt{1+\frac{1-2\sqrt{5}+5}{4}} = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}$$

$\left(\sqrt{\frac{2}{5-\sqrt{5}}}, 0, \frac{1-\sqrt{5}}{\sqrt{2(5-\sqrt{5})}}\right)$ ⇐ ו"ע מנורמל הוא

סה"כ A לכסין!

$$D = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 4+2\sqrt{5} & 0 \\ 0 & 0 & 4-2\sqrt{5} \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{\frac{2}{5+\sqrt{5}}} & \sqrt{\frac{2}{5-\sqrt{5}}} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1+\sqrt{5}}{\sqrt{2(5+\sqrt{5})}} & \frac{1+\sqrt{5}}{\sqrt{2(5-\sqrt{5})}} \end{pmatrix}$$

! P אורתוגונלית ומתקיים $D=P^tAP$.

תרגיל מס' 12

לא להגשה

1. קבעו עבור כל אחת מן המטריצות הבאות האם היא שלילית/חיובית/אי-שלילית/מעורבת:

א. $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ ב. $\begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ ג. $\begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

ד. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

2. עבור אילו ערכי $a \in R$ המטריצה $\begin{pmatrix} a & 3 & -1 \\ 3 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ חיובית ?

3. רשמו בצורה מטריצית את התבניות הריבועיות הבאות:

א. $Q(x,y) = x^2 - 10xy - 3y^2$

ב. $Q(x,y,z) = x^2 - 10xy - 3y^2$

ג. $Q(x,y,z,w) = 3x^2 - 12y^2 - w^2 - 6xy + 10yz + 11yw - 4xw$

ד. $Q(x_1,\ldots,x_n) = \left(\sum_{i=1}^{n} n{x_i}^2\right) + \left(\sum_{i=1}^{n-1} 2x_i x_{i+1}\right)$

4. מצאו את התבניות הריבועיות המוגדרות ע"י המטריצות הבאות:

א. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 8 & -5 \\ 0 & -5 & 3 \end{pmatrix}$ ב. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & -4 & 0 \\ 3 & -4 & 3 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ ג. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

5. לכסנו את התבנית הריבועית $Q(x,y,z) = x^2 - z^2 - 4xy + 4yz$.

6. איזה עקום במישור x,y מתואר ע"י המשוואה $4x^2 + 4y^2 + 4xy = 9$?

בהצלחה!

①

פתרון תרגול מס' 13

1) א.

$$\delta_1 = |1| = 1 > 0$$

$$\delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 10 \end{vmatrix} = 1 > 0$$

$$\delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 3 > 0$$

$\Rightarrow$ מוג' חיובית

ב.

$$\delta_1 = |5| = 5 > 0$$

$$\delta_2 = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 1 > 0$$

$$\delta_3 = \begin{vmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -2 - 2 = -4 < 0$$

$\Rightarrow$ מעורבת

ג.

$$\delta_1 = |-1| = -1 < 0$$

$$\delta_2 = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = -9 < 0$$

$$\delta_3 = \begin{vmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 5 \end{vmatrix} = -45 < 0$$

$\Rightarrow$ מעורבת

ד.

$$\delta_1 = |0| = 0 \not> 0$$

$$\delta_2 = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -1 < 0$$

$$\delta_3 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} = -5 < 0$$

$\Rightarrow$ מעורבת

2. כדי שהמט' $\begin{pmatrix} a & 3 & -1 \\ 3 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ תהיה חיובית, אנו צריכים:

אם

$$\delta_1 = a > 0$$

$$\delta_2 = \begin{vmatrix} a & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 2a - 9 > 0$$

$$\delta_3 = \begin{vmatrix} a & 3 & -1 \\ 3 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} a & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -2 + 3(2a-9) = 6a - 29 > 0$$

ה

$\Leftarrow$ $a>0$ וגם $a>\frac{9}{2}$ וגם $a>\frac{29}{6}$

$\Leftarrow$ עבור $a>\frac{29}{6}$ המט' תהיה חיובית.

3. א.

$$Q(x,y) = x^2-10xy-3y^2$$

$$\Rightarrow A=\begin{pmatrix}1 & -5\\ -5 & -3\end{pmatrix} \quad , \quad Q(x,y) = (x\ y)A\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$$

ב.

$$Q(x,y,z) = x^2-10xy-3y^2$$

$$\Rightarrow A=\begin{pmatrix}1 & -5 & 0\\ -5 & -3 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \quad , \quad Q(x,y,z) = (x,y,z)A\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}$$

ג.

$$Q(x,y,z,w) = 3x^2-12y^2-w^2-6xy+10yz+11yw-4xw$$

$$\Rightarrow A=\begin{pmatrix}3 & -3 & 0 & -2\\ -3 & -12 & 5 & 5\frac{1}{2}\\ 0 & 5 & 0 & 0\\ -2 & 5\frac{1}{2} & 0 & -1\end{pmatrix} \quad , \quad Q(x,y,z,w) = (x,y,z,w)A\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\\ w\end{pmatrix}$$

ד.

$$Q(x_1,\dots,x_n) = \sum_{i=1}^{n} i x_i^2 + \sum_{i=1}^{n-1} 2x_i x_{i+1} =$$

$$= (x_1^2+2x_2^2+3x_3^2+\dots+nx_n^2) + \sum_{i=1}^{n-1} 2x_i x_{i+1}$$

$$\Rightarrow A=\begin{pmatrix}1 & 1 & & & & 0\\ 1 & 2 & 1 & & & \\ & 1 & 3 & 1 & & \\ & & 1 & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & n-1 & 1\\ 0 & & & & 1 & n\end{pmatrix} \quad , \quad Q(x_1,\dots,x_n) = (x_1,\dots,x_n)A\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$$

③

$$Q(x,y,z) = (x\ \ y\ \ z)\,A\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}, \quad A=\begin{pmatrix}1&2&0\\2&8&-5\\0&-5&3\end{pmatrix}$$ (א) (ט.)

$$\Rightarrow Q(x,y,z) = x^2+8y^2+3z^2+4xy-10yz$$

$$Q(x,y,z,w) = (x\ \ y\ \ z\ \ w)\,A\begin{pmatrix}x\\y\\z\\w\end{pmatrix}, \quad A=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&2&-4&0\\3&-4&3&0\\4&0&0&4\end{pmatrix}$$ (ב.)

$$\Rightarrow Q(x,y,z,w) = x^2+2y^2+3z^2+4w^2+4xy+6xz+8xw-8yz$$

$$Q(x,y) = (x\ \ y)\,A\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}, \quad A=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$$ (ג.)

$$\Rightarrow Q(x,y) = x^2+y^2+2xy = (x+y)^2$$

$$Q(x,y,z) = x^2-z^2-4xy+4yz$$ (ד.)

$$\Rightarrow Q(x,y,z) = (x\ \ y\ \ z)\,A\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}, \quad A=\begin{pmatrix}1&-2&0\\-2&0&2\\0&2&-1\end{pmatrix}$$

A סימטרית ולכן לכסינה אורתוגונלית. נלכסן אורתוגונלית את A:

$$O_A(\lambda) = |\lambda I-A| = \begin{vmatrix}\lambda-1&2&0\\2&\lambda&-2\\0&-2&\lambda+1\end{vmatrix} = (\lambda-1)\begin{vmatrix}\lambda&-2\\-2&\lambda+1\end{vmatrix} -2\begin{vmatrix}2&-2\\0&\lambda+1\end{vmatrix} =$$

$$= (\lambda-1)(\lambda^2+\lambda-4) - 2\cdot 2(\lambda+1) = \lambda^3-\lambda^2+\lambda^2-\lambda-4\lambda+4-4\lambda-4 =$$

$$= \lambda^3-9\lambda = \lambda(\lambda^2-9) = \lambda(\lambda+3)(\lambda-3)$$

⇐ ע"ע של A הם $\lambda_1=0$, $\lambda_2=3$, $\lambda_3=-3$ כ"א מר"א 1.

⊛ עבור $\lambda=0$:

$$\begin{pmatrix}-1&2&0\\2&0&-2\\0&-2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \Longrightarrow x=z=2y$$

⇐ ו"ע של A המתאים לע"ע $\lambda=0$ הוא $(2,1,2)$

4

$$\|(2,1,2)\| = \sqrt{4+1+4} = \sqrt{9} = 3$$

⇐ ו"ע מנורמל של A המתאים ל-$\lambda=0$ הוא $\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$

עבור $\lambda=3$:

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow x = -2z,\ y = 2z$$

⇐ ו"ע מתאים הוא $(-2, 2, 1)$

⇐ ו"ע מנורמל מתאים הוא $\left(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$

עבור $\lambda=-3$:

$$\begin{pmatrix} -4 & 2 & 0 \\ 2 & -3 & -2 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow y = 2x,\ z = -2x$$

⇐ ו"ע מתאים הוא $(1, 2, -2)$

⇐ ו"ע מנורמל מתאים הוא $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right)$

לסיכום:

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix},\quad P = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

$A = PDP^t$ משום כי P אורתוגונלית !

לכן הצורה הקנונית המתאימה היא

$$Q\begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \\ \tilde{z} \end{pmatrix} = (\tilde{x}\ \tilde{y}\ \tilde{z})\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \\ \tilde{z} \end{pmatrix} = 3\tilde{y}^2 - 3\tilde{z}^2$$

כאשר:

$$\begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \\ \tilde{z} \end{pmatrix} = P^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = P^t\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2x+y+2z}{3} \\ \frac{-2x+2y+z}{3} \\ \frac{x+2y-2z}{3} \end{pmatrix}$$

P אורתוגונלית

(5)

(6) נמצא ראשית את התבנית הריבועית

נכתוב את Q בצורה מטריצית: $Q(x,y) = 4x^2+4y^2+4xy$.

$$Q(x,y) = (x\ \ y)\begin{pmatrix}4&2\\2&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

המטריצה ~~אורתוגונלית~~ המייצגת את התבנית הריבועית Q, $A=\begin{pmatrix}4&2\\2&4\end{pmatrix}$.

נבדוק כי A סימטרית.

$$\chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix}\lambda-4 & -2\\ -2 & \lambda-4\end{vmatrix} = (\lambda-4)^2-4 = \lambda^2-8\lambda+12 = (\lambda-6)(\lambda-2)$$

$\Leftarrow$ ע"ע של A הם $\lambda=6, \lambda=2$.

לכן צורה קנונית של Q במישור $\tilde{x},\tilde{y}$ היא

$$Q(\tilde{x},\tilde{y}) = (\tilde{x}\ \ \tilde{y})\begin{pmatrix}6&0\\0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\tilde{x}\\ \tilde{y}\end{pmatrix} = 6\tilde{x}^2+2\tilde{y}^2$$

במישור x,y העקום הוא $4x^2+4y^2+4xy=9$,

ומאחר שמצאנו את השינוי הבסיס שלנו

לכן במישור $\tilde{x},\tilde{y}$ המשוואה המתאימה לעקום תהיה

$$6\tilde{x}^2+2\tilde{y}^2=9$$

כלומר $\frac{x^2}{\left(\frac{3}{2}\right)}+\frac{y^2}{\left(\frac{9}{2}\right)}=1$

שזוהי משוואת אליפסה!

הערה: אין צורך במציאת מטריצה P, כיוון שלא נדרשנו רק לזהות את העקום המתואר ע"י המשוואה, ולא את המעבר אליו!

תרגיל מס' 1 - מספרים מרוכבים

הגשה עד: 30.10.2001 .

א. מודול, ארגומנט וצורה קוטבית:

מצאו מודול וארגומנט של המספרים הבאים והעבירו אותם לצורה קוטבית

1. $z = 11$ 2. $z = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$ 3. $z = \cot\alpha + i$

4. $z = -1 - i$ 5. $z = -25i$

ב. פעולות יסודיות במרוכבים:

יהיו $p = 2 - 2i$, $v = 5$, $u = 4i$, $w = 1 + i$, $z = 4 + 3i$

חשבו:

1. $p - 3w + \frac{u}{p + v}$ 2. $\bar{z} + |w| - 3p$ 3. z^3

4. יהיו $w = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$, $z = 2 - 2i$. **חשב** $\arg\left(\frac{z^3 \bar{w}}{\bar{z} w}\right)$.

ג. פתרון משוואות במספרים מרוכבים:

מצאו לכל משוואה את כל פתרונותיה.

1. $2z^2 = 3\bar{z}$ 2. $z^2 + z + 1 = 0$ 3. $|z| + z = 2 + i$

ד. מקומות גיאומטריים:

מהו המקום הגיאומטרי של כל המספרים המרוכבים המקיימים:

1. $\mathrm{Im}(z) < -3$ 2. $1 < |z - 2| < 2$ 3. $\pi/3 < \arg z < 2\pi/3$

ה. תכונות המספרים המרוכבים:

1. הוכיחו כי $\forall z \neq 0$ $\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$ וחשבו את הביטוי $1 + \{[(1+i)^{-1} + 1]^{-1} + 1\}^{-1}$.
2. הוכח או הפרך: לכל z_1, z_2 מרוכבים, קיים k ממשי כך ש- $z_1\bar{z}_2 - \bar{z}_1 z_2 = ki$.
3. הוכח כי הביטוי $(z + 1 - 2i)^{1996} + (\bar{z} + 1 + 2i)^{1996}$ ממשי לכל z מרוכב.
4. הוכח או הפרך: לכל z,w מרוכבים המקיימים $\mathrm{Im}(z) \neq 0$, $z \neq 0$

הביטוי $\frac{z\cdot w+\bar{z}\cdot\overline{w}}{w-\overline{w}}$ הוא מדומה טהור.

5. יהי $z=\frac{1-ti}{1+ti}$ מספר מרוכב כאשר t ממשי. מהו $|z|$?

6. פשט את הביטוי $\frac{3(z-i)}{1+iz}$.

בהצלחה!

1

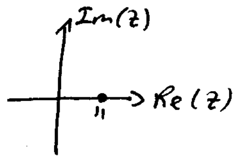
פתרון תרגיל מס' 1

שאלה א':

1)

$$z = 11 \Rightarrow |z| = 11 \quad , \quad \alpha = \arg(z) = 0$$

$$\Rightarrow z = 11 = 11\left(\cos(0) + i\sin(0)\right) = 11 e^{0i}$$



2)

$$z = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$$

$$|z| = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 1$$

$$tg\alpha = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3} \Rightarrow \frac{\pi}{3}$$

$$\Rightarrow z = e^{\frac{\pi}{3} i}$$

3)

$$z = \cot\alpha + i$$

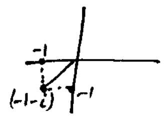
$$|z| = \sqrt{\cot^2\alpha + 1} = \sqrt{\frac{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha}{\sin^2\alpha}} = \frac{1}{\sqrt{\sin^2\alpha}} = \frac{1}{|\sin\alpha|}$$

$$tg(\arg z) = \frac{1}{\cot\alpha} = tg\alpha \Rightarrow \arg z = \alpha$$

$$\Rightarrow z = \frac{1}{|\sin\alpha|} e^{\alpha i}$$

4)

$$z = -1 - i$$



$$|z| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

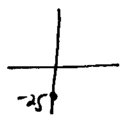
$$tg\alpha = \frac{-1}{-1} = 1 \Rightarrow \alpha = \frac{5\pi}{4}$$

$$\Rightarrow z = \sqrt{2}\, e^{5\pi/4\, i}$$

5)

$$z = -25i \Rightarrow |z| = 25, \quad \arg z = \frac{3\pi}{2}$$

$$\Rightarrow z = 25 e^{3\pi/2\, i}$$



שאלה ב':

1)

$$p - 3w + \frac{4}{p+v} = (2-2i) - 3(1+i) + \frac{4i}{(2-2i)+5} =$$

$$= (2-2i) + (-3-3i) + \frac{4i(7+2i)}{(7-2i)(7+2i)} = -1-5i + \frac{28i - 8}{49+4} =$$

$$= -1-5i + \frac{28}{53} i - \frac{8}{53} = -1\frac{8}{53} + \left(\frac{28}{53} - 5\right) i$$

②

$\bar{z} + |w| - 3p = 4-3i + \sqrt{1+1} - 6 + 6i = (-2+\sqrt{2}) + 3i$ (2

$z^3 = (4+3i)^3 = 64 + 144i - 108 - 27i = -44 + 117i$ (3

$\boxed{(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3b^2a + b^3}$

$arg\left(\frac{z^3\bar{w}}{\bar{z}w}\right) = arg\left(\frac{z^3\bar{w}}{\bar{z}w}\frac{z\bar{w}}{z\bar{w}}\right) = arg\left(\frac{z^4(\bar{w})^2}{|z|^2|w|^2}\right) =$ (4

$= arg\left(\frac{(2-2i)^4\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^2}{|2-2i|^2\left|\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right|^2}\right) = arg\left(\frac{(-8i)^2\left(\frac{1}{4}-\frac{\sqrt{3}}{2}i-\frac{3}{4}\right)}{8\cdot 1}\right) =$

$= arg\left(\frac{-64\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)}{8}\right) = arg(4+4\sqrt{3}i)$

$\Rightarrow tg\left(arg(4+4\sqrt{3}i)\right) = \frac{4\sqrt{3}}{4} = \sqrt{3} \Rightarrow arg(4+4\sqrt{3}i) = \frac{\pi}{3}$

סעיף ג:

$2z^2 = 3\bar{z}$ (4

נציב $z=a+bi$ ונקבל:

$2(a+bi)^2 = 3(a-bi)$

$2a^2 + 4abi - 2b^2 = 3a - 3bi$

$\Rightarrow \begin{cases} 2a^2 - 2b^2 = 3a & (1) \\ 4ab = -3b & (2) \end{cases}$

(2) $4ab + 3b = 0$

$b(4a+3) = 0$

$b=0$ או $a = -\frac{3}{4}$

$(b=0 \to (1))$ $2a^2 = 3a$

$a=0$

$2a=3$

$a=\frac{3}{2}$

$z_1 = 0$, $z_2 = \frac{3}{2}$

$\left(a=-\frac{3}{4} \to (1)\right)$ $2\cdot\frac{9}{16} - 2b^2 = -\frac{9}{4}$

$b^2 = \frac{27}{16}$

$b = \pm\frac{3\sqrt{3}}{4}$

$z_3 = -\frac{3}{4} + \frac{3\sqrt{3}}{4}i$

$z_4 = -\frac{3}{4} - \frac{3\sqrt{3}}{4}i$

③

ב)

$$z^2+z+1=0$$

$$z_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{1-4}}{2}=\frac{-1\pm\sqrt{-3}}{2}=\frac{-1\pm\sqrt{3i^2}}{2}=\frac{-1\pm 3i}{2}$$

$$z_1=-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}i\ ,\quad z_2=-\frac{1}{2}-\frac{3}{2}i$$

ג)

$$|z|+z=2+i$$

נציב $z=a+bi$ ונקבל:

$$|a+bi|+a+bi=2+i$$

$$\sqrt{a^2+b^2}+a+bi=2+i$$

$$\Rightarrow \begin{cases}\sqrt{a^2+b^2}+a=2\\ b=1\end{cases} \Rightarrow \sqrt{a^2+1}=2-a \quad /()^2$$

$$\cancel{a^2}+1=4-4a+\cancel{a^2}$$

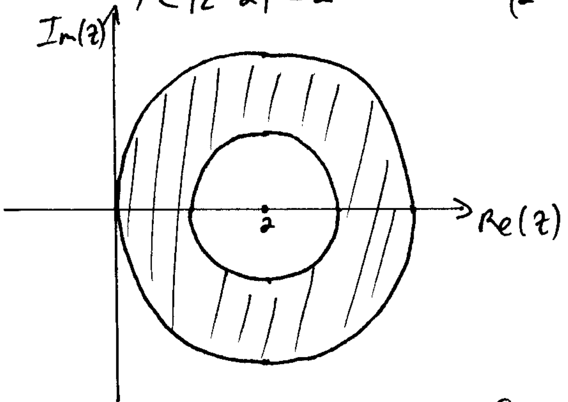
$$4a=3$$

$$a=\frac{3}{4} \qquad \Rightarrow z=\frac{3}{4}+i$$

סוף ב׳ :)

ב)

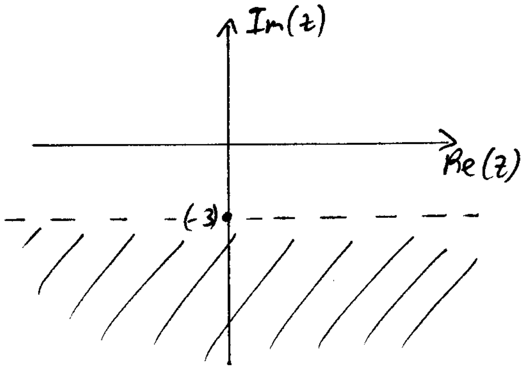
$$1<|z-2|<2$$



אלו כל הנק׳ שבין שני המעגלים, הראשון ברדיוס 1 והשני ברדיוס 2 שמרכזם בנק׳ $z=2$.

