החוג למדעי המחשב
אוניברסיטת חיפה

מבחן אמצע באלגברה לינארית

<u>סמסטר א' תשס"ד</u>

תאריך: 19.12.03 משך הבחינה: **2.5** שעות
מרצה: ד"ר דבורה טולדנו-קטעי מתרגלת: יעל כהן-סיגל
הערות: יש לענות על כל השאלות 1-4 .
חומר עזר מותר: מחשבון ודף נוסחאות מצורף.

<u>שאלה 1:</u> (25 נק')

א. מצאו, אם קיימים, את כל הפתרונות מעל המרוכבים של המשוואה $\frac{\bar{z}-z}{3i}+z\cdot\bar{z}=2-8i$.

ב. הוכיחו כי לכל $z\in C$ הדטרמיננטה $\begin{vmatrix} -1 & 2z & -\bar{z} \\ 2\bar{z} & -2 & z \\ -z & \bar{z} & 5 \end{vmatrix}$ היא מספר ממשי טהור.

<u>שאלה 2:</u> (20 נק')

נתונה מערכת המשוואות:

$$\begin{cases} ax+ay-az=a \\ -x+4y-az=0 \\ 2x-8y+4z=1 \end{cases}$$

עבור אילו ערכי a יש למערכת א) פתרון יחיד ב) אינסוף פתרונות ג) אין פתרון?
כאשר למערכת יש אינסוף פתרונות:
(i) כמה משתנים חופשיים יש למערכת? אילו מן המשתנים יכולים להיות חופשיים?
(ii) הציגו את הפתרון הכללי.

<u>שאלה 3:</u> (30 נק')

א. הוכיחו כי $A\in R^{n\times n}$ הפיכה אמ"ם $|A|\neq 0$.

ב. הוכיחו כי לכל $A,B\in R^{n\times n}$ אם A,B סימטריות המקיימות $AB=-BA$ אזי AB^2 סימטרית.

ג. מטריצה $A\in R^{n\times n}$ נקראת נילפוטנטית אם קיים $k\in N$ כך ש $A^k=0$. הוכיחו כי אם A נילפוטנטית אזי A לא הפיכה.

<u>שאלה 4:</u> (25 נק')

לגבי כל אחת מן הקבוצות הבאות הוכיחו או הפריכו האם היא מהווה מרחב וקטורים:

א. $W = \left\{ A \in R^{n\times n} \;\middle|\; A^t = -5A \right\}$ עם פעולת חיבור מטריצות וכפל מטריצות בסקלר מעל R.

ב. $W = \left\{ a + bx + cx^2 \;\middle|\; a, b, c \in R \quad \wedge \quad b^2 - 4ac \ge 0 \right\}$ עם פעולת חיבור פולינומים וכפל פולינומים בסקלר מעל R.

<u>בהצלחה!</u>

(1)

פתרון מבחן אמצע

שאלה 1:

א.

$$\frac{\bar z - z}{3i} + z\cdot\bar z = -\frac{2}{3}\cdot\frac{z-\bar z}{2i} + z\cdot\bar z =$$

תכונת מרוכבים

$$= \underbrace{-\frac{2}{3}Im(z)}_{\text{ממשי טהור}} + \underbrace{|z|^2}_{\text{ממשי טהור}} = \text{מס ממשי טהור}$$

ובהכרח לא יכול להיות שווה למס' מרוכב מהצורה $2-8i$.

שכן לא קיימים מס' מרוכבים המקיימים את המשוואה.

ב.

$$\begin{vmatrix} -1 & 2z & -\bar z \\ 2\bar z & -2 & z \\ -z & \bar z & 5 \end{vmatrix} \underset{R_3 - zR_1 \to R_3}{\overset{R_2+2\bar z R_1 \to R_2}{=}} \begin{vmatrix} -1 & 2z & -\bar z \\ 0 & -2+4z\bar z & z-2\bar z^2 \\ 0 & \bar z - 2z^2 & 5+z\bar z \end{vmatrix} =$$

בגלל $z\cdot\bar z = |z|^2$ תכונת מרוכבים

$$= \begin{vmatrix} -1 & 2z & -\bar z \\ 0 & -2+4|z|^2 & z-2\bar z^2 \\ 0 & \bar z - 2z^2 & 5+|z|^2 \end{vmatrix} \underset{\text{פיתוח לפי } C_1}{=} - \begin{vmatrix} -2+4|z|^2 & z-2\bar z^2 \\ \bar z - 2z^2 & 5+|z|^2 \end{vmatrix} =$$