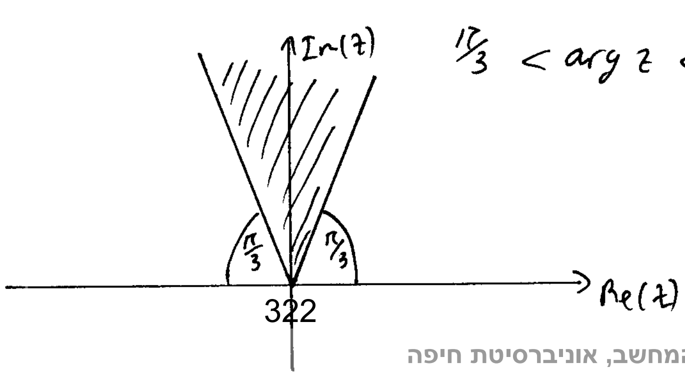
ד)

$$Im(z)<-3$$



③

$$\frac{\pi}{3}<\arg z<\frac{2\pi}{3}$$



שאלה ה':

א) הוכחה - בהרצאה.

$$1+\left\{\left[(1+i)^{-1}+1\right]^{-1}+1\right\}^{-1}=1+\left\{\left[\frac{1-i}{2}+1\right]^{-1}+1\right\}^{-1}=$$

$$=1+\left\{\left[\frac{3}{2}-\frac{1}{2}i\right]^{-1}+1\right\}^{-1}=1+\left\{\frac{\frac{3}{2}+\frac{1}{2}i}{\frac{9}{4}+\frac{1}{4}}+1\right\}^{-1}=$$

$$=1+\left\{\frac{3}{5}+\frac{1}{5}i+1\right\}^{-1}=1+\left\{\frac{8}{5}+\frac{1}{5}i\right\}^{-1}=1+\frac{\frac{8}{5}-\frac{1}{5}i}{\frac{64}{25}+\frac{1}{25}}=$$

$$=1+\frac{5}{13}\left(\frac{8}{5}-\frac{1}{5}i\right)=1+\frac{8}{13}-\frac{1}{13}i=1\frac{8}{13}-\frac{1}{13}i$$

ב) הטענה נכונה. נוכיח:

נסמן $a=z_1\bar{z_2}$ אזי

$$z_1\bar{z_2}-\bar{z_1}z_2=a-\bar{a}=Im(a)\cdot 2i$$

לכן נבחר $k=2Im(a)$! וזה הינו ממשי ולכן הטענה נכונה.

מש"ל.

ג) נסמן $t=(z+1-2i)^{1996}+(\bar{z}+1+2i)^{1996}$

צ"ל:

$$Im(t)=\frac{t-\bar{t}}{2i}=0$$

$$\bar{t}=\overline{(z+1-2i)^{1996}+(\bar{z}+1+2i)^{1996}}=\overline{(z+1-2i)}^{1996}+\overline{(\bar{z}+1+2i)}^{1996}=$$

$$=(\bar{z}+1+2i)^{1996}+(z+1-2i)^{1996}=t$$

$$\Rightarrow Im(t)=\frac{t-\bar{t}}{2i}=\frac{t-t}{2i}=0$$

מש"ל.

ד) הטענה נכונה. נוכיח:

$$\frac{zw+\bar{z}\bar{w}}{w-\bar{w}}=\frac{zw+\overline{(zw)}}{w-\bar{w}}=\frac{2Re(zw)}{2i\,Im(w)}=$$

$$=\frac{Re(zw)}{Im(w)}(-i)=\underbrace{i\cdot\frac{-Re(zw)}{Im(w)}}_{\text{מדומה טהור}}$$

מש"ל.

5

$$|z| = \left|\frac{1-ti}{1+ti}\right| = \frac{|1-ti|}{|1+ti|} = \frac{\sqrt{1+(-t)^2}}{\sqrt{1+t^2}} = \qquad 5$$

$$\boxed{\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}}$$

t ממשי

$$= \frac{\sqrt{1+t^2}}{\sqrt{1+t^2}} = 1$$

$$\frac{3(z-i)}{1+iz} = \frac{3(z-i)(1-iz)}{(1+iz)(1-iz)} = \frac{3(z-i-iz^2-z)}{1+z^2} = \qquad 6$$

$$= \frac{-3i(1+z^2)}{1+z^2} = -3i$$

תרגיל מס' 2

הגשה עד: 6.11.2001

מספרים מרוכבים – חזקות ושורשים

1. חשבו: א. $(3+\sqrt{3}i)^{10}$ ב. $\left(\dfrac{1+i}{i}\right)^6$

2. מצאו את כל הפתרונות של המשוואות הבאות:
א. $(z+2)^4=81$ ב. $z^3(1+i)+i-1=0$

חלוקת פולינומים

3. פרק לגורמים את הפולינום $x^4+4x^3-2x^2-12x+9$.
4. מצאו מנה ושארית בחילוק של x^5+3x+1 ב- x^3+x-2 .

מטריצות

5. עבור כל אחת מהמטריצות הבאות קבע האם היא ריבועית, אלכסונית, סקלרית, משולשית עליונה, משולשית תחתונה, סימטרית או אנטי-סימטרית:

א. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ב. $\begin{pmatrix} 0 & 4 & 5 \\ -4 & 0 & 6 \\ -5 & -6 & 0 \end{pmatrix}$ ג. I ד. $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

6.

נתון: $C=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

חשבו: א. ABC^t ב. B^tB-I

7. מצא את קבוצת כל המטריצות B מסדר 2×2 המקיימות $AB=BA$ עבור $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

8. הוכח או הפרך כל אחת מן הטענות הבאות:
א. סכום שתי מטריצות משולשות הוא מטריצה משולשת.
ב. סכום שתי מטריצות משולשות עליונות הוא מטריצה משולשת עליונה.
ג. סכום שתי מטריצות משולשות תחתונות הוא מטריצה משולשת תחתונה.

בהצלחה!

①

פתרון תרגיל מס' 2

1. א.

$z = 3+\sqrt{3}i$

$|z| = \sqrt{9+3} = \sqrt{12}$, $tg(\arg z) = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \arg z = \frac{\pi}{6}$

$$(3+\sqrt{3}i)^{10} = \left(\sqrt{12}\, e^{\frac{\pi}{6}i}\right)^{10} = (\sqrt{12})^{10}\cdot e^{\frac{10\pi}{6}i} = 12^5 \cdot e^{\frac{5\pi}{3}i}$$

$$= 12^5\cdot e^{\pi i}\cdot e^{\frac{2\pi}{3}i} = -12^5\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right) = -12^5\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$$

ב.

$$z = \frac{1+i}{i} = \frac{i(1+i)}{i\cdot i} = -i(1+i) = 1-i = \sqrt{2}\, e^{\frac{7\pi}{4}i}$$

$$z^6 = (\sqrt{2})^6 e^{\frac{42\pi}{4}i} = 8\, e^{\frac{\pi}{2}i} = 8\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right) = 8i$$

2. א.

$(z+2)^4 = 81$

נציב $t = z+2$ ונקבל $t^4 = 81$

$$t^4 = 81 = 81e^{0i}$$

$$t_0 = \sqrt[4]{81}\, e^{\frac{0+2\pi\cdot 0}{4}i} = 3$$

$$t_1 = 3e^{\frac{2\pi}{4}i} = 3e^{\frac{\pi}{2}i} = 3\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right) = 3i$$

$$t_2 = 3e^{\frac{4\pi}{4}i} = 3e^{\pi i} = -3$$

$$t_3 = 3e^{\frac{6\pi}{4}i} = 3e^{\frac{3\pi}{2}i} = 3\left(\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}\right) = -3i$$

סה"כ לכן:

$z_0 = t_0-2 = 3-2 = 1$

$z_1 = t_1-2 = 3i-2$

$z_2 = t_2-2 = -3-2 = -5$

$z_3 = t_3-2 = -3i-2$

ב.

$$z^3(1+i)+i-1=0$$

$$z^3=\frac{1-i}{1+i}=\frac{(1-i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}=\frac{1-2i-1}{1+1}=\frac{-2i}{2}=-i=1e^{\frac{3\pi}{2}i}$$

$$z_0=\sqrt[3]{1}\,e^{\frac{\frac{3\pi}{2}+2\pi\cdot 0}{3}i}=e^{\frac{\pi}{2}}=\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}=i$$

$$z_1=1\,e^{\frac{\frac{3\pi}{2}+2\pi}{3}i}=e^{\frac{7\pi}{6}i}=-e^{\frac{\pi}{6}i}=-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$$

$$z_2=1\,e^{\frac{\frac{3\pi}{2}+4\pi}{3}i}=e^{\frac{11\pi}{6}i}=-e^{\frac{5\pi}{6}i}=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$$

3.

$$P(x)=x^4+4x^3-2x^2-12x+9=(x-1)(x^3+5x^2+3x-9)=$$

$$=(x-1)^2(x^2+6x+9)=(x-1)^2(x+3)^2$$

4.

$$\begin{array}{l} \quad x^2-1 \\ \hline x^5+3x+1 \;\big|\; x^3+x-2 \\ -\;x^5+x^3-2x^2 \\ \hline \quad -x^3+2x^2+3x+1 \\ -\;-x^3-x+2 \\ \hline \qquad 2x^2+4x-1 \end{array}$$

$$\Rightarrow\quad x^5+3x+1=(x^2-1)(x^3+x-2)+2x^2+4x-1$$

5. א. ריבועית, אלכסונית, משולשית עליונה, משולשית תחתונה, סימטרית.

ב. ריבועית, אנטי סימטרית.

ג. ריבועית, אלכסונית, סקלרית, משולשית עליונה, משולשית תחתונה, סימטרית.

ד. כלום.

6. א.

$$ABC^t=\underset{2\times 3}{\begin{pmatrix}1&2&3\\-2&0&1\end{pmatrix}}\left[\underset{3\times 4}{\begin{pmatrix}2&3&1&1\\0&0&-1&1\\2&1&0&2\end{pmatrix}}\underset{4\times 4}{\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}}\right]=$$

$$=\underset{2\times 3}{\begin{pmatrix}1&2&3\\-2&0&1\end{pmatrix}}\underset{3\times 4}{\begin{pmatrix}2&0&1&0\\0&0&1&0\\2&0&2&0\end{pmatrix}}=\underset{2\times 4}{\begin{pmatrix}7&0&9&0\\-2&0&0&0\end{pmatrix}}$$

3

ב.

$$B^tB - I = \underset{4\times 3}{\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}} \underset{3\times 4}{\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}} - I =$$

$$= \underset{4\times 4}{\begin{pmatrix} 8 & 8 & 2 & 6 \\ 8 & 10 & 3 & 5 \\ 2 & 3 & 2 & 0 \\ 6 & 6 & 0 & 6 \end{pmatrix}} - \underset{4\times 4}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}} = \underset{4\times 4}{\begin{pmatrix} 7 & 8 & 2 & 6 \\ 8 & 9 & 3 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 6 & 6 & 0 & 5 \end{pmatrix}}$$

7. נסמן:

$$B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a+c & b+d \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & a+b \\ c & c+d \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} a+c = a & \Rightarrow c = 0 \\ b+d = a+b & \Rightarrow a = d \\ c = c & \\ d = c+d & \Rightarrow c = 0 \end{cases}$$

לכן כל המט' הן מטריצות מן הצורה

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$$

8. א. הטענה אינה נכונה. נביא דוגמא נגדית:

למשל $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ משולשית! $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ משולשית

אבל $A+B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ לא משולשית!

(4)

ב. הטענה נכונה. נוכיח:

תהיינה:

$A = [a_{ij}]\ ,\ a_{ij} = 0 \quad \forall i>j$

$B = [b_{ij}]\ ,\ b_{ij} = 0 \quad \forall i>j$

אני מקבל

$A+B = [a_{ij}] + [b_{ij}] = [a_{ij} + b_{ij}]\ ,\ a_{ij} + b_{ij} = 0 \quad \forall i>j$.

מש"ל.

ג. כמו ב' הטענה נכונה, בהוכחה יש להחליף $i>j$ ב- $i<j$.

תרגיל מס' 3 - מטריצות

הגשה עד: 15.11.2001, 11:00

כפל מטריצות

.1

נתון: $C=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2&3&1&1\\0&0&-1&1\\2&1&0&2\end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\-2&0&1\end{pmatrix}$

חשבו: א. ABC^t ב. B^tB-I ב. C^tB

.2 מצא את קבוצת כל המטריצות B מסדר 2×2 המקיימות $AB=BA$ עבור $A=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$.

תכונות המטריצות

.3 הוכיחו:

א. אם A,B מטריצות מסדר $m\times n$ אזי A^tB-B^tA אנטי סימטרית.

ב. אם A,B מטריצות ריבועיות מאותו סדר ו- A סימטרית אזי B^tAB סימטרית.

ג. אם A,B מטריצות ריבועיות אנטי-סימטריות מאותו סדר אזי ABA אנטי-סימטרית.

.4 הוכח או הפרך: קיימת מטריצה $A\in R(2\times 3)$ כך שמתקיים $AA^t=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$.

.5 הוכיחו כי עבור A,B מטריצות ריבועיות מסדר n כלשהוא מתקיים $tr(\alpha A)=\alpha\cdot tr(A)$.

.6 הוכיחו כי אם A מטריצה ריבועית ו- T מטריצה ריבועית הפיכה מאותו סדר אזי $(T^{-1}AT)^n=T^{-1}A^nT$.

שאלת בונוס:

הוכח או הפרך: אם A מטריצה הפיכה שסכום אברי כל שורה שלה שווה ל- 1, אזי המטריצה ההופכית שלה מקיימת את אותו התנאי.

בהצלחה!

1

פתרון תרגיל מס' 3:

1. א.

$$ABC^t = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{2\times 3} \left[\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}}_{3\times 4} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{4\times 4} \right] =$$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{2\times 3} \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}}_{3\times 4} = \underbrace{\begin{pmatrix} 8 & 0 & 9 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{2\times 4}$$

ב)

$$B^tB - I = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}}_{4\times 3} \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}}_{3\times 4} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 8 & 8 & 2 & 6 \\ 8 & 10 & 3 & 5 \\ 2 & 3 & 2 & 0 \\ 6 & 5 & 0 & 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 8 & 2 & 6 \\ 8 & 9 & 3 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 6 & 5 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

ג)

$$\underbrace{C^t}_{4\times 4}\underbrace{B}_{3\times 4} \qquad 4 \neq 3$$

לא מוגדר!

2. נסמן:

$$B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

אזי נדרוש

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a+c & b+d \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & a+b \\ c & c+d \end{pmatrix}$$

② לכן:

$$\begin{cases} a+c=a \\ b+d=a+b \\ c=c \\ d=c+d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c=0 \\ d=a \end{cases}$$

לכן B הינה מהצורה:
$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$$

③ א)
$$\left(A^tB-B^tA\right)^t=\left(A^tB\right)^t-\left(B^tA\right)^t=B^t\left(A^t\right)^t-A^t\left(B^t\right)^t=$$
$$=B^tA-A^tB=-\left(A^tB-B^tA\right)$$

$\Leftarrow$ A^tB-B^tA אנטי-סימטרית.

ב)
$$\left(B^tAB\right)^t=\left[B^t(AB)\right]^t=(AB)^t\left(B^t\right)^t=\left(B^tA^t\right)B=$$
$$=B^tA^tB\underset{\boxed{\substack{A^t=A \\ \text{נתון}}}}{=}B^tAB$$

$\Leftarrow$ B^tAB סימטרית

ג)
$$(ABA)^t=\left((AB)A\right)^t=A^t(AB)^t=A^tB^tA^t\underset{\boxed{\substack{A^t=-A \\ B^t=-B}}}{=}(-A)(-B)(-A)=$$
$$=-ABA$$

$\Leftarrow$ ABA אנטי סימטרית.

④ הטענה אינה נכונה.

נניח בשלילה כי קיימת A כזו ונסמן כ- $A=\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}$

אזי
$$AA^t=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & d \\ b & e \\ c & f \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(3)

$$\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} a^2+b^2+c^2 & ad+be+cf \\ da+eb+fc & d^2+e^2+f^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} a^2+b^2+c^2=0 & (1) \\ ad+be+cf=1 & (2) \\ d^2+e^2+f^2=0 & (3) \end{cases}$$

לכן מ- (1) נקבל $a=b=c=0$

מ- (3) נקבל $d=e=f=0$

ואז $ad+be+cf=0 \neq 1$ סתירה ל- (2)

$\Leftarrow$ למערכת אין פתרון ולכן הנחת השלילה היא מוטעית

$\Leftarrow$ לא קיימת $A\in\mathbb{R}^{(2\times3)}$ כך ש $AA^t=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

(5) תהי $A=[a_{ij}]_{1\le i,j\le n}$ אזי:

$$tr(\alpha A) = tr[\alpha a_{ij}]_{1\le i,j\le n} = \sum_{i=1}^{n} \alpha a_{ii} = \alpha \sum_{i=1}^{n} a_{ii} = \alpha\, tr(A)$$

מש"ל.

(6)

$$(T^{-1}AT)^n = \overbrace{(T^{-1}AT)(T^{-1}AT)(T^{-1}AT)\ldots(T^{-1}AT)}^{n \text{ פעמים}} =$$

$$\underset{\boxed{\text{אסוציאטיביות של כפל מט'}}}{=} T^{-1}A\underbrace{(TT^{-1})}_{I}A\underbrace{(TT^{-1})}_{I}A\underbrace{(TT^{-1})}_{I}\ldots\underbrace{(TT^{-1})}_{I}AT =$$

$$= T^{-1}AIAIAI\ldots AIT = T^{-1}\underbrace{AAA\ldots A}_{n \text{ פעמים}}T = T^{-1}A^nT$$

4

שאלת בונוס:

הטענה נכונה. הוכחה:

תהי $A=[a_{ij}]_{1\le i,j\le n}$ מט' המקיימת $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}$ לכל $1\le i\le n$,

ויהי $V=\underbrace{(1,\dots,1)}_{n\text{ פעמים}} \in \mathbb{R}(1\times n)$.

טענת עזר: $\forall 1\le i\le n \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij}=1 \iff AV^t=V^t$

הוכחת טענת העזר:

כיוון א' $(\Leftarrow)$:

$$AV^t=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix} \underset{\boxed{\text{לפי הגדרת כפל מט'}}}{=} \begin{pmatrix}\sum_{j=1}^{n} a_{1j}\\ \sum_{j=1}^{n} a_{2j}\\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} a_{nj}\end{pmatrix} \underset{\boxed{\text{נתון } \sum_{j=1}^{n} a_{ij}=1 \text{ לכל } 1\le i\le n}}{=} \begin{pmatrix}1\\\vdots\\1\end{pmatrix}=V^t$$

כיוון ב' $(\Rightarrow)$:

$$AV^t=V^t$$
$$\Downarrow$$
$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\\vdots\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\\vdots\\1\end{pmatrix}$$

$\Downarrow$ (לפי הגדרת כפל מט')

$$\begin{pmatrix}\sum_{j=1}^{n} a_{1j}\\ \sum_{j=1}^{n} a_{2j}\\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} a_{nj}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix} \Longrightarrow \forall 1\le i\le n \ \sum_{j=1}^{n} a_{ij}=1$$

- סוף הוכחת טענת העזר -

המשך הוכחת הטענה: מתקיים לכן:

$$A^{-1}V^t \underset{\boxed{\text{לפי } V^t=AV^t \text{ טענת עזר}}}{=} A^{-1}(AV^t)=(A^{-1}A)V^t=IV^t=V^t$$

$\Leftarrow$ $A^{-1}V^t=V^t$, A^{-1} מקיימת את התנאי

$\Leftarrow$ ב- A^{-1} סכום איברי כל שורה שווה ל-1.

$\Leftarrow$ הטענה נכונה

מש"ל.

החוג למדעי המחשב – אלגברה לינארית , סמסטר א' תשס"ב

<u>תרגיל מס' 4</u>

<u>הגשה עד: 22.11.2001, 11:00</u>

<u>מטריצות והפיכות</u>

1. חשב את דרגת המטריצה

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 4 & 0 \\ -2 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

2. א)קבע לכל מטריצה עבור אילו ערכי a היא הפיכה.
ב) מצא את המטריצה ההופכית עבור a=0 (באם היא הפיכה עבור a זה).

א. $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 4 \\ a & 4 & 10 & 1 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$

ב. $\begin{pmatrix} 3+a & 1 & 1-a \\ 1 & 3 & 1 \\ 1-a & 1 & 3+a \end{pmatrix}$

<u>מערכות משוואות לינאריות</u>

3. פתור בשיטת ההצבה:

$$\begin{cases} x+2y+3z=10 \\ 2x+3y-3z=9 \\ x-5z=-2 \end{cases}$$

4. פתור בשיטת גאוס/גאוס-ג'ורדן:

$$\begin{cases} 5x-3y+z=2 \\ -x+2y=1 \\ x-y+4z=0 \end{cases}$$

5. נתונה מערכת המשוואות:

$$\begin{cases} x+y+z=6 \\ 2x-y+4z=2 \\ 3x+(a^2-4)z=a+5 \end{cases}$$

מצא עבור אילו ערכי a יש למערכת א) פתרון יחיד ב) אינסוף פתרונות ג) אין פתרון
הציגו את הפתרונות במקרים בהם הם קיימים.

6. מצא עבור אילו ערכי k,p,m למערכת יש א) פתרון יחיד ב) אינסוף פתרונות ג) אין פתרון

$$\begin{cases} x-y+3z=k \\ 2x+y-z=m \\ 3x+3y-5z=p \end{cases}$$

בהצלחה!

פתרון תרגיל 4

(1)

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 4 & 0 \\ -2 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{R_3-R_1\to R_3 \\ R_4-2R_1\to R_4}]{R_2+2R_1\to R_2} \begin{pmatrix} 1 & 5 & 4 & 0 \\ 0 & 13 & 9 & 1 \\ 0 & -4 & -3 & 1 \\ 0 & -8 & -8 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[13R_4+8R_2\to R_4]{13R_3+4R_2\to R_3} \begin{pmatrix} 1 & 5 & 4 & 0 \\ 0 & 13 & 9 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 17 \\ 0 & 0 & -32 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow{3R_4-32R_3\to R_4} \begin{pmatrix} 1 & 5 & 4 & 0 \\ 0 & 13 & 9 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 17 \\ 0 & 0 & 0 & -559 \end{pmatrix}$$

$\Leftarrow$ דרגת המט' היא 4

(2) (א)

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 4 \\ a & 4 & 10 & 1 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{3R_3-R_1\to R_3 \\ 3R_4-2R_1\to R_4}]{3R_2-aR_1\to R_2} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 12-a & 30-a & 3-4a \\ 0 & 20 & 50 & 5 \\ 0 & 4 & 10 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_4-\frac{1}{5}R_3\to R_4} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 12-a & 30-a & 3-4a \\ 0 & 20 & 50 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

אין צורך להמשיך בתהליך כי לכל ערך של a המט' לא תהיה הפיכה

(ב)

$$\begin{pmatrix} 3+a & 1 & 1-a \\ 1 & 3 & 1 \\ 1-a & 1 & 3+a \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1+R_3\to R_1} \begin{pmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1-a & 1 & 3+a \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_1\cdot\frac{1}{2}\to R_1} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1-a & 1 & 3+a \end{pmatrix} \xrightarrow[2R_3-(1-a)R_1\to R_3]{2R_2-R_1\to R_2} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & a+1 & 4+4a \end{pmatrix}$$

(2)

$$\xrightarrow{R_2\cdot\frac{1}{3}\to R_2}\begin{pmatrix}2 & 1 & 2\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & a+1 & 4(a+1)\end{pmatrix}\xrightarrow{R_3-(a+1)R_2\to R_3}\begin{pmatrix}2 & 1 & 2\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 4(a+1)\end{pmatrix}$$

$\Leftarrow$ המט' אינה הפיכה עבור $4(a+1)=0$

$\Leftarrow$ " " " " $a=-1$ $\Leftarrow$ המט' הפיכה עבור $a\neq -1$.

נהפוך את המט' עבור $a=0$:

$$\left(\underbrace{\begin{matrix}3 & 1 & 1\\ 1 & 3 & 1\\ 1 & 1 & 3\end{matrix}}_{A}\;\middle|\;\underbrace{\begin{matrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{matrix}}_{I}\right)\xrightarrow[3R_3-R_1\to R_3]{3R_2-R_1\to R_2}\left(\begin{matrix}3 & 1 & 1\\ 0 & 8 & 2\\ 0 & 2 & 8\end{matrix}\;\middle|\;\begin{matrix}1 & 0 & 0\\ -1 & 3 & 0\\ -1 & 0 & 3\end{matrix}\right)$$

$$\xrightarrow[4R_3-R_2\to R_3]{8R_1-R_2\to R_1}\left(\begin{matrix}24 & 0 & 6\\ 0 & 8 & 2\\ 0 & 0 & 30\end{matrix}\;\middle|\;\begin{matrix}9 & -3 & 0\\ -1 & 3 & 0\\ -3 & -3 & 12\end{matrix}\right)\xrightarrow[R_3\cdot\frac{1}{3}\to R_3]{R_1\cdot\frac{1}{3}\to R_1}\left(\begin{matrix}8 & 0 & 2\\ 0 & 8 & 2\\ 0 & 0 & 10\end{matrix}\;\middle|\;\begin{matrix}3 & -1 & 0\\ -1 & 3 & 0\\ -1 & -1 & 4\end{matrix}\right)$$

$$\xrightarrow[5R_2-R_3\to R_2]{5R_1-R_3\to R_1}\left(\begin{matrix}40 & 0 & 0\\ 0 & 40 & 0\\ 0 & 0 & 10\end{matrix}\;\middle|\;\begin{matrix}16 & -4 & -4\\ -4 & 16 & -4\\ -1 & -1 & 4\end{matrix}\right)\xrightarrow[R_2\cdot\frac{1}{40}\to R_1,\; R_3\cdot\frac{1}{10}\to R_3]{R_1\cdot\frac{1}{40}\to R_1}\left(\underbrace{\begin{matrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{matrix}}_{I}\;\middle|\;\underbrace{\begin{matrix}\frac{2}{5} & -\frac{1}{10} & -\frac{1}{10}\\ -\frac{1}{10} & \frac{2}{5} & -\frac{1}{10}\\ -\frac{1}{10} & -\frac{1}{10} & \frac{2}{5}\end{matrix}}_{A^{-1}}\right)$$

$$\Leftarrow\quad A^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{2}{5} & -\frac{1}{10} & -\frac{1}{10}\\ -\frac{1}{10} & \frac{2}{5} & -\frac{1}{10}\\ -\frac{1}{10} & -\frac{1}{10} & \frac{2}{5}\end{pmatrix}$$

(3.)

$$\begin{cases} x+2y+3z=10 & (1)\\ 2x+3y-3z=9 & (2)\\ x-5z=-2 \implies x=5z-2 & (3)\end{cases}$$

$(3)\longrightarrow(2),(1)$

$$\begin{cases}5z-2+2y+3z=10\\ 2(5z-2)+3y-3z=9\end{cases}$$

$$\begin{cases}2y+8z=12\\ 3y+7z=13\end{cases}$$

③

$$\begin{cases} y+4z=6 \implies y=6-4z & (2) \\ 3y+7z=13 & (1) \end{cases}$$

$(2)\to(1)$ $\quad 3(6-4z)+7z=13$

$-5z=-5$

$\implies z=1,\ y=2,\ x=3$

.4

$$\begin{cases} 5x-3y+z=2 \\ -x+2y=1 \\ x-y+4z=0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 5 & -3 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 4 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[5R_3-R_1\to R_3]{5R_2+R_1\to R_2} \begin{pmatrix} 5 & -3 & 1 & 2 \\ 0 & 7 & 1 & 7 \\ 0 & -2 & 19 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{7R_3+2R_2\to R_3} \begin{pmatrix} 5 & -3 & 1 & 2 \\ 0 & 7 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 135 & 0 \end{pmatrix} \implies \begin{cases} 5x-3y+z=2 \\ 7y+z=7 \\ z=0 \end{cases}$$

$x=1,\ y=1,\ z=0 \quad \Leftarrow$

.5

$$\begin{cases} x+y+z=6 \\ 2x-y+4z=2 \\ 3x+(a^2-4)z=a+5 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 4 & 2 \\ 3 & 0 & a^2-4 & a+5 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3-3R_1\to R_3]{R_2-2R_1\to R_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -3 & 2 & -10 \\ 0 & -3 & a^2-7 & a-13 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_3-R_2\to R_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -3 & 2 & -10 \\ 0 & 0 & a^2-9 & a-3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -3 & 2 & -10 \\ 0 & 0 & (a-3)(a+3) & (a-3) \end{pmatrix}$$

(5)

$\text{rank}(A) = \text{rank}(A|b) = 2 < 3 = n$ (*) עבור $a=3$

⇐ אינסוף פתרונות

$2 = \text{rank}(A) < \text{rank}(A|b) = 3$ (*) עבור $a=-3$

⇐ אין פתרון

$\text{rank}(A) = \text{rank}(A|b) = 3$ (*) עבור $a \neq \pm 3$

⇐ פתרון יחיד

<u>נמצא פתרונות:</u>

(*) עבור $a=3$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -3 & 2 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x+y+z=6 \\ -3y+2z=-10 \end{cases}$$

⇐ פ.כללי הוא

$$\left(\frac{22-5y}{2}, y, \frac{3y-10}{2}\right)$$

(*) עבור $a \neq \pm 3$:

$$\begin{cases} x+y+z=6 \\ -3y+2z=-10 \\ (a^2-9)z=a-3 \end{cases} \Rightarrow \underset{a\neq\pm3}{z} = \frac{a-3}{a^2-9} = \frac{1}{a+3}$$

הפתרון הוא:

$$\left(\frac{8a+13}{3(a+3)}, \frac{32+10a}{3(a+3)}, \frac{1}{a+3}\right)$$

.6

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & k \\ 2 & 1 & -1 & m \\ 3 & 3 & -5 & p \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3-3R_1 \to R_3]{R_2-2R_1 \to R_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & k \\ 0 & 3 & -7 & (m-2k) \\ 0 & 6 & -14 & (p-3k) \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_3-2R_2 \to R_3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & k \\ 0 & 3 & -7 & m-2k \\ 0 & 0 & 0 & p-2m+k \end{pmatrix}$$

פתרון יחיד לא קיים.

אינסוף פתרונות כאשר $p-2m+k = 0$

אין פתרון כאשר $p-2m+k \neq 0$

החוג למדעי המחשב – אלגברה לינארית , סמסטר א' תשס"ב

תרגיל מס' 5 - דטרמיננטים

הגשה עד: 29.11.2001, 11:00

1. חשבו את הדטרמיננטים הבאים:

א. $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$

ב. $\begin{vmatrix} \sin^2\alpha & \sin^2\beta & \sin^2\gamma \\ \cos^2\alpha & \cos^2\beta & \cos^2\gamma \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

ג. $\begin{vmatrix} 1 & n & n & \dots & n \\ n & 2 & n & \dots & n \\ n & n & 3 & \dots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n & n & n & \dots & n \end{vmatrix}$ (דטמיננט מסדר n)

2. מצא את המטריצה הצמודה הקלאסית של המטריצה $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ ובעזרתה מצא גם את ההופכית שלה (במידה והיא הפיכה).

3. נתונה המטריצה:

$$\begin{pmatrix} a-6 & 0 & 0 & -8 \\ 5 & a-4 & 0 & 12 \\ -1 & 3 & a-2 & -6 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

בעזרת דטרמיננט קבע עבור אילו ערכי a המטריצה הפיכה.

4. הוכח או הפרך: לכל מטריצה ריבועית A, A הפיכה אמ"ם A^tA הפיכה.

5. הוכח או הפרך: לכל מטריצה ריבועית A, $\det(A+A^t)=\det(A)+\det(A^t)$.

6. מצא את המטריצה ההופכית של $\begin{pmatrix} n & 1 & 1 \\ 1 & n & 1 \\ 1 & 1 & n \end{pmatrix}$. קבע עבור אילו ערכי n טבעיים היא הפיכה.

שאלת בונוס:

יהי ABC משולש כאשר

$x_i, y_i \in R \quad \forall\ 1 \le i \le 3 \quad , \quad C=(x_3,y_3), \quad B=(x_2,y_2), \quad A=(x_1,y_1)$.

הבע בעזרת דטרמיננט את שטח המשולש.

(רמז: הבט תחילה בשטח המשולש ABC כאשר $C=(0,0)$).

בהצלחה!

1

פתרון תרגיל מס' 5

1. א.

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} \underset{\substack{R_3+R_1\to R_3 \\ R_4+R_1\to R_4}}{\overset{R_2+R_1\to R_2}{=}} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= -2\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -2(0+4) = -8$$

ב.

$$\begin{vmatrix} \sin^2\alpha & \sin^2\beta & \sin^2\gamma \\ \cos^2\alpha & \cos^2\beta & \cos^2\gamma \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \overset{R_1+R_2\to R_1}{=} \begin{vmatrix} (\sin^2\alpha+\cos^2\alpha) & (\sin^2\beta+\cos^2\beta) & (\sin^2\gamma+\cos^2\gamma) \\ \cos^2\alpha & \cos^2\beta & \cos^2\gamma \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \cos^2\alpha & \cos^2\beta & \cos^2\gamma \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \overset{R_1-R_3\to R_1}{=} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \cos^2\alpha & \cos^2\beta & \cos^2\gamma \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

ג.

$$\begin{vmatrix} 1 & n & n & \cdots & n \\ n & 2 & n & \cdots & n \\ n & n & 3 & \cdots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n & n & n & \cdots & n \end{vmatrix} \underset{\text{לכל } 1\le i\le n-1}{\overset{=}{R_i - R_n \to R_i}} \begin{vmatrix} 1-n & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 2-n & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 3-n & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n & n & n & \cdots & n \end{vmatrix} \underset{\substack{\downarrow \\ \text{דטרמיננטה} \\ \text{של מט' משולשת} \\ \text{תחתונה}}}{=}$$

$$= (1-n)(2-n)(3-n)\cdot\ldots\cdot n = (-1)^{n-1}\, n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-(n-1)) = (-1)^{n-1}\cdot n!$$

2.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = -7 \quad , \quad A_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 1$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 1 \quad , \quad A_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 6$$

②

$A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 0 \quad , \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = -2$

$A_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -1 \quad , \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = -1$

$A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 1$

$$\Rightarrow \quad \operatorname{adj} A = \begin{pmatrix} -7 & 6 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix} \underset{R_3 - R_1 \to R_3}{\overset{R_2 - R_1 \to R_2}{=}} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$$

$\Leftarrow$ A הפיכה

$$A^{-1} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} -7 & 6 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{2} & -3 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad \Leftarrow$$

3.

$$\begin{vmatrix} a-6 & 0 & 0 & -8 \\ 5 & a-4 & 0 & 12 \\ -1 & 3 & a-2 & -6 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 & 1 \end{vmatrix} \underset{C_2 + \frac{1}{2}C_4 \to C_2}{\overset{C_3 - C_4 \to C_3}{=}} \begin{vmatrix} a-6 & -4 & 8 & -8 \\ 5 & a+2 & -12 & 12 \\ -1 & 0 & a+4 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a-6 & -4 & 8 \\ 5 & a+2 & -12 \\ -1 & 0 & a+4 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -4 & 8 \\ a+2 & -12 \end{vmatrix} + (a+4)\begin{vmatrix} a-6 & -4 \\ 5 & a+2 \end{vmatrix} =$$

$$= -\left(48 - 8(a+2)\right) + (a+4)\left((a-6)(a+2) + 20\right) = a^3$$

מקיים $a^3 \neq 0 \iff a \neq 0$

$\Leftarrow$ המט' הפיכה אמ"מ $a \neq 0$.

4. טענה: לכל מ"ר ריבועית A, A הפיכה אמ"מ A^tA הפיכה.

הטענה נכונה. הוכחה:

A^tA הפיכה

$\iff$

$|A^tA|\neq 0$

$\iff$ ← $|A|\cdot|B|=|AB|$

$|A^t|\cdot|A|\neq 0$

$\iff$ ← $|A^t|=|A|$

$|A|\cdot|A|\neq 0$

$\iff$

$(|A|)^2\neq 0$

$\iff$

$|A|\neq 0$

$\iff$

A הפיכה.

מש"ל.

5. טענה: לכל מ"ר ריבועית A, $\det(A+A^t)=\det(A)+\det(A^t)$

הטענה אינה נכונה. נביא דוגמא נגדית:

תהי $A=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ אזי:

$$\det(A+A^t)=\det\left(\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\right)=\det\begin{pmatrix}2&0\\0&2\end{pmatrix}=2\cdot 2=4$$

$$\neq$$

$$\det(A)+\det(A^t)=\det\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}+\det\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=1+1=2$$

ולכן זוהי דוגמא נגדית המפריכה את הטענה.

6. ראשית, נקבע עבור אילו ערכי $n\in\mathbb{N}$ המ' $A=\begin{pmatrix}n&1&1\\1&n&1\\1&1&n\end{pmatrix}$ הפיכה.

$$\begin{vmatrix}n&1&1\\1&n&1\\1&1&n\end{vmatrix}\underset{R_1-R_3\to R_1}{\overset{R_2-R_3\to R_2}{=}}\begin{vmatrix}n-1&0&1-n\\0&n-1&1-n\\1&1&n\end{vmatrix}=(n-1)^2\begin{vmatrix}1&0&-1\\0&1&-1\\1&1&n\end{vmatrix}$$

$$\overset{R_3-R_1\to R_3}{=}(n-1)^2\begin{vmatrix}1&0&-1\\0&1&-1\\0&1&n+1\end{vmatrix}=(n-1)^2\begin{vmatrix}1&-1\\1&n+1\end{vmatrix}=(n+2)(n-1)^2$$

(4)

הדטרמיננטה מתאפס עבור $n=1$ או $n=-2$ אך n טבעי ולכן

נדרוש $n\neq 1$ ואז המט' תהיה הפיכה.

נמצא $adj(A)$:

$$A_{11}=\begin{vmatrix} n & 1 \\ 1 & n \end{vmatrix} = n^2-1=(n+1)(n-1) \quad , \quad A_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & n \end{vmatrix} = -(n-1)$$

$$A_{13}=\begin{vmatrix} 1 & n \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1-n=-(n-1) \quad , \quad A_{21} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & n \end{vmatrix} = -(n-1)$$

$$A_{22}=\begin{vmatrix} n & 1 \\ 1 & n \end{vmatrix} = n^2-1=(n+1)(n-1) \quad , \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} n & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -(n-1)$$

$$A_{31}=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ n & 1 \end{vmatrix} = 1-n=-(n-1) \quad , \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} n & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -(n-1)$$

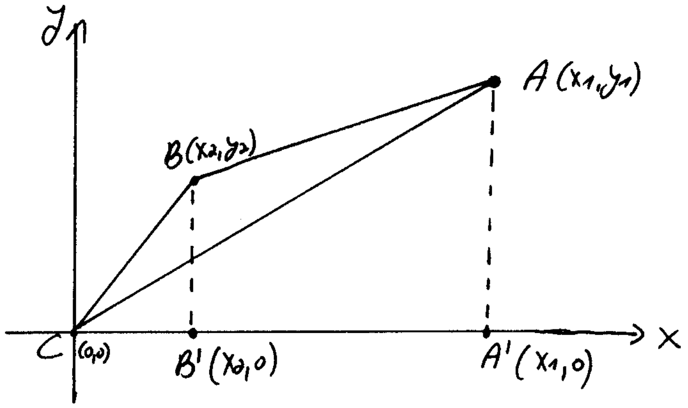
$$A_{33}=\begin{vmatrix} n & 1 \\ 1 & n \end{vmatrix} = n^2-1=(n+1)(n-1)$$

$$\Rightarrow \quad adj\,A = \begin{pmatrix} (n+1)(n-1) & -(n-1) & -(n-1) \\ -(n-1) & (n+1)(n-1) & -(n-1) \\ -(n-1) & -(n-1) & (n+1)(n-1) \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad A^{-1} = \frac{1}{|A|}\,adj\,A = \frac{1}{(n+2)(n-1)}\begin{pmatrix} n+1 & -1 & -1 \\ -1 & n+1 & -1 \\ -1 & -1 & n+1 \end{pmatrix}$$

שאלת הבונוס:

נניח תחילה: במשולש ABC אשר קודקודו C ממוקם בראשית $(C=(0,0))$:



$$S(ABC) = S(CBB') + \underbrace{S(B'A'AB)}_{S_{\text{טרפז}} = \frac{\text{סכום בסיסים} \times \text{גובה}}{2}} - S(CAA') =$$

$$= \frac{1}{2}x_2y_2 + \frac{1}{2}(y_2+y_1)(x_1-x_2) - \frac{1}{2}x_1y_1 =$$

$$= \frac{1}{2}\cancel{x_2y_2} + \frac{1}{2}y_2x_1 + \cancel{\frac{1}{2}y_1x_1} - \cancel{\frac{1}{2}y_2x_2} - \frac{1}{2}y_1x_2 - \cancel{\frac{1}{2}x_1y_1} =$$

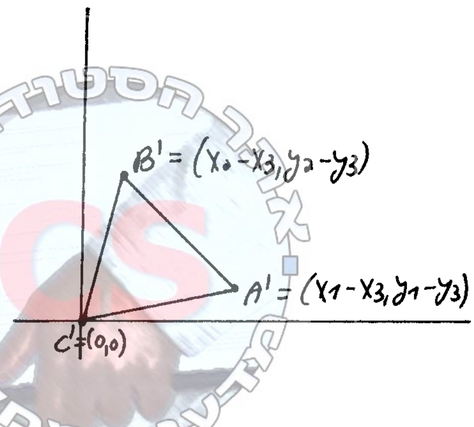
$$= \frac{1}{2}(y_2x_1 - y_1x_2) = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}$$

באופן כללי, אם נתון משולש שקודקודיו $(x_2,y_2),(x_1,y_1),(0,0)$ אזי כאמור נובע ש-

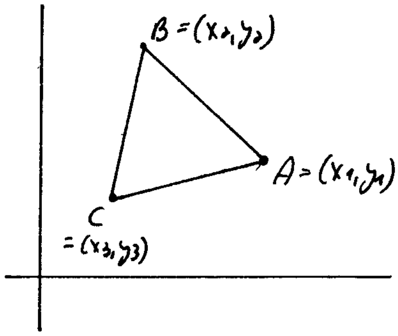
$$S_\Delta = \frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}\right|$$

(הסבר המודולו: הנו כיוון ששטח הינו תמיד אי-שלילי, וסדר של קודקודי המשולש יכול לגרום להיפוך סימן).

נניח עתה שנתון משולש כללי ABC:



נעשה הזזה של המשולש לראשית



⑥

לכן:

$$S(ABC) = S(A'B'C') = \frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} x_2-x_3 & y_2-y_3 \\ x_1-x_3 & y_1-y_3 \end{vmatrix}\right|$$

לפי מה שראינו קודם

<u>הערה:</u>

מפתח:

$$\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}\right| \underset{R_2-R_3\to R_1}{\overset{R_1-R_3\to R_1}{=}} \frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} x_1-x_3 & y_1-y_3 & 0 \\ x_2-x_3 & y_2-y_3 & 0 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}\right| =$$

$$= \frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} x_1-x_3 & y_1-y_3 \\ x_2-x_3 & y_2-y_3 \end{vmatrix}\right| \overset{R_1\leftrightarrow R_2}{=} \frac{1}{2}\left|-\begin{vmatrix} x_2-x_3 & y_2-y_3 \\ x_1-x_3 & y_1-y_3 \end{vmatrix}\right| =$$

$$= \frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} x_2-x_3 & y_2-y_3 \\ x_1-x_3 & y_1-y_3 \end{vmatrix}\right| = S(ABC)$$

ואכן נהוג לסמן כך

$$S(ABC) = \frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}\right|$$

החוג למדעי המחשב – אלגברה לינארית , סמסטר א' תשס"ב

תרגיל מס' 6

הגשה עד: 5.12.2001

משפט קרמר:

1. פתור את מערכת המשוואות ע"י שימוש בכלל קרמר:

$$\begin{cases} 3x+4y-z=7 \\ x-2y+4z=0 \\ 3x-y+z=-1 \end{cases}$$

מרחבים וקטוריים ותתי מרחבים - הגדרות:

2. לגבי כל אחת מן הקבוצות הבאות הוכח או הפרך האם היא מהווה מרחב וקטורים:

א. $V=\{(a,b)\,|\,a,b\in R\}$ עם הגדרת חיבור זוגות וכפל בסקלר מעל R ע"י:

$$(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d) \quad , \quad \alpha(a,b)=(\alpha^2 a,\alpha^2 b)$$

ב. $V=\{(a,b)\,|\,a,b\in R\}$. עם הגדרת חיבור זוגות וכפל בסקלר מעל R ע"י:

$$(a,b)+(c,d)=(a+c+1,b+d) \quad , \quad \alpha(a,b)=(\alpha a+\alpha-1,\alpha b)$$

ג. קבוצת כל הפונקציות הממשיות הזוגיות מעל R.

תזכורת : $f:R\to R$ זוגית אם $f(x)=f(-x)$ $\forall x\in R$.

ד. $W=\{(a,b,c)\in R^3\,|\,b=4c\}$ עם פעולת חיבור וקטורים וכפל וקטור בסקלר.

ה. $W=\{A\in R(n\times n)\,|\,A^2=A\}$ עם פעולת חיבור מטריצות וכפל מטריצות בסקלר.

ו. $W=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \;\middle|\; a=0 \;\vee\; c=0\right\}$ עם פעולת חיבור מטריצות וכפל מטריצות בסקלר.

3. יהי V מ"ו מעל F. הוכיחו כי לכל $v\in V$ ולכל $\alpha\in F$ מתקיים $(-\alpha)v=\alpha(-v)=-(\alpha v)$.

4. יהיו $\infty,-\infty$ איברים שאינם ב-R ונגדיר פעולות חיבור וכפל בסקלר על $V=R\cup\{\infty,-\infty\}$ ע"י:

א. לכל $a,b\in R$ יוגדרו פעולות החיבור והכפל בסקלר של R.

ב. $\infty=\infty+a=a+\infty \quad \forall a\in R$

ג. $\infty=\infty+\infty$

ד. $a+(-\infty)=(-\infty)+a=(-\infty)+(-\infty)=(-\infty) \quad \forall a\in R$

ה. $(-\infty)+\infty=\infty+(-\infty)=0$

ו. $\alpha(\infty)=\infty \quad \forall\alpha\in F$

ז. $\alpha(-\infty)=-\infty \quad \forall\alpha\in F$

האם V מ"ו מעל R ?

1

פתרון תרגיל 6

1.

$$\begin{cases} 3x+4y-z=7 \\ x-2y+4z=0 \\ 3x-y+z=-1 \end{cases}$$

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 1 & -2 & 4 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad b=\begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{X}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$|A|=\begin{vmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 1 & -2 & 4 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} \underset{C_2+C_3\to C_2}{\overset{C_1-3C_3\to C_1}{=}} \begin{vmatrix} 6 & 3 & -1 \\ -11 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & 3 \\ -11 & 2 \end{vmatrix} = 45 \neq 0$$

⇐ למערכת קיים פ. יחיד

$$D_1=\begin{vmatrix} 7 & 4 & -1 \\ 0 & -2 & 4 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \overset{R_1+7R_3\to R_1}{=} \begin{vmatrix} 0 & -3 & 6 \\ 0 & -2 & 4 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -3 & 6 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

$$D_2=\begin{vmatrix} 3 & 7 & -1 \\ 1 & 0 & 4 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} \overset{R_1+7R_3\to R_1}{=} \begin{vmatrix} 24 & 0 & 6 \\ 1 & 0 & 4 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 24 & 6 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 90$$

$$D_3=\begin{vmatrix} 3 & 4 & 7 \\ 1 & -2 & 0 \\ 3 & -1 & -1 \end{vmatrix} \overset{R_1+7R_3\to R_1}{=} \begin{vmatrix} 24 & -3 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 3 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 24 & -3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 45$$

$$\Rightarrow \quad x=\frac{D_1}{|A|}=\frac{0}{45}=0, \quad y=\frac{D_2}{|A|}=\frac{90}{45}=2, \quad z=\frac{D_3}{|A|}=\frac{45}{45}=1$$

2. א. זהו אינו מ"ו.

לו היה זה מ"ו האקסיומה הבאה מתקיימת 8:

$$\forall \alpha,\beta\in F,\ v\in V \qquad (\alpha+\beta)\cdot v=\alpha\cdot v+\beta\cdot v$$

נבחר $v=(1,1)$; $\alpha=\beta=1$ אזי:

$$(\alpha+\beta)\cdot v=(1+1)\circ(1,1)=2\circ(1,1)=(4,4)$$

$$\alpha\circ v+\beta\circ v=1\circ(1,1)+1\circ(1,1)=(1,1)+(1,1)=(2,2)$$

הראנו דוגמא נגדית לכך ש-V מ"ו.

⇐ V אינו מ"ו.

2

ב. V הינו מ"ו. נוכיח את קיום התנאים:

(0) V לא ריקה כי $V=\mathbb{R}^2\neq\emptyset$.

(1) $\forall (a,b),(c,d)\in\mathbb{R}^2 \qquad (a,b)+(c,d)=(\underbrace{a+c+1}_{\in\mathbb{R}},\underbrace{b+d}_{\in\mathbb{R}})\in\mathbb{R}^2=V$

כי $\mathbb{R}\ni a,b,c,d$

(2) $\forall (a,b),(c,d)\in\mathbb{R}^2 \qquad (a,b)+(c,d)=(a+c+1,b+d)=$

$\overset{\downarrow}{=}(c+a+1,d+b)=(c,d)+(a,b)$

קומוטטיביות החיבור ב- $\mathbb{R}$

(3) $\forall (a,b),(c,d),(e,f)\in\mathbb{R}^2$

$[(a,b)+(c,d)]+(e,f)=(a+c+1,b+d)+(e,f)=((a+c+1)+e+1,(b+d)+f)$

$\overset{\downarrow}{=}(a+c+e+2,b+d+f)$

אסוציאטיביות החיבור ב- $\mathbb{R}$

$(a,b)+[(c,d)+(e,f)]=(a,b)+(c+e+1,d+f)=(a+(c+e+1)+1,b+(d+f))=$

$\overset{\downarrow}{=}(a+c+e+2,b+d+f)=[(a,b)+(c,d)]+(e,f)$

אסוציאטיביות החיבור ב- $\mathbb{R}$

(4) $0_V=(-1,0)\in\mathbb{R}^2=V$ כי

$\forall (a,b)\in\mathbb{R}^2 \qquad (a,b)+0_V=(a,b)+(-1,0)=(a+(-1)+1,b+0)=(a,b)$

(5) $\forall (a,b)\in V\ \exists\ -(a,b)=(-a-2,-b)\in\mathbb{R}^2=V$ כי:

$(a,b)+(-a-2,-b)=(a+(-a-2)+1,b+(-b))=(-1,0)=0_V$

(6) $\forall \alpha\in F=\mathbb{R},(a,b)\in\mathbb{R}^2=V \qquad \alpha\cdot(a,b)=(\underbrace{\alpha a+\alpha-1}_{\in\mathbb{R}},\underbrace{\alpha b}_{\in\mathbb{R}})\in\mathbb{R}^2=V$

כי $\mathbb{R}\ni\alpha,a,b$

(7) $\forall \alpha\in\mathbb{R},(a,b),(c,d)\in\mathbb{R}^2$

$\alpha\cdot((a,b)+(c,d))=\alpha\cdot(a+c+1,b+d)=(\alpha(a+c+1)+\alpha-1,\alpha(b+d))=$

$\overset{\downarrow}{=}(\alpha a+\alpha c+2\alpha-1,\alpha b+\alpha d)$

חוקי כפל וחיבור ב- $\mathbb{R}$

$\alpha\cdot(a,b)+\alpha\cdot(c,d)=(\alpha a+\alpha-1,\alpha b)+(\alpha c+\alpha-1,\alpha d)=$

$=((\alpha a+\alpha-1)+(\alpha c+\alpha-1)+1,\alpha b+\alpha d)\overset{\downarrow}{=}(\alpha a+\alpha c+2\alpha-1,\alpha b+\alpha d)=$

חוקי כפל וחיבור ב- $\mathbb{R}$

$=\alpha\cdot((a,b)+(c,d))$

③

(8)

$\forall \alpha,\beta\in\mathbb{R},\ (a,b)\in V$

$$(\alpha+\beta)\cdot(a,b)=((\alpha+\beta)a+(\alpha+\beta)-1,(\alpha+\beta)b)\ \underset{\downarrow}{=}\ (\alpha a+\beta a+\alpha+\beta-1,\alpha b+\beta b)$$

חילופיות וחיבור ב-$\mathbb{R}$

$$\alpha\cdot(a,b)+\beta\cdot(a,b)=(\alpha a+\alpha-1,\alpha b)+(\beta a+\beta-1,\beta b)=$$
$$=((\alpha a+\alpha-1)+(\beta a+\beta-1)+1,\ \alpha b+\beta b)=$$
$$\underset{\downarrow}{=}(\alpha a+\beta a+\alpha+\beta-1,\alpha b+\beta b)=(\alpha+\beta)\cdot(a,b)$$

$\boxed{\text{חילופיות וחיבור ב-}\mathbb{R}}$

(9)

$\forall \alpha,\beta\in\mathbb{R},\ (a,b)\in V$

$$(\alpha\beta)\cdot(a,b)=((\alpha\beta)a+\alpha\beta-1,(\alpha\beta)b)\ \underset{\downarrow}{=}\ (\alpha\beta a+\alpha\beta-1,\alpha\beta b)$$

$\boxed{\text{חילופיות ב-}\mathbb{R}}$

$$\alpha\cdot(\beta\cdot(a,b))=\alpha\cdot(\beta a+\beta-1,\beta b)=\alpha(\beta a+\beta-1)+\alpha-1,\alpha(\beta b))=$$
$$\underset{\downarrow}{=}(\alpha\beta a+\alpha\beta-1,\ \alpha\beta b)=(\alpha\beta)\cdot(a,b)$$

$\boxed{\text{חילופיות וחיבור ב-}\mathbb{R}}$

(10)

$$\forall (a,b)\in V\qquad 1_F\cdot(a,b)=1_{\mathbb{R}}\cdot(a,b)=1(a,b)=$$
$$=(1\cdot a+1-1,1\cdot b)=(a,b)$$

$\Leftarrow$ V מ"ו מעל $\mathbb{R}$.

ג. נגדיר $W=\{f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\mid \forall x\in\mathbb{R}\ f(x)=f(-x)\}$

נבדוק האם W תת מרחב של $V=\{f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\}$ (V מ"ו).

(1) $W\neq\emptyset$ כי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ המוגדרת ע"י $f(x)=0$ לכל $x\in\mathbb{R}$

מקיימת $\forall x\in\mathbb{R}\quad f(x)=f(-x)=0$

ולכן $f\in W$.

(2) יהיו $f,g\in W$. צ"ל $f+g\in W$.

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x)\ \underset{\boxed{f,g\in W}}{=}\ f(-x)+g(-x)=(f+g)(-x)$$

$\Leftarrow\ f+g\in W$

(4)

(3) יהי $\alpha\in\mathbb{R}=F$ ו- $f\in W$ אז

$$(\alpha f)(x)=\alpha\cdot\big(f(x)\big)=\alpha\cdot\big(f(-x)\big)=(\alpha f)(-x)$$

$\Leftarrow$ $(\alpha f)\in W$

סה"כ לכן W תת מרחב של V ולכן W מ"ו מעל $\mathbb{R}$.

ד. נראה כי W תת מרחב של $V=\mathbb{R}^3$:

(1) $0_V=(0,0,0)\in W$ כי $0=4\cdot 0=0$.

(2) יהיו $(a_1,b_1,c_1),(a_2,b_2,c_2)\in W$ אז

$$(a_1,b_1,c_1)+(a_2,b_2,c_2)\underset{\boxed{b_1=4c_1 \text{ ו- } b_2=4c_2 \text{ כי אלו וקטורים ב-}W}}{=}(a_1,4c_1,c_1)+(a_2,4c_2,c_2)=$$

$$=(a_1+a_2,\ 4c_1+4c_2,\ c_1+c_2)=(a_1+a_2,\ 4(c_1+c_2),\ c_1+c_2)\in W$$

(3) יהי $\alpha\in\mathbb{R}$ ו- $(a,b,c)\in W$ אז:

$$\alpha(a,b,c)\underset{\boxed{b=4c \text{ כי זהו וקטור ב-}W}}{=}\alpha(a,4c,c)=(\alpha a,\alpha(4c),\alpha c)\underset{\boxed{\text{תכונות כפל ב-}\mathbb{R}}}{=}(\alpha a,4(\alpha c),\alpha c)\in W$$

$\Leftarrow$ W תת מרחב של $\mathbb{R}^3$ ולכן מ"ו.

ה. זהו לא מ"ו כי אינו סגור תחת חיבור מטריצות:

כי $I\in W$ $I^2=I\cdot I=I$.

אבל: $(I+I)^2=(2I)^2=4I\neq 2I$

ולכן $I\in W$ $(I+I)\notin W$

$\Leftarrow$ W אינו מ"ו!

ו. W אינו מ"ו כיוון שאינו מרחב סגור תחת חיבור מטריצות:

$\begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}\in W$ אבל:

$$\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2\\1&2\end{pmatrix}\notin W$$

$\Leftarrow$ W אינו מ"ו

3. נתון: V מ"ו מעל שדה F.

צ"ל:

$$\forall \alpha\in F,\ v\in V \quad (-\alpha)v = \alpha(-v) = -(\alpha v)$$

הוכחה:

$$\alpha v + \alpha(-v) = \alpha\left(v+(-v)\right) = \alpha\cdot 0_V = 0_V$$

דיסטריבוטיביות הכפל בסקלר מעל החיבור ב-V

איבר נגדי ב-V

$$\Longrightarrow \quad \alpha(-v) = -(\alpha v)$$

$$\alpha v + (-\alpha)v = \left(\alpha+(-\alpha)\right)v = 0\cdot v = 0$$

דיסטריבוטיביות הכפל בסקלר מעל החיבור ב-F

איברים נגדיים ב-F

$$\Longrightarrow \quad (-\alpha)v = -(\alpha v)$$

$$\Longleftarrow \quad (-\alpha)v = \alpha(-v) = -(\alpha v)$$

מש"ל.

4. V אינו מ"ו מעל $\mathbb{R}$ כיוון שאינו מקיים אקסיומה 3 - אסוציאטיביות:

$$\infty + \left((-\infty)+2\right) = \infty + (-\infty) = 0$$

$$\neq$$

$$\left(\infty+(-\infty)\right)+2 = 0+2 = 2$$

$\Longleftarrow$ V אינו מ"ו מעל $\mathbb{R}$.

תרגיל מס' 7

הגשה עד: 12.12.2001

סכום, סכום ישר ומשלים

1) הוכח או הפרך: יהיו U , W תתי מרחבים במ"ו V ו- $V = U \cup W$, אזי $V = U \oplus W$.

2) יהי $V = \{ f : R \to R \mid f \text{ רציפה} \}$ מ"ו ויהי $W = \{ f \in V \mid f(a) = f(-a) \quad \forall a \in R \}$
תת מרחב של V. מצא משלים ל- W ב- V, הוכח את תשובתך.

צירוף לינארי, תלות לינארית ובלתי תלות לינארית

3) כתוב את הוקטור $4x^2 + x + 7$ כצירוף לינארי של איברי הקבוצה
$\{x^2 + 2 \ ,\ 3x^2 + 2x + 6 \ ,\ 4x^2 + 2x + 10\}$.

4) קבע תנאים על הוקטור (α, β, γ) כך ש $(\alpha, \beta, \gamma) \in span\{(1,-1,2),(2,1,0),(0,3,-4)\}$.

5) עבור כל קבוצה הראה האם היא ת"ל או בת"ל:

א. $\{(1, 2+i, 3-i), (i, 0, 2+3i), (1, 1, -i)\}$ מעל המרוכבים.

ב. $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$

6) עבור אילו ערכי b הקבוצה $\{(1,0,1,0,1), (1,1,1,1,b), (0,-1,0,-1,0)\}$ בת"ל?

7) במ"ו V נתונים 3 וקטורים u, w, v בת"ל.
הוכח או הפרך: גם הוקטורים $u+v, v-w, w+2u$ בת"ל.

8) הוכח:
אם S היא תת קבוצה לא ריקה של מ"ו V, אזי SP(S) הינו תת מרחב של V, וזהו תת המרחב הקטן ביותר של V המכיל את S .

בהצלחה!

פתרון תרגיל מס' 7

1. טענה: יהיו U,W תת-מרחבים במ"ו V ו- $V=U\cup W$ אזי $V=U\oplus W$.

הטענה אינה נכונה. נביא דוגמא נגדית:

יהיו $U=W=V=\mathbb{R}^2$.

V מ"ו ו- W,U תת-מרחבים של V (טריוויאלי) ומתקיים

$$U\cup W=\mathbb{R}^2\cup\mathbb{R}^2=\mathbb{R}^2=V$$

אבל $U\cap W=\mathbb{R}^2\cap\mathbb{R}^2=\mathbb{R}^2\neq\{(0,0)\}=0_V$

ולכן $V\neq U\oplus W$.

$\Leftarrow$ מצאנו דוגמא נגדית המפריכה את הטענה, ולכן היא אינה נכונה.

2. נתון כי $V=\{f:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \mid f \text{ רציפה}\}$ מ"ו

ו- $W=\{f\in V \mid f(a)=f(-a)\}$ תת-מרחב של V.

נגדיר $U=\{f\in V \mid f(a)=-f(-a)\}$.

נראה כי U תת-מרחב של V וכי $V=U\oplus W$ (ולכן U משלים של W ב- V).

(א) נראה כי U תת-מרחב של V: U תת-קבוצה של V לפי ההגדרה ומתקיים:

1) $0\equiv f\in U$ כי $\forall x\in\mathbb{R}\quad f(x)=0=$

2) יהיו $f,g\in U$ אזי:

$$\forall x\in\mathbb{R}\qquad (f+g)(x)=f(x)+g(x)\underset{\boxed{f,g\in U}}{=}-f(-x)+(-g(-x))=-(f(-x)+g(-x))=$$

$$=-(f+g)(-x)$$

$\Leftarrow$ $f+g\in U$

3) יהי $f\in U$ ו- α סקלר אזי:

$$\forall x\in\mathbb{R}\qquad (\alpha f)(x)=\alpha\cdot f(x)=\alpha\cdot(-f(-x))=-\alpha\cdot f(-x)=-(\alpha f)(-x)$$

$\Leftarrow$ $\alpha f\in U$

לכן U תת-מרחב של V.

(*) נוכיח כי $V=U\oplus W$:

תהי $f\in V$ כלשהי

אזי מתקיים

$$f(x)=\underbrace{\tfrac{1}{2}\left[f(x)+f(-x)\right]}_{=g(x)}+\underbrace{\tfrac{1}{2}\left[f(x)-f(-x)\right]}_{=h(x)}$$

מתקיים:

$$g(-x)=\tfrac{1}{2}\left[f(-x)+f(-(-x))\right]=\tfrac{1}{2}\left[f(-x)+f(x)\right]=$$

$$=\tfrac{1}{2}\left[f(x)+f(-x)\right]=g(x)\Rightarrow g\in W$$

$$h(-x)=\tfrac{1}{2}\left[f(-x)-f(-(-x))\right]=\tfrac{1}{2}\left[f(-x)-f(x)\right]=$$

$$=-\tfrac{1}{2}\left[f(x)-f(-x)\right]=-h(x)\Rightarrow f\in U$$

$$\Leftarrow\quad V\ni f=\underset{\in W}{g}+\underset{\in U}{h}$$

$$\Leftarrow\quad V=W+U$$

תהי $f\in W\cap U$ כלשהי

$\Leftarrow$ $f\in U$ וגם $f\in W$

$\Leftarrow$ $f(x)=-f(-x)$ וגם $f(x)=f(-x)$ $\forall x\in\mathbb{R}$

$$\Leftarrow\quad \forall x\in\mathbb{R}\quad f(-x)=-f(-x)$$

$$\Leftarrow\quad \forall x\in\mathbb{R}\quad f(-x)\equiv 0$$

$$\Leftarrow\quad f(x)\equiv 0$$

$$\Leftarrow\quad \{0_V\}=\{f\equiv 0\}=U\cap W$$

$$\Leftarrow\quad V=U\oplus W$$

לכן U ו-W הינם משלימים ב-V.

3.

$$4x^2+x+7=a(x^2+2)+b(3x^2+2x+6)+c(4x^2+2x+10)$$

$$4x^2+x+7=x^2(a+3b+4c)+x(2b+2c)+(2a+6b+10c)$$

$$\Longrightarrow\begin{cases}a+3b+4c=4\\2b+2c=1\\2a+6b+10c=7\end{cases}\Longrightarrow\begin{matrix}a=3\\b=1\\c=-\frac{1}{2}\end{matrix}\Longrightarrow 4x^2+x+7=3(x^2+2)+1(3x^2+2x+6)-\tfrac{1}{2}(4x^2+2x+10)$$

③ (ג.)

$$(\alpha,\beta,\gamma) = a(1,-1,2)+b(2,1,0)+c(0,3,-4)$$

$$(\alpha,\beta,\gamma) = (a+2b,\ -a+b+3c,\ 2a-4c)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha = a+2b \\ \beta = -a+b+3c \\ \gamma = 2a-4c \end{cases}$$

נקבל מערכת מהצורה $A\bar{x}=\bar{b}$ כאשר

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -4 \end{pmatrix},\quad X=\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix},\quad \bar{b}=\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$$

$$(A|\bar{b}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & \alpha \\ -1 & 1 & 3 & \beta \\ 2 & 0 & -4 & \gamma \end{array}\right) \xrightarrow[R_3-2R_1\to R_3]{R_2+R_1\to R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & \alpha \\ 0 & 3 & 3 & \beta+\alpha \\ 0 & -4 & -4 & \gamma-2\alpha \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[R_3\cdot(-\frac{1}{4})\to R_3]{R_2\cdot\frac{1}{3}\to R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & \alpha \\ 0 & 1 & 1 & \frac{\alpha+\beta}{3} \\ 0 & 1 & 1 & \frac{2\alpha-\gamma}{4} \end{array}\right) \xrightarrow{R_3-R_2\to R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & \alpha \\ 0 & 1 & 1 & \frac{\alpha+\beta}{3} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2\alpha-4\beta-3\gamma}{12} \end{array}\right).$$

כדי שיתקיים $span\{(1,-1,2),(2,1,0),(0,3,-4)\} \ni (\alpha,\beta,\gamma)$

צריך להתקיים שלמערכת $A\bar{x}=\bar{b}$ יהיה פתרון יחיד או אינסוף פ.,

(אם לא - אין פתרון). מהמטריצה המדורגת אנו רואים כי לא קיים

קיים מצב של פ. יחיד אך כן קיים מצב של אינסוף פתרונות.

לכן נדרוש $2\alpha-4\beta-3\gamma=0$ ואז למערכת יהיה פתרון ולכן

ואז תתקיים הדרישה.

(ה.) (א.)

$$S=\{(1,2+i,3-i),\ (i,0,2+3i),\ (1,1,-i)\}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2+i & 3-i \\ i & 0 & 2+3i \\ 1 & 1 & -i \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3-R_1\to R_3]{R_2-iR_1\to R_2} \begin{pmatrix} 1 & 2+i & 3-i \\ 0 & 1-2i & 1 \\ 0 & -1-i & -3 \end{pmatrix}$$

צריך פעולה שכזו לשים לב כי אנחנו במרוכבים!

$$(1-2i)R_3+(1+i)R_2 \to R_3 \quad \longrightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 2+i & 3-i \\ 0 & 1-2i & 1 \\ 0 & 0 & -2+7i \end{pmatrix}$$

למטי' המדורגת אין שורת אפסים ⇐ הקבוצה בת"ל.

ב.

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2-2R_1 \to R_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3+R_2 \to R_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

למטי' המדורגת יש שורת אפסים ⇐ הקבוצה ת"ל.

6.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & b \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2-R_1 \to R_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & (b-1) \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_3+R_2 \to R_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & (b-1) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (b-1) \end{pmatrix}$$

למטי' לא תהיה שורת אפסים כאשר $b \neq 1$, לכן הקבוצה בת"ל כאשר $b \neq 1$.

7.

טענה: אם במ"ו V הוקטורים u,w,v בת"ל אז גם הוקטורים $u+v,\ v-w,\ w+2u$ בת"ל.

הטענה נכונה. הוכחה:

נניח בשלילה כי הטענה אינה נכונה, כלומר $u+v, v-w, w+2u$ ת"ל ⇐ קיימים a,b,c סקלרים לא כולם אפס כך ש

$$a(u+v)+b(v-w)+c(w+2u)=0$$

$$\Rightarrow u(a+2c)+w(-b+c)+v(a+b)=0$$

u,w,v בת"ל (לפי נתון) ולכן בהכרח מקדמים

(5)

$$\begin{cases} a+2c=0 \\ -b+c=0 \\ a+b=0 \end{cases} \Leftarrow \quad a=b=c=0$$ בסתירה לנתון.

$\Leftarrow$ ההנחה היא מוטעית.

$\Leftarrow$ $u+v,\ v-w,\ w+2u$ בת"ל.

מש"ל.

(8) הוכח: אם S היא תת קבוצה לא ריקה של מ"ו V, אזי:

(א) $Sp(S)$ הינו תת מרחב של V.

(ב) $Sp(S)$ הינו תת המרחב הקטן ביותר של V המכיל את S.

הוכחה:

א. 1) S לא ריקה ומכיוון ש $S\subseteq Sp(S)$ לכן $Sp(S)$ לא ריקה.

2) סגירות לחיבור וקטורי:

יהיו $u,v\in Sp(S)$ ונסמן $S=\{s_1,s_2,\dots,s_n,\dots\}$ (S לא בהכרח סופית!)

אזי עבור $\alpha_i,\beta_i\in F$ מתקיים:

$v=\alpha_1 s_1+\alpha_2 s_2+\dots \quad , \quad u=\beta_1 s_1+\beta_2 s_2+\dots$

ומכאן:

$$u+v=(\alpha_1 s_1+\alpha_2 s_2+\dots)+(\beta_1 s_1+\beta_2 s_2+\dots) \underset{\text{אסוציאטיביות ב-}V}{=} (\alpha_1 s_1+\beta_1 s_1)+(\alpha_2 s_2+\beta_2 s_2)+\dots =$$

$$\underset{\text{דיסטריבוטיביות ב-}V}{=} (\alpha_1+\beta_1)s_1+(\alpha_2+\beta_2)s_2+\dots \in Sp(S)$$

3) סגירות לכפל בסקלר:

יהיו $u\in Sp(S)$ ו- $k\in F$ כלשהם.

אזי עבור $\alpha_i\in F$ מתקיים $u=\alpha_1 s_1+\alpha_2 s_2+\dots$

ומכאן

$$ku=k(\alpha_1 s_1+\alpha_2 s_2+\dots) \underset{\text{דיסטריבוטיביות ב-}V}{=} k(\alpha_1 s_1)+k(\alpha_2 s_2)+\dots =$$

$$\underset{\text{אסוציאטיביות ב-}V}{=} (k\alpha_1)s_1+(k\alpha_2)s_2+\dots \in Sp(S)$$

$\Leftarrow$ לפי משפט $Sp(S)$ תת מרחב של V.

⑥

ב. יהי W תת מרחב של V המכיל את S ($W \supseteq S$), ונראה כי W
שלכן מתקיים $W \supseteq Sp(S)$ ולכן $Sp(S)$ הוא תת המרחב
הקטן ביותר של V המכיל את S.

יהי $W \supseteq S = \{s_1, s_2, \ldots\}$ ויהיו $\alpha_i \in F$.

W תת מרחב של V ולכן סגור תחת כפל בסקלר ולכן
$\alpha_1 s_1, \alpha_2 s_2, \ldots \in W$

W תת מרחב של V ולכן סגור תחת חיבור וקטורים ולכן
$\alpha_1 s_1 + \alpha_2 s_2 + \ldots + \alpha_n s_n + \ldots \in W$

לכן קיבלנו כי
$$Sp(S) = \{\alpha_1 s_1 + \alpha_2 s_2 + \ldots + \alpha_n s_n + \ldots \mid \alpha_i \in F,\ s_i \in S\ \forall i\} \subseteq W$$

מש"ל.

תרגיל מס' 8

הגשה עד: 19.12.2001

בסיס ומימד:

1. מצא בסיס ומימד לכל אחד מן המרחבים הבאים (אין צורך להוכיח כי הם מרחבים):

א. $W = span\{1+2x-4x^2+3x^3, 3+2x^3, x^2, -2+x+3x^2+x^3\}$

ב. $V = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| \ a,b,c,d \in R, \ \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$

2. יהיו

$$W = span\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}, \ V = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| \ a,b,c,d \in R \quad \wedge \quad a = 2b-3d \right\}$$

תתי-מרחבים של $R(2\times 2)$. מצא בסיס ומימד של $V, W, V+W, V\bigcap W$.

3. יהי V מ"ו ולו תתי מרחבים U,W. ידוע כי $U \neq W$, $\dim V = 9, \ \dim U = \dim W = 6$.
למה יכול להיות שווה $\dim(U\bigcap W)$?

4. הוכח או הפרך: יהי V מ"ו ממימד אי-זוגי, אזי קיימים תתי מרחבים U,W של V כך שמתקיים $V = U \oplus W$ וגם dimU=dimW.

וקטורי קואורדינטות ומטריצות מעבר בין בסיסים:

5. יהי V מ"ו מעל שדה F ויהי e בסיס כלשהוא ב-V. אזי, לכל $u \in U, \ \alpha \in F$ מתקיים $(\alpha u)_e = \alpha(u_e)$.

6. מצא את וקטור הקואורדינטות של $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$ ביחס לבסיס
$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \right\}$.

7. מצא את מטריצת שינוי הבסיס מהבסיס $\{1+x+x^2, 1+x, 1\}$ לבסיס $\{1-2x+x^2, 2x+x^2, x^2\}$.

בהצלחה!

(1)

פתרון תרגיל 8

1. א.

$$W = Span\{1+2x-4x^2+3x^3,\ 3+2x^3,\ x^2,\ -2+x+3x^2+x^3\}$$

נעבור לקורדינטות במטריצה:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & 3 \\ 3 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_4+2R_1\to R_4]{R_2-3R_1\to R_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & 3 \\ 0 & -6 & 12 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -5 & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow{6R_4+5R_2\to R_4} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & 3 \\ 0 & -6 & 12 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 30 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_4-30R_3\to R_4} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & 3 \\ 0 & -6 & 12 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

⇐ בסיס ל-W הינו $\{1+2x-4x^2+3x^3,\ -6x+12x^2-7x^3,\ x^2,\ 7x^3\}$

ב. נפתור את המערכת:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 3a + c = 0 \\ 3b + d = 0 \\ 3a + 2c = 0 \\ 3b + 2d = 0 \end{cases} \Longrightarrow a = b = c = d = 0$$

ולכן $Sol = \{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\} = V$ מכאן בסיס ל-V הוא $Sol = \{[0]\}$.

2. (*) נמצא בסיס ומימד ל-W:

$$W = Span\left\{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right\}$$

נעבור לקורדינטות במטריצה: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. מכאן צורה מדורגת.

$\left\{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \dots \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ \dots \end{pmatrix}\right\}$ בסיס ל-W ו- $\dim W = 2$.

(2)

(*) נמצא בסיס של V:

$$V=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix} \middle| \ a,b,c,d\in\mathbb{R} \ \text{ו} \ a=2b-3d\right\}=\left\{\begin{pmatrix} 2b-3d & b \\ c & d\end{pmatrix} \middle| \ b,c,d\in\mathbb{R}\right\}$$

נגדיר: $S=\left\{\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0\end{pmatrix}\right\}$. נראה כי S בסיס של V:

(i) תהי $\begin{pmatrix} 2b-3d & b \\ c & d\end{pmatrix}\in V$ שרירותית אזי

$$\begin{pmatrix} 2b-3d & b \\ c & d\end{pmatrix}=b\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0\end{pmatrix}+d\begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0\end{pmatrix}$$

$\Leftarrow$ S פורשת V.

(ii)

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0\end{pmatrix}\xrightarrow{2R_2+3R_1\to R_2}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

אין שורת אפסים $\Leftarrow$ S בת"ל.

$\Leftarrow$ S בסיס של V ולכן $\dim V=3$.

(*) נמצא בסיס ומימד של $V+W$:

$$V+W=\operatorname{span}\left\{\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0\end{pmatrix}}_{v_1},\underbrace{\begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix}}_{v_2},\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0\end{pmatrix}}_{v_3},\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2\end{pmatrix}}_{v_4},\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1\end{pmatrix}}_{v_5}\right\}$$

$$\begin{array}{c} (v_4) \\ (v_5) \\ (v_3) \\ (v_2) \\ (v_1) \end{array}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0\end{pmatrix}\xrightarrow[R_5-2R_1\to R_5]{R_4+3R_1\to R_4}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -5 \\ 0 & -1 & 0 & 4\end{pmatrix}\xrightarrow[R_5-R_2\to R_5]{R_4+3R_2\to R_4}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 3\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[R_5+R_3\to R_5]{R_4-3R_3\to R_4}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 3\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$\Leftarrow$ $\dim(V+W)=4=\dim\mathbb{R}^{(2\times 2)}$ ולכן בסיס של $V+W=\mathbb{R}^{(2\times 2)}$ הוא $\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix}\right\}$

הערה: ניתן היה לקחת גם את הבסיס שקיבלנו מן המט' המדורגת.

3

$\dim(V\cap W) = \dim W + \dim V - \dim(V+W) = 2+3-4=1$:(*) לפי משפט

נמצא בסיס ל $V\cap W$:

לכל $v\in V$ מתקיים
$$v = a\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}-3 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} + c\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2a-3b & a\\ c & b\end{pmatrix}$$

לכל $v\in W$ מתקיים
$$v = d\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & -2\end{pmatrix} + e\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}d & d-e\\ e & -2d+e\end{pmatrix}$$

$v\in V\cap W$ גורר לכן
$$\begin{pmatrix}d & d-e\\ e & -2d+e\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2a-3b & a\\ c & b\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} d = 2a-3b\\ d-e = a\\ e = c\\ -2d+e = b\end{cases} \Rightarrow a = \frac{-2e}{7},\ b = \frac{-3e}{7},\ c = e,\ d = \frac{5e}{7}$$

$$v = \begin{pmatrix}\frac{5e}{7} & \frac{-2e}{7}\\ e & \frac{-3e}{7}\end{pmatrix} \Leftarrow v\in V\cap W \Leftarrow$$

$$\left\{\begin{pmatrix}\frac{5}{7} & \frac{-2}{7}\\ 1 & \frac{-3}{7}\end{pmatrix}\right\}$$ הינו $V\cap W$ בסיס ל $\Leftarrow$

$$\left\{\begin{pmatrix}5 & -2\\ 7 & -3\end{pmatrix}\right\}$$ הינו $V\cap W$ בסיס ל $\Leftarrow$

3. לפי משפט
$$\dim(U\cap W) = \dim W + \dim U - \dim(U+W)$$
$$= 6+6-\dim(U+W) = 12+\dim(U+W)$$

$6 = \dim W = \dim U < \dim(U+W) \Leftarrow U\neq W$

כמו כן בהכרח $\dim(U+W)\le \dim V = 9$

לכן $\dim(U+W)$ יכול להיות שווה ל- $7,8,9$

לכן $\dim(U\cap W)$ יכול להיות שווה ל $3,4,5$.

(4)

4. טענה: יהי V מ"ו ממימד אי-זוגי, אזי קיימים U,W תת-מרחבים של V, כך שמתקיים $V=U\oplus W$ וגם $\dim U=\dim W$.

הטענה אינה נכונה.

נניח בשלילה כי הטענה נכונה.

יהי V מ"ו כך ש $\dim V=n$ ו n אי-זוגי.

יהיו U,W תת-מרחבים של V המקיימים $\dim U=\dim W=k$

וגם $V=U\oplus W$.

$\dim(U\cap W)=0 \Leftarrow U\cap W=\{0\} \Leftarrow V=U\oplus W$.

$\dim(U+W)=\dim V=n \Leftarrow V=U+W \Leftarrow V=U\oplus W$.

לפי משפט המימדים $\dim(U+W)=\dim U+\dim W-\dim(U\cap W)$

כלומר " $n = k+k-0$

" " $n=2k$ סתירה לכך ש- n אי-זוגי.

$\Leftarrow$ ההנחה היא שגויה ולא קיימים U,W כנ"ל.

מש"ל.

5. יהי V מ"ו מעל שדה F ויהי $e=\{e_1,\dots,e_n\}$ בסיס ל- V.

יהיו $u\in V$ ו $\alpha\in F$ כלשהם.

$u\in V$, לכן קיימים סקלרים $\beta_1,\dots,\beta_n$ כך שמתקיים $u=\beta_1e_1+\beta_2e_2+\dots+\beta_ne_n$.

אזי מתקיים:

$$(\alpha u)_e=\left[\alpha(\beta_1e_1+\dots+\beta_ne_n)\right]_e=\left[\alpha(\beta_1e_1)+\alpha(\beta_2e_2)+\dots+\alpha(\beta_ne_n)\right]_e=$$

$$=\left[(\alpha\beta_1)e_1+(\alpha\beta_2)e_2+\dots+(\alpha_n\beta_n)e_n\right]_e=\begin{pmatrix}\alpha\beta_1\\ \alpha\beta_2\\ \vdots\\ \alpha\beta_n\end{pmatrix}=\alpha\begin{pmatrix}\beta_1\\ \vdots\\ \beta_n\end{pmatrix}=$$

$$=\alpha\left[(\beta_1e_1+\dots+\beta_ne_n)_e\right]=\alpha(u_e)$$

מש"ל.

5

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$$

.6

$$\Rightarrow \begin{cases} 0 = a \\ 2 = b + c \\ -3 = -2b + 2c + 3d \\ 4 = b + c - 2d \end{cases} \Rightarrow a = 0 \; , \; b = 1 \; , \; c = 1 \; , \; d = -1$$

$$\Rightarrow \left[\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}\right]_e = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$\boxed{\text{נסמן את הבסיס ב-}e}$

.7

$$\begin{aligned} 1 - 2x + x^2 &= 1 \cdot (1 + x + x^2) - 3(1 + x) + 3(1) \\ 2x + x^2 &= 1 \cdot (1 + x + x^2) + 1(1 + x) - 2(1) \\ x^2 &= 1 \cdot (1 + x + x^2) - 1 \cdot (1 + x) + 0 \cdot (1) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

מתקיים לכל $v \in V$ $\quad$ $.Pv_f = v_e$

<u>תרגיל מס' 9 – העתקות לינאריות</u>

<u>הגשה עד: 27.12.2001 , 11:00</u>

1. עבור $d \in R$ תהי הפונקציה $f : R^2 \to R_1[x]$ המוגדרת ע"י
$f((a,b)) = a + b + d^2 + 1 + ax$. האם קיים ערך d שעבורו f היא העתקה לינארית?

2. תהי $f : R(2\times 2) \to R_2[x]$ העתקה לינארית ונתון:

$$f\left(\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}\right) = 2x^2 \ , \quad f\left(\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}\right) = 2 \ , \quad f\left(\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}\right) = 1 + x + x^2 \ , \quad f\left(\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}\right) = 1 + x^2$$

א. חשב $f\left(\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\right)$

ב. חשב $\forall v \in R(2\times 2) \quad f(v)$.

ג. מצא בסיס ומימד ל- $\mathrm{Im}(f), \ker(f)$.

3. יהי $T : R^3 \to R^3$ אופרטור לינארי המוגדר ע"י $T(a,b,c) = (2a, c-2b, a+c)$.
יהי $W = \{(1,1,1),(1,1,0),(1,0,0)\}$ בסיס ב- R^3 . חשבו את T_W.

4. יהיו $V = \{v_1, v_2, v_3\}$, $V' = \{v_3, v_1, v_2\}$, $V'' = \{v_1, v_1+v_2, v_1+v_2+v_3\}$
בסיסים במ"ו V ו- $T : V \to V$ אופרטור לינארי. נתון:

$$T_v = \begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 2 & 3 & 1\\ -1 & 0 & -2\end{pmatrix}$$

חשב: א. $T_{v'}$ ב. $T_{v''}$ נמק!!!

5. תהי $T : V \to U$ העתקה לינארית כאשר V,U מ"ו מעל F. הוכח כי ker T הוא תת-מרחב
ב- V.

6. הוכח או הפרך: לכל מ"ו V קיים אופרטור לינארי $T : V \to V$ כך ש $\mathrm{Im}T = KerT$.

7. תהיינה A,B מטריצות ריבועיות מסדר n. הוכח או הפרך:
אם A הפיכה אזי לכל B המטריצות AB ו- BA דומות.

8. לכל זוג מטריצות קבעו האם הן דומות או לא:

א. $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$

ב. $\begin{pmatrix}2 & 0\\ 8 & 3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$

ג. $\begin{pmatrix}2 & 3 & 7 & 3\\ 1 & 3 & 7 & 5\\ 1 & 1 & 7 & 0\\ 6 & 8 & 9 & 3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 5 & 6 & 7 & 8\\ 8 & 7 & 6 & 5\\ 4 & 3 & 2 & 1\end{pmatrix}$

בהצלחה!!

פתרון תרגיל 9

1. f העתקה לינארית ולכן

לכל $(a_1,b_1),(a_2,b_2) \in \mathbb{R}^2$ צריך להתקיים

$$f\big((a_1,b_1)+(a_2,b_2)\big) = f(a_1,b_1)+f(a_2,b_2)$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$f(a_1+a_2,\, b_1+b_2) = f(a_1,b_1)+f(a_2,b_2)$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\cancel{a_1+a_2}+\cancel{b_1+b_2}+d^2+1+\cancel{(a_1+a_2)x} = \cancel{a_1}+\cancel{b_1}+d^2+1+\cancel{a_1x}+\cancel{a_2}+\cancel{b_2}+d^2+1+\cancel{a_2x}$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$d^2+1 = 2(d^2+1)$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$d^2+1=0$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$d^2=-1$$

לא קיים $d\in\mathbb{R}$ המקיים זאת, ולכן לא קיים d עבורו f היא העתקה לינארית.

2) נתחיל מסעיף ב' (שבו בהמשכו נחזור לא').

ב.

$$\left\{\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&1\\1&2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix}\right\}$$

בסיס ל- $\mathbb{R}(2\times2)$ (בדקו!!!)

$$\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}1&1\\1&2\end{pmatrix}+\gamma\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix}+\delta\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} a=\alpha+\beta+\delta \\ b=\alpha+\beta \\ c=\beta+\gamma+\delta \\ d=2\beta+\gamma \end{cases} \Rightarrow \alpha=-a+2b+c-d,\ \beta=a-b-c+d,\ \gamma=-2a+2b+2c-d,\ \delta=a-b$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix} = (-a+2b+c-d)\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}+(a-b-c+d)\begin{pmatrix}1&1\\1&2\end{pmatrix}+(-2a+2b+2c-d)\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix}+(a-b)\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow f\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix} = (-a+2b+c-d)(1+x^2)+(a-b-c+d)(1+x+x^2)+(-2a+2b+2c-d)\cdot 2+(a-b)\cdot(2x^2) =$$

$$= (2a-b)x^2+(a-b-c+d)x+(-4a+5b+4c-2d)$$

②

$$\Rightarrow f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (2a-b)x^2 + (a-b-c+d)x + (-4a+5b+4c-2d)$$

ב.

$$f\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = 2x^2 + x - 4$$

ג.

בסיס ל- $\mathbb{R}(2\times2)$ $\left\{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right\}$

לכן $\{1+x^2, 1+x+x^2, 2, 2x^2\}$ פורש $Im f$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_2-R_1\to R_2]{R_4-2R_1\to R_4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\Leftarrow$ $\{1+x^2, x, 2\}$ בסיס ל- $Im(f)$.

$\Leftarrow$ $\dim Im f = 3$.

עבור $ker f$:

$$f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (2a-b)x^2 + (a-b-c+d)x + (-4a+5b+4c-2d) = 0 \cdot 1 + 0\cdot x + 0\cdot x^2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2a-b=0 \\ -4a+5b+4c-2d=0 \\ a-b-c+d=0 \end{cases} \Rightarrow b=2a,\ c=-2a,\ d=-a$$

$$\Rightarrow ker f = \left\{\begin{pmatrix} a & 2a \\ -2a & -a \end{pmatrix} \middle|\ a\in\mathbb{R}\right\}$$

$\Leftarrow$ בסיס ל- $ker f$ הינו $\left\{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}\right\}$! $\dim ker f = 1$.

3.

$$T(1,1,1) = (2,-1,2) = 2(1,1,1) - 3(1,1,0) + 3(1,0,0)$$

$$T(1,1,0) = (2,-2,1) = 1(1,1,1) - 3(1,1,0) + 4(1,0,0)$$

$$T(1,0,0) = (2,0,1) = 1(1,1,1) - 1(1,1,0) + 2(1,0,0)$$

$$\Rightarrow T_W = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -3 & -3 & -1 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

③

4. א.

$$T_v = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} T(v_1) = 1 v_1 + 2 v_2 - 1 \cdot v_3 \\ T(v_2) = 1 v_1 + 3 v_2 + 0 v_3 \\ T(v_3) = 0 \cdot v_1 + 1 v_2 - 2 v_3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} T(v_3) = -2 v_3 + 0 \cdot v_1 + 1 \cdot v_2 \\ T(v_1) = -1 \cdot v_3 + 1 \cdot v_1 + 2 \cdot v_2 \\ T(v_2) = 0 \cdot v_3 + 1 \cdot v_1 + 3 \cdot v_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow T_{v'} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

ב. כנ״ל ידוע

$$\begin{cases} T(v_1) = 1 v_1 + 2 v_2 - v_3 \\ T(v_2) = 1 v_1 + 3 v_2 + 0 \cdot v_3 \\ T(v_3) = 0 \cdot v_1 + 1 \cdot v_2 - 2 v_3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} T(v_1) = v_1 + 2 v_2 - v_3 \\ T(v_1 + v_2) = T(v_1) + T(v_2) = 2 v_1 + 5 v_2 - v_3 \\ T(v_1 + v_2 + v_3) = T(v_1) + T(v_2) + T(v_3) = 2 v_1 + 6 v_2 - 3 v_3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{aligned} T(v_1) &= -1 \cdot (v_1) + 3 (v_1 + v_2) - 1 \cdot (v_1 + v_2 + v_3) \\ T(v_1 + v_2) &= -3 \cdot (v_1) + 6 (v_1 + v_2) - 1 \cdot (v_1 + v_2 + v_3) \\ T(v_1 + v_2 + v_3) &= -4 (v_1) + 9 \cdot (v_1 + v_2) - 3 \cdot (v_1 + v_2 + v_3) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow T_{v''} = \begin{pmatrix} -1 & -3 & -4 \\ 3 & 6 & 9 \\ -1 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

(4)

5. נתון: $T:V\to U$ העתקה לינארית כאשר V,U מ"ו מעל שדה F.

צ"ל: $\ker T$ תת מרחב של V.

הוכחה:

$$\ker T = \{v \mid v\in V \wedge f(v)=0_u\}$$

⇐ $\ker T\subseteq V$.

(I) לפי משפט $T(0_v)=0_u$ (כיון ש- T העתקה לינארית)

⇐ $0_v\in\ker T$ ⇐ $\ker T\neq\emptyset$

(II) יהיו $v_1,v_2\in\ker T$ אזי $v_1+v_2\in V$ וגם

$$T(v_1+v_2)\underset{\boxed{T\text{ העתקה לינארית}}}{=} T(v_1)+T(v_2) \underset{\boxed{v_1,v_2\in\ker T}}{=} 0_u+0_u=0_u$$

⇐ $v_1+v_2\in\ker T$

(III) יהי $v\in\ker T$ ויהי $\alpha\in F$ סקלר כלשהו.

⇐ $\alpha v\in V$ וגם

$$T(\alpha v) \underset{\boxed{T\text{ העתקה לינארית}}}{=} \alpha\cdot T(v) \underset{\boxed{v\in\ker T}}{=} \alpha\cdot 0_u = 0_u$$

⇐ $\alpha v\in\ker T$

⇐ לפי משפט $\ker T$ תת מרחב של V.

6. הטענה אינה נכונה.

נוכיח מ"ו V כך שלא קיים אופרטור לינארי $T:V\to V$ כך ש $\mathrm{Im}T=\ker T$.

ניקח $V=\mathbb{R}^3$ (מספיק כטענה ניתן לקחת כל V, כך ש $\dim V$ אי זוגי).

נניח בשלילה כי קיים אופרטור לינארי $T:V\to V$ כך ש $\mathrm{Im}T=\ker T$.

$\mathrm{Im}T=\ker T$ ⇐ $\dim\mathrm{Im}T=\dim\ker T=n$.

לפי משפט $2n=\dim\mathrm{Im}T+\dim\ker T=\dim V=3$

⇐ $2n=3$ לא לפתרון (סתירה).

מש"ל.

(5)

ד. הטענה נכונה. הוכחה:

צריך להראות P הפיכה כך ש- $BA = P^{-1}(AB)P$

נבחר $P=A$ (A הפיכה ולכן P הפיכה) ואז:

$$P^{-1}(AB)P \underset{\downarrow}{=} A^{-1}(AB)A = (A^{-1}A)(BA) = I(BA) = BA$$

$P=A$
A הפיכה !

מש"ל.

8. א. המט' אינן דומות כיון שהמט' היחידה דומה למט' יחידה היא מט' היחידה (ראינו בתרגול).

ב.
$$\det\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix} = -2 \neq 6 = \det\begin{pmatrix}2 & 0\\ 8 & 3\end{pmatrix}$$

$\Leftarrow$ המט' אינן דומות.

ג.
$$tr\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 5 & 6 & 7 & 8\\ 8 & 7 & 6 & 5\\ 4 & 3 & 2 & 1\end{pmatrix} = 14 \neq 15 = tr\begin{pmatrix}2 & 3 & 7 & 3\\ 1 & 3 & 7 & 5\\ 1 & 1 & 7 & 0\\ 6 & 8 & 9 & 3\end{pmatrix}$$

$\Leftarrow$ המט' אינן דומות.

תרגיל מס' 10 – ערכים עצמיים ווקטורים עצמיים

הגשה עד: 3.1.2002 , 11:00

1. לכל אחת מן המטריצות הבאות קבע האם המטריצה לכסינה או לא. אם כן מצא מטריצה הפיכה P ומטריצה אלכסונית D כך ש- $D=P^{-1}AP$.

א. $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 0 \\ 4 & -8 & -2 \end{pmatrix}$ ב. $\begin{pmatrix} 8 & 3 & -3 \\ -6 & -1 & 3 \\ 12 & 6 & -4 \end{pmatrix}$

2. עבור אילו ערכי k המטריצה $\begin{pmatrix} k+3 & 0 & 0 \\ -k-3 & k & k+3 \\ -k-3 & k & k+3 \end{pmatrix}$ אינה לכסינה מעל R ?

3. עבור אילו ערכי $a \in R$ המטריצה $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & a \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ אינה לכסינה:

א. מעל R ? ב. מעל C ?

4. נתון כי λ הינו ע"ע של A , מטריצה ריבועית מסדר n . הוכיחו כי λ^m הינו ע"ע של המטריצה A^m .

5. A היא מטריצה מסדר 2×2 בעלת ע"ע 2 ו- 5, וו"ע $(1,-1)$ ו- $(1,2)$ בהתאמה. חשב את A^{-1} .

6. חשב A^{20} עבור $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

בהצלחה!

(2)

פתרון תרגיל מס' 10:

1. א.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 0 \\ 4 & -8 & -2 \end{pmatrix}$$

(*) פולינום אופייני ה.מ $\det|\lambda I - A|$

$$\Delta_A(\lambda) = \det|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda-3 & -1 & 0 \\ 4 & \lambda+1 & 0 \\ -4 & 8 & \lambda+2 \end{vmatrix} = (\lambda+2)\left[(\lambda-3)(\lambda+1)+4\right] =$$

$$= (\lambda+2)(\lambda^2-2\lambda+1) = (\lambda+2)(\lambda-1)^2$$

(*) ע"ע הם פתרונות של המשוואה $\Delta_A(\lambda)=0$, לכן:

ע"ע של A הם $\lambda_1=\lambda_2=1$, $\lambda_3=-2$

(*) עבור $\lambda_1=\lambda_2=1$:

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ -4 & 8 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow y=-2x,\ z=\frac{20}{3}x$$

של מ"ע המתאים ל- $\lambda=1$ הוא $\text{span}\{(1,-2,\frac{20}{3})\}$ וו"ע המתאים לע"ע $\lambda=1$ הוא $(1,-2,\frac{20}{3})$.

$\lambda=1$ הוא ע"ע בעל ר"א $=2 \neq$ ר"ג $=1 \Longrightarrow$ המט' לא לכסינה!

(אין צורך להמשיך לכן).

ב.

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 3 & -3 \\ -6 & -1 & 3 \\ 12 & 6 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\Delta_A(\lambda) = \det|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda-8 & -3 & 3 \\ 6 & \lambda+1 & -3 \\ -12 & -6 & \lambda+4 \end{vmatrix} \overset{R_1+R_2\to R_2}{=} \begin{vmatrix} \lambda-8 & -3 & 3 \\ \lambda-2 & \lambda-2 & 0 \\ -12 & -6 & \lambda+4 \end{vmatrix} =$$

$$= (\lambda-2)\begin{vmatrix} \lambda-8 & -3 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ -12 & -6 & \lambda+4 \end{vmatrix} \underset{C_1-C_2\to C_1}{=} (\lambda-2)\begin{vmatrix} \lambda-5 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ -6 & -6 & \lambda+4 \end{vmatrix} =$$

373

②

$$= (\lambda-2)\left[(\lambda-5)(\lambda+4)+18\right] = (\lambda-2)(\lambda^2-\lambda-2) = (\lambda-2)^2(\lambda+1) = 0$$

⇐ ע"ע של A הינם $\underbrace{\lambda_1=\lambda_2=2}_{\text{ר"א } 2}$ ו $\underbrace{\lambda_3=-1}_{\text{ר"א } 1}$

עבור $\lambda=2$:

$$\begin{pmatrix} -6 & -3 & 3 \\ 6 & 3 & -3 \\ -12 & -6 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \quad z = 2x+y$$

⇐ ו"ע מתאימים ל $\lambda=2$ בעלי ר"ג 2 הינם:

$(1,0,2)$ ו $(0,1,1)$ ⇐ ר"ג $= 2 =$ ר"א.

עבור $\lambda=-1$:

$$\begin{pmatrix} -9 & -3 & 3 \\ 6 & 0 & -3 \\ -12 & -6 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \quad y=-x, \quad z=2x$$

⇐ ו"ע מתאים ל $\lambda=-1$ הינו $(1,-1,2)$

סה"כ לכן המ' לכסינה ו

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

ו $D = P^{-1}AP$.

.2

$$A = \begin{pmatrix} k+3 & 0 & 0 \\ -(k+3) & k & k+3 \\ -(k+3) & k & k+3 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{O}_A(\lambda) = |\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda-(k+3) & 0 & 0 \\ (k+3) & \lambda-k & -(k+3) \\ (k+3) & -k & \lambda-(k+3) \end{vmatrix} = (\lambda-(k+3))\begin{vmatrix} \lambda-k & -(k+3) \\ -k & \lambda-(k+3) \end{vmatrix} =$$

$$\overset{R_1-R_2\to R_1}{=} (\lambda-(k+3))\begin{vmatrix} \lambda & -\lambda \\ -k & \lambda-(k+3) \end{vmatrix} = \lambda(\lambda-(k+3))\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -k & \lambda-(k+3) \end{vmatrix} =$$

$$= \lambda(\lambda-(k+3))(\lambda-k-3-k) = \lambda(\lambda-(k+3))(\lambda-(2k+3)) = 0$$

⇐ ע"ע הם $\lambda_1=0$, $\lambda_2=k+3$, $\lambda_3=2k+3$

③

כאשר כל הע"ע שונים זה מזה, לכסינה,

כאשר $k+3\neq 0$ וגם $2k+3\neq 0$ וגם $k+3\neq 2k+3$, לכסינה,

כאשר $k\neq -3$ וגם $k\neq -\frac{3}{2}$ וגם $k\neq 0$, לכסינה,

כאשר $k\neq 0,-3,-\frac{3}{2}$ אז הע"ע שונים ולכן לפי משפט המט' לכסינה.

נבדוק מה קורה כאשר $k=0,-3,-\frac{3}{2}$:

* עבור $k=0$:

$$(\lambda I-A)=\begin{pmatrix}\lambda-3 & 0 & 0\\ 3 & \lambda & -3\\ 3 & 0 & \lambda-3\end{pmatrix}$$

וע"ע הם $\lambda_1=0$, $\lambda_2=\lambda_3=3$

עבור $\lambda_2=\lambda_3=3$:

$$\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 3 & 3 & -3\\ 3 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}\Rightarrow x=0,\ y=z$$

ולכן ו"ע מתאים הוא $(0,1,1)$.

לכן כאשר $k=0$ קיבלנו ע"ע 3 עם ר"א $=2\neq$ ר"ג $=1$

$\Leftarrow$ עבור $k=0$ המט' אינה לכסינה.

* עבור $k=-3$:

$$(\lambda I-A)=\begin{pmatrix}\lambda & 0 & 0\\ 0 & \lambda+3 & 0\\ 0 & 3 & \lambda\end{pmatrix}$$

וע"ע הם $\lambda_1=\lambda_2=0$, $\lambda_3=-3$

עבור $\lambda=0$:

$$\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0\\ 0 & 3 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}\Rightarrow y=0$$

לכן ו"ע מתאימים הם $(1,0,0)$ ו $(0,0,1)$.

לכן עבור $\lambda=0$ ר"ג = ר"א $=2$ ובדוק רק עבור ע"ע $\lambda=-3$ (כי ר"ג שלו שווה ל-1)

ולכן המט' לכסינה עבור $k=-3$.

④

⊛ עבור $k=-\frac{3}{2}$:

$$(\lambda I-A)=\begin{pmatrix}\lambda-\frac{3}{2}&0&0\\ \frac{3}{2}&\lambda+\frac{3}{2}&-\frac{3}{2}\\ \frac{3}{2}&\frac{3}{2}&\lambda-\frac{3}{2}\end{pmatrix}$$

וע"ע הם $\lambda_1=\lambda_3=0$, $\lambda_2=\frac{3}{2}$

עבור ע"ע $\lambda=0$:

$$\begin{pmatrix}-\frac{3}{2}&0&0\\ \frac{3}{2}&\frac{3}{2}&-\frac{3}{2}\\ \frac{3}{2}&\frac{3}{2}&-\frac{3}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\Rightarrow x=0,\ y=z$$

ולכן ו"ע הוא $(0,1,1)$, כלומר עבור $\lambda=0$ יש רק

ר"א $=2\neq1=$ ר"ג

$\Leftarrow$ עבור $k=-\frac{3}{2}$ המט' אינה לכסינה.

סה"כ לכן המט' אינה לכסינה עבור $k=0$ או $k=-\frac{3}{2}$.

③

$$A=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&a\\1&1&1\end{pmatrix}$$

$$\Delta_A(\lambda)=|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1&0&0\\-1&\lambda-1&-a\\-1&-1&\lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-1)\begin{vmatrix}\lambda-1&-a\\-1&\lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda^2-2\lambda+1-a)$$

$$=(\lambda-1)(\lambda-(1+\sqrt{a}))(\lambda-(1-\sqrt{a}))$$

לכן ע"ע הינם $\lambda_1=1$, $\lambda_2=1+\sqrt{a}$, $\lambda_3=1-\sqrt{a}$

⊛ אם $a<0$ אז $\sqrt{a}\in\mathbb{C}$ ולכן המט' לא לכסינה מעל $\mathbb{R}$ אך כן לכסינה מעל $\mathbb{C}$ (כי אז $1+\sqrt{a}\neq1-\sqrt{a}$ ושניהם שונים מ-1 (כי רק מרוכב! ולא ממשי) עבור) ולכן יש 3 ע"ע שונים!).

⊛ אם $a\geq0$:

המט' לכסינה כאשר הע"ע שונים זה מזה, כלומר, כאשר $1\neq1-\sqrt{a}$ וגם $1\neq1+\sqrt{a}$ וגם $1+\sqrt{a}\neq1-\sqrt{a}$

כלומר, כאשר $a\neq0$.

(5)

נבדוק כאשר $a=0$:

$$\lambda I-A=\begin{pmatrix}\lambda-1 & 0 & 0\\ -1 & \lambda-1 & 0\\ -1 & -1 & \lambda-1\end{pmatrix}$$

ערך עצמי $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=1$

$$\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 0\\ -1 & -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix} \Longrightarrow x=y=0$$

ולכן ו"ע מהצורה $(0,0,1)$.

לכן עבור $a=0$ קיבלנו ע"ע $\lambda=1$ ר"א$=3 \neq$ ר"ג$=1$

ולכן עבור $a=0$ המט' אינה לכסינה (לכן גם II וגם I).

סה"כ המט' אינה לכסינה מעל $\mathbb{C}$ אם $a=0$.

ו" " " " $\mathbb{R}$ " $a\leq 0$.

(4) נתון: λ ע"ע של A ; m סקלר טבעי.

צ"ל: λ^m ע"ע של A^m.

הוכחה: λ ע"ע של A $\Leftarrow$ קיים $v\neq 0$ כך ש $Av=\lambda v$.

נוכיח באינדוקציה על m כי v זה מקיים $A^m v=\lambda^m v$.

$m=1$: $Av=\lambda v$ ע"פ נתון.

$m=2$: $A^2v=A(Av)=A(\lambda v)=\lambda(Av)=\lambda(\lambda v)=\lambda^2 v$

נניח כי הטענה נכונה ל- $m-1$, כלומר $A^{m-1}v=\lambda^{m-1}v$ עבור v זה,

ונוכיח עבור m.

צ"ל לכן: אותו v זה מקיים $A^m v=\lambda^m v$.

$$A^m v=A(A^{m-1})v=A(A^{m-1}v)\underset{\text{הנחת האינדוקציה}}{=}A\cdot(\lambda^{m-1}v)=\lambda^{m-1}(Av)\underset{\text{נתון}}{=}\lambda^{m-1}(\lambda v)=(\lambda\cdot\lambda^{m-1})v=\lambda^m v$$

מש"ל.

5. נתון: $D=\begin{pmatrix}2&0\\0&5\end{pmatrix},\ P=\begin{pmatrix}1&1\\-1&2\end{pmatrix}$ אזי

$D=P^{-1}AP \quad /\cdot P$ משמאל

$\Downarrow$

$PD=AP \quad /\cdot P^{-1}$ מימין

$\Downarrow$

$$A=PDP^{-1}=\begin{pmatrix}1&1\\-1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&0\\0&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\-1&2\end{pmatrix}^{-1}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1&1\\-1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&0\\0&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&-1\\1&1\end{pmatrix}=$$

$$=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2&5\\-2&10\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&-1\\1&1\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}9&3\\6&12\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&1\\2&4\end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow\quad A^{-1}=\frac{1}{10}\begin{pmatrix}4&-1\\-2&3\end{pmatrix}$$

6. $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}$. נלכסן את A.

$$\Delta_A(\lambda)=|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1&0&-1\\0&\lambda-1&0\\-1&0&\lambda-1\end{vmatrix}\underset{\text{לפי }R_2}{=}(\lambda-1)\begin{vmatrix}\lambda-1&-1\\-1&\lambda-1\end{vmatrix}=$$

$$=(\lambda-1)\left[(\lambda-1)^2-1\right]=(\lambda-1)(\lambda^2-2\lambda)=\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)$$

$\Leftarrow$ ע"ע של A הם $\lambda_1=0,\ \lambda_2=1,\ \lambda_3=2$

* עבור $\lambda_1=0$:

$$\begin{pmatrix}-1&0&-1\\0&-1&0\\-1&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\Longrightarrow y=0,\ x=-z$$

לכן ו"ע מתאים הוא $(-1,0,1)$

* עבור $\lambda_2=1$:

$$\begin{pmatrix}0&0&-1\\0&0&0\\-1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\Longrightarrow x=z=0$$

לכן ו"ע מתאים הוא $(0,1,0)$

* עבור $\lambda_3=2$:

$$\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&0\\-1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\Longrightarrow y=0,\ x=z$$

לכן ו"ע מתאים הוא $(1,0,1)$

(7)

סה"כ לכן A לכסינה ומתקיים:

$$D=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix},\quad P=\begin{pmatrix}-1&0&1\\0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}$$

$$D=P^{-1}AP$$
$$\Downarrow$$
$$A=PDP^{-1}$$

!

בתרגול הוכחנו שאם $A=PDP^{-1}$

אזי

$$A^n=PD^nP^{-1}$$

$$D^n=\begin{pmatrix}\lambda_1&&0\\&\lambda_2&\\0&&\ddots\;\lambda_n\end{pmatrix}^n=\begin{pmatrix}\lambda_1^n&&0\\&\lambda_2^n&\\0&&\ddots\;\lambda_n^n\end{pmatrix}$$

!

לכן:

$$A^{20}=PD^{20}P^{-1}=\begin{pmatrix}-1&0&1\\0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0^{20}&0&0\\0&1^{20}&0\\0&0&2^{20}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&0&1\\0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}^{-1}=$$

$$=\begin{pmatrix}-1&0&1\\0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&2^{20}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\\0&1&0\\\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&2^{20}\\0&1&0\\0&0&2^{20}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\\0&1&0\\\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}2^{19}&0&2^{19}\\0&1&0\\2^{19}&0&2^{19}\end{pmatrix}$$

תרגיל מס' 11

הגשה עד: 10.1.2002 , 11:00

לכסון אופרטורים לינאריים

1. במ"ו $R_2(x)$ נתון אופרטור לינארי S אשר מיוצג בבסיס $V=\{x^2+2x-1, x+1, x^2+x\}$

ע"י המטריצה $S_v=\begin{pmatrix}3&0&0\\1&5&0\\2&1&1\end{pmatrix}$.

א. מצא ע"ע ו"ע של S.
ב. קבע האם S לכסין מעל R, ובמידה וכן מצא מטריצות P הפיכה ו- D אלכסונית כך ש- $D=P^{-1}S_vP$.

מרחבי מכפלה פנימית, אורתוגונליות ואורתונורמליות

2. הוכיחו כי במרחב אוקלידי ואוניטרי מתקיים $<a,b+c>=<a,b>+<a,c>$.

3. הוכיחו כי במרחב אוקלידי ואוניטרי V מתקיים $<a,0_v>=<0_v,a>=0$.

4. יהי $V=R^2$. האם הפונקציה $f:V\times V\rightarrow R$ המוגדרת ע"י $f([a,b],[c,d])=a(c+d)+b(c+2d)$ מהווה מכפלה פנימית על V?

5. תוך שימוש בתהליך גרם-שמידט מצאו בסיס אורתוגונלי ואורתונורמלי של $span\{(2,1,3,-1),(7,4,3,-3),(5,7,7,8),(1,1,-6,0)\}$.

6. מצאו וקטור נורמלי ב- R^4 הניצב לכל אחד מהוקטורים $(2,1,1,3),(1,-1,-1,1),(1,1,1,1)$.

7. האם קיים וקטור $v\neq 0_v$ ב- R^3 הניצב לכל אחד משלושת הוקטורים $(4,0,2),(1,-1,0),(3,1,3)$? אם כן, מצא אותו. נמק!!!

בהצלחה!

פתרון תרגיל 11

1. נסמן $V=\{x^2+2x-1,\ x+1,\ x^2+x\}$ ואזי

$$A=S_V=\begin{pmatrix}3&0&0\\1&5&0\\2&1&1\end{pmatrix}$$

$$\Delta_A(\lambda)=|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-3&0&0\\-1&\lambda-5&0\\-2&-1&\lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda-3)(\lambda-5)$$

כי משולשי
אלכסונית

⇐ ע"ע של $A=S_V$ ושל S הם: $\lambda_1=1,\ \lambda_2=3,\ \lambda_3=5$

קיבלנו 3 ע"ע שונים ולכן S_V לכסינה ולכן S לכסין.

* עבור $\lambda_1=1$:

$$\begin{pmatrix}-2&0&0\\-1&-4&0\\-2&-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\Longrightarrow x=y=0$$

⇐ ו"ע מתאים ל־S_V הינו $(0,0,1)$

⇐ ו"ע מתאים ל־S הוא: $0\cdot(x^2+2x-1)+0\cdot(x+1)+1\cdot(x^2+x)=x^2+x$

* עבור $\lambda_2=3$:

$$\begin{pmatrix}0&0&0\\-1&-2&0\\-2&-1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\Longrightarrow x=-2y,\ z=\frac{-3y}{2}$$

⇐ ו"ע מתאים ל־S_V הינו $(-2,1,\frac{-3}{2})$

⇐ " " " S " $-2(x^2+2x-1)+1(x+1)-\frac{3}{2}(x^2+x)=-3\frac{1}{2}x^2-4\frac{1}{2}x+3$

* עבור $\lambda_3=5$:

$$\begin{pmatrix}2&0&0\\-1&0&0\\-2&-1&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\Longrightarrow x=0,\ y=4z$$

⇐ ו"ע מתאים ל־S_V הינו $(0,4,1)$

⇐ " " " S " $0\cdot(x^2+2x-1)+4(x+1)+1\cdot(x^2+x)=x^2+5x+4$

②

סה"כ A לכסין!:

$$D=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&3&0\\0&0&5\end{pmatrix},\quad P=\begin{pmatrix}0&-2&0\\0&1&4\\1&-\frac{3}{2}&1\end{pmatrix}$$

$$D=P^{-1}S_vP$$

ומסופק

.2

$$\langle a,b+c\rangle \underset{③}{=} \overline{\langle b+c,a\rangle} \underset{①}{=} \overline{\langle b,a\rangle+\langle c,a\rangle} \underset{\text{תכונות צמוד}}{=} \overline{\langle b,a\rangle}+\overline{\langle c,a\rangle} =$$

$$\underset{③}{=} \overline{\overline{\langle a,b\rangle}}+\overline{\overline{\langle a,c\rangle}} \underset{\text{תכונות צמוד}}{=} \langle a,b\rangle+\langle a,c\rangle$$

מש"ל.

.3

$$\langle a,0_v\rangle = \langle a,0_v+0_v\rangle \underset{\boxed{\text{לפי סעיף קודם}}}{=} \langle a,0_v\rangle+\langle a,0_v\rangle \quad (*)$$

$$\Leftarrow \quad \langle a,0_v\rangle = \langle a,0_v\rangle+\langle a,0_v\rangle$$

$$\Leftarrow \quad \langle a,0_v\rangle = 0$$

(ב)

$$\langle 0_v,a\rangle \underset{②}{=} \langle 0_v+0_v,a\rangle = \langle 0_v,a\rangle+\langle 0_v,a\rangle$$

$$\Leftarrow \quad \langle 0_v,a\rangle = \langle 0_v,a\rangle+\langle 0_v,a\rangle$$

$$\Leftarrow \quad \langle 0_v,a\rangle = 0$$

מש"ל.

.4 נבדוק את הגדרת ממ"פ:

(1)

$$\forall (a,b),(c,d),(e,f)\in\mathbb{R}^2 \quad \langle (a,b)+(c,d),(e,f)\rangle = \langle (a+c,b+d),(e,f)\rangle =$$

$$= (a+c)(e+f)+(b+d)(e+2f) = \left[a(e+f)+b(e+2f)\right]+\left[c(e+f)+d(e+2f)\right] =$$

$$= \langle (a,b),(e,f)\rangle + \langle (c,d),(e,f)\rangle$$

(2)

$$\forall (a,b),(c,d)\in\mathbb{R}^2,\ \alpha\in\mathbb{R} \quad \langle \alpha(a,b),(c,d)\rangle = \langle (\alpha a,\alpha b),(c,d)\rangle =$$

$$= \alpha a(c+d)+\alpha b(c+2d) = \alpha\left[a(c+d)+b(c+2d)\right] = \alpha\langle (a,b),(c,d)\rangle$$

(3)

$$\forall (a,b),(c,d)\in\mathbb{R}^2 \quad \langle (a,b),(c,d)\rangle = a(c+d)+b(c+2d) =$$

$$= ac+ad+bc+2bd = ca+da+cb+2db = c(a+b)+d(a+2b) =$$

$$= \overline{c(a+b)+d(a+2b)} = \overline{\langle (c,d),(a,b)\rangle}$$

$$\forall (a,b)\in\mathbb{R}^2 \quad \langle (a,b),(a,b)\rangle = a(a+b)+b(a+2b) = a^2+ab+ba+2b^2 = \quad (4)$$

$$= (a+b)^2+b^2 \geq 0 \quad \forall\, a,b\in\mathbb{R}$$

כמו כן:

$$\langle (a,b),(a,b)\rangle = 0$$

$$\Longleftrightarrow (a+b)^2+b^2=0$$

$$\Longleftrightarrow \text{אם } \begin{cases} a+b=0 \\ b=0 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow a=b=0$$

$$\Longleftrightarrow (a,b)=(0,0)=0_V$$

$\Leftarrow f$ היא מ"פ על $\mathbb{R}^2$!

5. נשים לב: $W = \mathrm{span}\{(2,1,3,-1),(7,4,3,-3),(5,7,7,8),(1,1,-6,0)\}$.

נבדוק ונראה כי $\{\underset{a_1}{(2,1,3,-1)},\underset{a_2}{(7,4,3,-3)},\underset{a_3}{(5,7,7,8)}\}$ בסיס ל-W!

ע"י תהליך גרם-שמידט נבנה בסיס אורתוגונלי:

$$b_1 = a_1 = (2,1,3,-1)$$

$$b_2 = a_2 - \frac{\langle a_2,b_1\rangle}{\langle b_1,b_1\rangle}b_1 = (7,4,3,-3) - \frac{\langle (7,4,3,-3),(2,1,3,-1)\rangle}{\langle (2,1,3,-1),(2,1,3,-1)\rangle}(2,1,3,-1) =$$

$$= (7,4,3,-3) - \frac{30}{15}(2,1,3,-1) = (7,4,3,-3) - 2(2,1,3,-1) = (3,2,-3,-1)$$

$$b_3 = a_3 - \frac{\langle a_3,b_1\rangle}{\langle b_1,b_1\rangle}b_1 - \frac{\langle a_3,b_2\rangle}{\langle b_2,b_2\rangle}b_2 =$$

$$= (5,7,7,8) - \frac{\langle (5,7,7,8),(2,1,3,-1)\rangle}{\langle (2,1,3,-1),(2,1,3,-1)\rangle}(2,1,3,-1) - \frac{\langle (5,7,7,8),(3,2,-3,-1)\rangle}{\langle (3,2,-3,-1),(3,2,-3,-1)\rangle}(3,2,-3,-1) =$$

$$= (5,7,7,8) - \frac{25}{15}(2,1,3,-1) - \frac{0}{23}(3,2,-3,-1) =$$

$$= (5,7,7,8) - \frac{5}{3}(2,1,3,-1) = (5,7,7,8) - \left(\frac{10}{3},\frac{5}{3},5,\frac{-5}{3}\right) = \left(\frac{5}{3},\frac{16}{3},2,\frac{29}{3}\right)$$

$\Leftarrow \{(2,1,3,-1),(3,2,-3,-1),\left(\frac{5}{3},\frac{16}{3},2,\frac{29}{3}\right)\}$ בסיס אורתוגונלי ל-W.

$$\hat{b_1} = \frac{b_1}{\|b_1\|} = \frac{1}{\sqrt{15}}(2,1,3,-1) = \left(\frac{2}{\sqrt{15}},\frac{1}{\sqrt{15}},\frac{3}{\sqrt{15}},\frac{-1}{\sqrt{15}}\right)$$

$$\hat{b_2} = \frac{b_2}{\|b_2\|} = \frac{1}{\sqrt{23}}(3,2,-3,-1) = \left(\frac{3}{\sqrt{23}},\frac{2}{\sqrt{23}},\frac{-3}{\sqrt{23}},\frac{-1}{\sqrt{23}}\right)$$

(4)

$$\hat{b}_3 = \frac{b_3}{\|b_3\|} = \frac{1}{\sqrt{\frac{386}{3}}}\left(\frac{5}{3}, \frac{16}{3}, 2, \frac{29}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{386}}\left(\frac{5}{3}, \frac{16}{3}, 2, \frac{29}{3}\right) =$$

$$= \left(\frac{5}{\sqrt{1158}}, \frac{16}{\sqrt{1158}}, 2\cdot\sqrt{\frac{3}{386}}, \frac{29}{\sqrt{1158}}\right)$$

$\Leftarrow$ $\{\hat{b}_1, \hat{b}_2, \hat{b}_3\}$ בסיס אורתונורמלי ל- W.

6. נחפש $(x,y,z,w)\in\mathbb{R}^4$ כך ש

$$\begin{cases} \langle (x,y,z,w), (2,1,1,3)\rangle = 0 \\ \langle (x,y,z,w), (1,-1,-1,1)\rangle = 0 \\ \langle (x,y,z,w), (1,1,1,1)\rangle = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x+y+z+3w=0 \\ x-y-z+w=0 \\ x+y+z+w=0 \end{cases} \Rightarrow x=w=0,\ z=-y$$

ע"כ פ. כללי מהצורה כגון $(0,y,-y,0)$.

ע"כ כל וקטור מן הצורה $(0,y,-y,0)$ יהיה ניצב לכל אחד מן הוקטורים.
נבחר $y=1$ ונקבל $V=(0,1,-1,0)$.

ננרמל: $\hat{v} = \frac{v}{\|v\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,-1,0) = \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$.

$\Leftarrow$ $\left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)\in\mathbb{R}^4$ הינו וקטור מנורמל הניצב לכל אחד מן הוקטורים הנתונים.

7. $\{(4,0,2), (1,-1,0), (3,1,3)\}$ בסיס ל- $\mathbb{R}^3$ (בדקו)

$\Leftarrow$ הוקטור <u>היחיד</u> הניצב לבסיס ל- $\mathbb{R}^3$ הינו $0_v=(0,0,0)$.

$\Leftarrow$ לא קיים $v\neq 0_v$ ב- $\mathbb{R}^3$ הניצב לכל אחד מן הוקטורים.

החוג למדעי המחשב – אלגברה לינארית , סמסטר א' תשס"ב

תרגיל מס' 12

הגשה עד: 17.1.2002 , 11:00

1. יהי $V = R^4$ ויהי $U = span\{(1,2,0,3),(4,0,5,8),(8,1,5,6)\}$. מצאו בסיס למשלים אורתוגונלי
של U ב-V .

2. מצאו proj(v,U) כאשר :

$$v = (4,-1,-3,4) \quad , \quad U = span\{(1,2,2,-1),(1,0,0,3),(1,1,1,1)\} .$$

3. למה שווים איברי האלכסון הראשי במטריצה אנטי-הרמיטית? ובמטריצה הרמיטית?

4. מצא $a,b \in C$ כך שהמטריצה $\begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & 2a & a \\ i & 1 & a \end{pmatrix}$ הרמיטית.

5. הוכח או הפרך:
אם A אנטי הרמיטית ו- B דומה אוניטרית ל- A, אזי גם B אנטי-הרמיטית.

6. לכל אחת מהמטריצות הבאות מצאו P אורתוגונלית ו- D אלכסונית, כך ש $D = P^t AP$:

א. $\begin{pmatrix} 11 & 2 & -8 \\ 2 & 2 & 10 \\ -8 & 10 & 5 \end{pmatrix}$ ב. $\begin{pmatrix} 3 & -i & 0 \\ i & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

<u>שאלת בונוס:</u>

א. יהיו W,U תתי מרחבים במרחב אוקלידי V. הוכח או הפרך: $(W+U)^{\perp} = U^{\perp} \cap W^{\perp}$.

ב. הוכח או הפרך: אם A אוניטרית אזי לכל a, ע"ע של A מתקיים |a|=1 .

רמז: ניתן להסתמך ללא הוכחה על הטענה: אם a ע"ע של מט' A המתאים לו"ע $v \neq 0$ ו- A אוניטרית, אזי $\bar{a}$ ע"ע של A* המתאים לאותו ו"ע $v \neq 0$.

בהצלחה!!

פתרון תרגיל מס' 12:

(1) נחפש וקטור מהצורה (a,b,c,d) כך ש:

$$\begin{cases} \langle (a,b,c,d),(1,2,0,3)\rangle = a+2b+3d=0 \\ \langle (a,b,c,d),(4,0,5,8)\rangle = 4a+5c+8d=0 \\ \langle (a,b,c,d),(8,1,5,6)\rangle = 8a+b+5c+6d=0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{array}{l} a=d \\ b=-2d \\ c=-\frac{12}{5}d \end{array}$$

$\Leftarrow$ $U^{\perp}=span\{(1,-2,-\frac{12}{5},1)\}$

$\Leftarrow$ בסיס ל- $U^{\perp}$ הוא $\{(5,-10,-12,5)\}$

(2) * נמצא בסיס ל- U:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3-R_1\to R_3]{R_2-R_1\to R_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & -2 & 4 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_2\cdot(-\frac{1}{2})\to R_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3+R_2\to R_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\Leftarrow$ בסיס ל- U הוא: $\{(1,2,2,-1),(0,1,1,-2)\}$

* נמצא בסיס ל- $U^{\perp}$:

$$\begin{cases} \langle (a,b,c,d),(1,2,2,-1)\rangle = a+2b+2c-d=0 \\ \langle (a,b,c,d),(0,1,1,-2)\rangle = b+c-2d=0 \end{cases}$$

$\Leftarrow$ $a=-3d,\ b=2d-c$

$\Leftarrow$ בסיס ל- $U^{\perp}$ הוא: $\{(-3,2,0,1),(0,-1,1,0)\}$

סה"כ נקבל:

$$(4,-1,-3,4)=\underbrace{a(-3,2,0,1)+b(0,-1,1,0)}_{U^{\perp}}+\underbrace{c(1,2,2,-1)+d(0,1,1,-2)}_{U}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} 4=-3a+c \\ -1=2a-b+2c+d \\ -3=b+2c+d \\ 4=a-c-2d \end{cases} \Longrightarrow a=-1,\ b=-2,\ c=1,\ d=-3$$

$\Longrightarrow proj(v,U)=1(1,2,2,-1)-3(0,1,1,-2)=(1,-1,-1,5)$

3. (א) תהי $A=[a_{ij}]$ מט' הרמיטית

$\Leftarrow \quad A^*=A$

$\Leftarrow \quad (\overline{A})^t=A$

$\Leftarrow \quad \overline{a_{ii}}=a_{ii} \qquad \forall\, 1\le i\le n$

⇐ כל אברי האלכסון הראשי הם ממשיים בהכרח.

(ב) תהי $A=[a_{ij}]$ מט' אנטי-הרמיטית

$\Leftarrow \quad A^*=-A$

$\Leftarrow \quad (\overline{A})^t=-A$

$\Leftarrow \quad \overline{a_{ii}}=-a_{ii} \qquad \forall\, 1\le i\le n$

$\Leftarrow \quad \overline{a_{ii}}+a_{ii}=0 \qquad \forall\, 1\le i\le n$

$\Leftarrow \quad Re(a_{ii})=0 \qquad \forall\, 1\le i\le n$

⇐ איברי האלכסון הראשי במט' אנטי-הרמיטית הם מדומים טהורים.

4.

$$\begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & 2a & a \\ i & 1 & a \end{pmatrix}^* = \overline{\begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & 2a & a \\ i & 1 & a \end{pmatrix}^t} = \overline{\begin{pmatrix} a & 0 & i \\ 0 & 2a & 1 \\ b & a & a \end{pmatrix}} =$$

$$= \begin{pmatrix} \boxed{\overline{a}} & 0 & \boxed{-i} \\ 0 & \boxed{2\overline{a}} & \boxed{1} \\ \boxed{\overline{b}} & \boxed{\overline{a}} & \boxed{\overline{a}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{a} & 0 & \boxed{b} \\ 0 & \boxed{2a} & \boxed{a} \\ \boxed{i} & \boxed{1} & \boxed{a} \end{pmatrix}$$

$\Leftarrow \quad a=1\ ,\ b=-i$

5. הטענה נכונה. הוכחה:

תהי A מט' אנטי-הרמיטית ותהי B דומה אוניטרית ל-A.

⇐ לכן קיימת P אוניטרית כך ש $B=P^*AP$

משפט:

$$B^*=(P^*AP)^*=((P^*A)P)^* \underset{(AB)^*=B^*A^*}{=} P^*(P^*A)^* = P^*A^*(P^*)^* =$$

$$\underset{(P^*)^*=P,\ A\ \text{אנטי-הרמיטית}}{=} P^*(-A)P = -(P^*AP) = -B$$

⇐ B אנטי-הרמיטית מש"ל.

③

(6) (א)

$$A=\begin{pmatrix}11 & 2 & -8\\ 2 & 2 & 10\\ -8 & 10 & 5\end{pmatrix}$$

A סימטרית ולכן לכסינה אורתוגונלית בהכרח.

$$P_A(\lambda)=|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-11 & -2 & 8\\ -2 & \lambda-2 & -10\\ 8 & -10 & \lambda-5\end{vmatrix}=\lambda^3-18\lambda^2-81\lambda+1458=$$

$$=(\lambda-9)(\lambda^2-9\lambda-162)=(\lambda-9)(\lambda-18)(\lambda+9)$$

⇐ ע"ע הינם $\lambda_1=9,\ \lambda_2=18,\ \lambda_3=-9$

(*) עבור $\lambda_1=9$:

$$\begin{pmatrix}-2 & -2 & 8\\ -2 & 7 & -10\\ 8 & -10 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}\Longrightarrow x=2z,\ y=2z$$

⇐ ו"ע הינו $(2,2,1)$

⇐ ו"ע מנורמל הוא $\left(\frac{2}{3},\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right)$

(*) עבור $\lambda_2=18$:

$$\begin{pmatrix}7 & -2 & 8\\ -2 & 16 & -10\\ 8 & -10 & 13\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}\Longrightarrow x=-2y,\ z=2y$$

⇐ ו"ע הוא $(-2,1,2)$

⇐ ו"ע מנורמל הוא $\left(\frac{-2}{3},\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$

(*) עבור $\lambda_3=-9$:

$$\begin{pmatrix}-20 & -2 & 8\\ -2 & -11 & -10\\ 8 & -10 & -14\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}\Longrightarrow z=2x,\ y=-2x$$

⇐ ו"ע הוא $(1,-2,2)$

⇐ ו"ע מנורמל הוא $\left(\frac{1}{3},\frac{-2}{3},\frac{2}{3}\right)$

ס"כ A לכסינה אורתוגונלית!

$$D=\begin{pmatrix}9 & 0 & 0\\ 0 & 18 & 0\\ 0 & 0 & -9\end{pmatrix},\quad P=\begin{pmatrix}2/3 & -2/3 & 1/3\\ 2/3 & 1/3 & -2/3\\ 1/3 & 2/3 & 2/3\end{pmatrix}$$

$D=P^tAP$

④

ב.

$$A=\begin{pmatrix}3 & -i & 0\\ i & 3 & 0\\ 0 & 0 & 4\end{pmatrix}$$

A הרמיטית ולכן דומה אוניטרית למט' אלכסונית ממשית.

$$\Delta_A(\lambda)=|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-3 & i & 0\\ -i & \lambda-3 & 0\\ 0 & 0 & \lambda-4\end{vmatrix}=(\lambda-4)\left[\lambda^2-6\lambda+9-1\right]=(\lambda-4)(\lambda^2-6\lambda+8)$$

$$=(\lambda-4)(\lambda-4)(\lambda-2)=(\lambda-4)^2(\lambda-2)$$

⇐ ע"ע הם $\lambda=2$ בריבוי 1, $\lambda=4$ בריבוי 2.

(*) עבור $\lambda=4$:

$$\begin{pmatrix}1 & i & 0\\ -i & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}\Longrightarrow y=ix$$

⇐ ו"ע מתאימים הם $(1,i,0),(0,0,1)$ והם אורתוגונליים
לפי המ"פ ב-$\mathbb{C}$!

⇐ ו"ע אורתונורמליים מתאימים הם לכן:

$$\left[\|(1,i,0)\|=\sqrt{\langle(1,i,0),(1,i,0)\rangle}=\sqrt{1\cdot\bar{1}+i\cdot\bar{i}+0\cdot\bar{0}}=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}\right]$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{i}{\sqrt{2}},0\right),\ (0,0,1)$$

(*) עבור $\lambda=2$:

$$\begin{pmatrix}-1 & i & 0\\ -i & -1 & 0\\ 0 & 0 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}\Longrightarrow z=0,\ x=iy$$

⇐ ו"ע מתאים הוא $(i,1,0)$

ננרמל:

$$\|(i,1,0)\|=\sqrt{i\cdot\bar{i}+1\cdot\bar{1}+0\cdot\bar{0}}=\sqrt{2}$$

לכן ו"ע מנורמל הוא $\left(\frac{i}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},0\right)$

סה"כ A לכסינה אוניטרית!

$$D=\begin{pmatrix}4 & 0 & 0\\ 0 & 4 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix},\quad P=\begin{pmatrix}1/\sqrt{2} & 0 & i/\sqrt{2}\\ i/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2}\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

$D=P^*AP$.

ומש"ל

(5)

שאלת בונוס:

א. הוכחה: $v \in U^\perp \cap W^\perp$

$\iff$ $v \in U^\perp$ וגם $v \in W^\perp$

$\iff$ $\forall u \in U \quad \langle u,v\rangle = 0$ וגם $\forall w \in W \quad \langle w,v\rangle = 0$

$\iff$ $\forall w\in W, u \in U \quad \langle w,v\rangle + \langle u,v\rangle = 0+0=0$

$\iff$ $\forall w\in W, u\in U \quad \langle w+u, v\rangle = 0$

$\iff$ $v \in (W+U)^\perp$

לכן $v \in U^\perp \cap W^\perp \iff v \in (W+U)^\perp$

$\Leftarrow$ $U^\perp \cap W^\perp = (W+U)^\perp$

מש"ל.

ב. הוכחה:

A אוניטרית $\Leftarrow$ $A^* = A^{-1}$.

ויהי a ע"ע של A אוניטרית.

$\Leftarrow$ $\bar{a}$ ע"ע של A^*, ולכן קיים $v\neq 0$ כך ש: $\bar{a} v = A^* v = A^{-1} v = a^{-1} v$

A אוניטרית

ראינו כי
אם a ע"ע של A המתאים לו $v\neq 0$
אזי a^{-1} ע"ע של A^{-1} המתאים
לו $v\neq 0$

$\Rightarrow \bar{a} v = a^{-1} v$

$\Rightarrow \bar{a} = a^{-1} \quad / \cdot a$

$\Rightarrow \bar{a} a = 1$

$\Rightarrow |a|^2 = 1 \quad / |a| \geq 0$

$\Rightarrow |a| = 1$

מש"ל.

החוג למדעי המחשב – אלגברה לינארית , סמסטר א' תשס"ב

תרגיל מס' 13

הגשה עד: 24.1.2002 , 11:00

1. קבעו עבור כל אחת מן המטריצות הבאות האם היא שלילית/חיובית/אי-שלילית/מעורבת:

א. $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ ב. $\begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ ג. $\begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

ד. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

2. עבור אילו ערכי $a \in R$ המטריצה $\begin{pmatrix} a & 3 & -1 \\ 3 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ חיובית ?

3. רשמו בצורה מטריצית את התבניות הריבועיות הבאות:

א. $Q(x,y) = x^2 - 10xy - 3y^2$

ב. $Q(x,y,z) = x^2 - 10xy - 3y^2$

ג. $Q(x,y,z,w) = 3x^2 - 12y^2 - w^2 - 6xy + 10yz + 11yw - 4xw$

ד. $Q(x_1,\dots,x_n) = \left(\sum_{i=1}^{n} n{x_i}^2\right) + \left(\sum_{i=1}^{n-1} 2x_i x_{i+1}\right)$

4. מצאו את התבניות הריבועיות המוגדרות ע"י המטריצות הבאות:

א. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 8 & -5 \\ 0 & -5 & 3 \end{pmatrix}$ ב. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & -4 & 0 \\ 3 & -4 & 3 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ ג. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

5. לכסנו את התבנית הריבועית $Q(x,y,z) = x^2 - z^2 - 4xy + 4yz$.

6. איזה עקום במישור x,y מתואר ע"י המשוואה $4x^2 + 4y^2 + 4xy = 9$?

בהצלחה!

①

פתרון תרגיל מס' 13

1. א.

$$\delta_1 = |1| = 1 > 0$$

$$\delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 10 \end{vmatrix} = 1 > 0$$

$$\delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 3 > 0$$

$\Longrightarrow$ המט' חיובית

ב.

$$\delta_1 = |5| = 5 > 0$$

$$\delta_2 = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 1 > 0$$

$$\delta_3 = \begin{vmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -2 - 2 = -4 < 0$$

$\Longrightarrow$ מעורבת

ג.

$$\delta_1 = |-1| = -1 < 0$$

$$\delta_2 = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = -9 < 0$$

$$\delta_3 = \begin{vmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 5 \end{vmatrix} = -45 < 0$$

$\Longrightarrow$ מעורבת

ד.

$$\delta_1 = |0| = 0 \not> 0$$

$$\delta_2 = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -1 < 0$$

$$\delta_3 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} = -5 < 0$$

$\Longrightarrow$ מעורבת

2. כדי שהמט' $\begin{pmatrix} a & 3 & -1 \\ 3 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ תהיה חיובית, אנו דורשים:

אם

$$\delta_1 = a > 0$$

$$\delta_2 = \begin{vmatrix} a & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 2a - 9 > 0$$

$$\delta_3 = \begin{vmatrix} a & 3 & -1 \\ 3 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} a & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -2 + 3(2a-9) = 6a - 29 > 0$$

⇐ $a>0$ וגם $a>\frac{9}{2}$ וגם $a>\frac{29}{6}$

⇐ עבור $a>\frac{29}{6}$ המט' תהיה חיובית.

3. א.

$$Q(x,y)=x^2-10xy-3y^2$$

$$\Rightarrow A=\begin{pmatrix}1 & -5\\ -5 & -3\end{pmatrix}\quad,\quad Q(x,y)=(x\ y)A\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$$

ב.

$$Q(x,y,z)=x^2-10xy-3y^2$$

$$\Rightarrow A=\begin{pmatrix}1 & -5 & 0\\ -5 & -3 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\quad,\quad Q(x,y,z)=(x,y,z)A\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}$$

ג.

$$Q(x,y,z,w)=3x^2-12y^2-w^2-6xy+10yz+11yw-4xw$$

$$\Rightarrow A=\begin{pmatrix}3 & -3 & 0 & -2\\ -3 & -12 & 5 & 5\frac{1}{2}\\ 0 & 5 & 0 & 0\\ -2 & 5\frac{1}{2} & 0 & -1\end{pmatrix}\quad,\quad Q(x,y,z,w)=(x,y,z,w)A\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\\ w\end{pmatrix}$$

ד.

$$Q(x_1,\dots,x_n)=\sum_{i=1}^{n} i x_i^2+\sum_{i=1}^{n-1}2x_ix_{i+1}=$$

$$=\left(x_1^2+2x_2^2+3x_3^2+\dots+nx_n^2\right)+\sum_{i=1}^{n-1}2x_ix_{i+1}$$

$$\Rightarrow A=\begin{pmatrix}1 & 1 & & & & \\ 1 & 2 & 1 & & 0 & \\ & 1 & 3 & 1 & & \\ & & 1 & \ddots & \ddots & \\ & 0 & & \ddots & n-1 & 1\\ & & & & 1 & n\end{pmatrix}\quad,\quad Q(x_1,\dots,x_n)=(x_1,\dots,x_n)A\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$$

③

$$Q(x,y,z) = (x\ y\ z)A\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}, \quad A=\begin{pmatrix}1&2&0\\2&8&-5\\0&-5&3\end{pmatrix}$$ (א) (ט.)

$$\Rightarrow Q(x,y,z) = x^2+8y^2+3z^2+4xy-10yz$$

(ב.)

$$Q(x,y,z,w) = (x\ y\ z\ w)A\begin{pmatrix}x\\y\\z\\w\end{pmatrix}, \quad A=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&2&-4&0\\3&-4&3&0\\4&0&0&4\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow Q(x,y,z,w) = x^2+2y^2+3z^2+4w^2+4xy+6xz+8xw-8yz$$

(ג.)

$$Q(x,y) = (x\ y)A\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}, \quad A=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow Q(x,y) = x^2+y^2+2xy = (x+y)^2$$

(ד.)

$$Q(x,y,z) = x^2-z^2-4xy+4yz$$

$$\Rightarrow Q(x,y,z) = (x\ y\ z)A\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}, \quad A=\begin{pmatrix}1&-2&0\\-2&0&2\\0&2&-1\end{pmatrix}$$

A סימטרית ולכן לכסינה אורתוגונלית. נלכסן אורתוגונלית את A:

$$\mathcal{O}_A(\lambda) = |\lambda I - A| = \begin{vmatrix}\lambda-1&2&0\\2&\lambda&-2\\0&-2&\lambda+1\end{vmatrix} = (\lambda-1)\begin{vmatrix}\lambda&-2\\-2&\lambda+1\end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix}2&-2\\0&\lambda+1\end{vmatrix} =$$

$$= (\lambda-1)(\lambda^2+\lambda-4) - 2\cdot 2(\lambda+1) = \lambda^3-\lambda^2+\lambda^2-\lambda-4\lambda+4-4\lambda-4 =$$

$$= \lambda^3-9\lambda = \lambda(\lambda^2-9) = \lambda(\lambda+3)(\lambda-3)$$

⇐ ע"ע של A הם $\lambda_1=0$, $\lambda_2=3$, $\lambda_3=-3$ כ"א מר"א 1.

⊛ עבור $\lambda=0$:

$$\begin{pmatrix}-1&2&0\\2&0&-2\\0&-2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \Longrightarrow x=z=2y$$

⇐ ו"ע של A המתאים לע"ע 0 הוא $(2,1,2)$

(4)

$$\|(2,1,2)\| = \sqrt{4+1+4} = \sqrt{9} = 3$$

⇐ ו"ע מנורמל של A המתאים ל $\lambda=0$ הוא $\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$

⊛ עבור $\lambda=3$:

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow x = -2z,\ y = 2z$$

⇐ ו"ע מתאים הוא $(-2, 2, 1)$

⇐ ו"ע מנורמל מתאים הוא $\left(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$

⊛ עבור $\lambda=-3$:

$$\begin{pmatrix} -4 & 2 & 0 \\ 2 & -3 & -2 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow y = 2x,\ z = -2x$$

⇐ ו"ע מתאים הוא $(1, 2, -2)$

⇐ ו"ע מנורמל מתאים הוא $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right)$

לסיכום:

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix},\quad P = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

$$A = PDP^t$$

ונשים לב כי P אורתוגונלית !

התבנית הקנונית המתאימה היא

$$Q\begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \\ \tilde{z} \end{pmatrix} = (\tilde{x}\ \tilde{y}\ \tilde{z})\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \\ \tilde{z} \end{pmatrix} = 3\tilde{y}^2 - 3\tilde{z}^2$$

כאשר:

$$\begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \\ \tilde{z} \end{pmatrix} = P^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \underset{P \text{ אורתוגונלית}}{=} P^t\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2x+y+2z}{3} \\ \frac{-2x+2y+z}{3} \\ \frac{x+2y-2z}{3} \end{pmatrix}$$

(5)

(6) נמצא ראשית את התבנית הריבועית $Q(x,y) = 4x^2+4y^2+4xy$.

נרשום את Q בצורה מטריצית:

$$Q(x,y) = (x\ \ y)\begin{pmatrix}4&2\\2&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

נמצא אורתוגונלית את הע"ע של המטריצה המייצגת של התבנית הריבועית Q, $A=\begin{pmatrix}4&2\\2&4\end{pmatrix}$.

נזכיר כי A סימטרית.

$$\Delta_A(\lambda) = \begin{vmatrix}\lambda-4&-2\\-2&\lambda-4\end{vmatrix} = (\lambda-4)^2-4 = \lambda^2-8\lambda+12 = (\lambda-6)(\lambda-2)$$

$\Leftarrow$ הע"ע של A הם $\lambda=2, \lambda=6$.

לכן צורה קנונית של Q במישור $\tilde{x},\tilde{y}$ היא

$$Q(\tilde{x},\tilde{y}) = (\tilde{x}\ \ \tilde{y})\begin{pmatrix}6&0\\0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\tilde{x}\\\tilde{y}\end{pmatrix} = 6\tilde{x}^2+2\tilde{y}^2$$

במישור x,y העקום הוא $4x^2+4y^2+4xy=9$,

ובגלל שמדובר על שינוי הבסיס אורתוגונלי

לכן במישור $\tilde{x},\tilde{y}$ המשוואה המתאימה לעקום תהיה

$$6\tilde{x}^2+2\tilde{y}^2=9$$

כלומר $\frac{x^2}{\left(\frac{3}{2}\right)}+\frac{y^2}{\left(\frac{9}{2}\right)}=1$

זוהי משוואת אליפסה!

הערה: אין צורך במציאת הווקטורים העצמיים, כיון שכל שנדרש הוא לזהות את סוג העקום בעזרת המשוואה, ללא את המעבר אליו!