כי מספר 2

$$= -\left[(-2+4|z|^2)(5+|z|^2) - (z-2\bar z^2)(\bar z - 2z^2)\right] =$$

$$= -\left[(-2+4|z|^2)(5+|z|^2) - (z-2(\bar z)^2)(\bar z - 2z^2)\right] =$$

תכונת מרוכבים $\bar w\cdot\bar t = \overline{wt}$

$$= -\left[(-2+4|z|^2)(5+|z|^2) - (\overline{z - 2z^2})(\bar z - 2z^2)\right] =$$

תכונת מרוכבים $\bar w + \bar t = \overline{w+t}$ וגם $\bar{\bar w} = w$

תכונת מרוכבים $w\bar w = |w|^2$

$$= -\underbrace{\left[(-2+4|z|^2)(5+|z|^2) - |\bar z - 2z^2|^2\right]}_{\text{ממשי טהור (כי לכל } w\in\mathbb{C}\ |w| \text{ ממשי טהור)}}$$

ולכן הדט' הוא מספר ממשי טהור.

מש"ל

שאלה 2:

נדרג את המט' המורחבת של המערכת:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a & a & -a & a \\ -1 & 4 & -a & 0 \\ 2 & -8 & 4 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 4 & -a & 0 \\ a & a & -a & a \\ 2 & -8 & 4 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3 + 2R_1 \to R_3]{R_2 + aR_1 \to R_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 4 & -a & 0 \\ 0 & 5a & -a-a^2 & a \\ 0 & 0 & 4-2a & 1 \end{array}\right)$$

(*) לפי משפט למערכת פ. יחיד אמ"מ $\text{rank}(A) = \underset{\text{מס' הנעלמים}}{\overset{\shortparallel}{3}}$, כלומר, למערכת יש פ. יחיד

אמ"מ $5a \neq 0$ וגם $4-2a \neq 0$, כלומר, אמ"מ $a \neq 0,2$.

(*) נבדוק עבור $a=0$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

מתקיים עבור $a=0$ כי $\text{rank}(A) = \text{rank}(A|b) = 2 < 3 =$ מס' הנעלמים

ולכן לפי משפט עבור $a=0$ למערכת יש אינסוף פתרונות.

(*) נבדוק $a=2$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 4 & -2 & 0 \\ 0 & 10 & -6 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

עבור $a=2$ מתקיים $\text{rank}(A) = 2 < 3 = \text{rank}(A|b)$

ולכן לפי משפט למערכת אין פ.

סה"כ: עבור $a \neq 0,2$ למערכת יש פ. יחיד.

" $a=0$ " " אינסוף פתרונות.

" $a=2$ " " אין פתרון.

למערכת יש אינסוף פתרונות אמ"מ $a=0$, ובמקרה זה נקבל את המט' המדורגת

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

השקולה למערכת

$$\begin{cases} -x+4y = 0 \\ 4z = 1 \end{cases}$$

מקבלים כי: $\underbrace{\text{מס' הנעלמים}}_{3} - \underbrace{rank(A)}_{2} = 1 =$ מס' הנעלמים החופשיים

ולכן למערכת יש נעלם חופשי אחד.

z איננו נעלם חופשי כיוון שערכו מוגדר ע"י המשוואה ה-2,

ניתן לבחור כנעלם חופשי את x או את y.

מהמשוואה ה-2 נובע כי $z=1/4$, ומהמשוואה ה-1 $x=4y$,

ולכן פ. כללי למערכת הוא $(4y, y, 1/4)$.

שאלה 3:

א. משפט: ראו הוכחה בהרצאה.

ב. יהיו $A,B\in\mathbb{R}^{n\times n}$ סימטריות המקיימות $AB=-BA$, אזי:

$$(AB^2)^t \underset{\text{אסוציאטיביות כפל מט'}}{=} ((AB)(B))^t \underset{(CD)^t=D^tC^t}{=} B^t(AB)^t \underset{(CD)^t=D^tC^t}{=} B^tB^tA^t =$$

$$\underset{\text{A,B סימטריות - נתון}}{=} BBA = B(BA) \underset{\text{נתון AB=-BA ולכן BA=-AB}}{=} B(-AB) \underset{\text{תכונות כפל מט' בסקלר ואסוציאטיביות כפל מט'}}{=} (-BA)(B) =$$

$$\underset{\text{נתון AB=-BA}}{=} (AB)(B) = AB^2$$

קיבלנו לכן: $(AB^2)^t = AB^2$

$\Leftarrow$ AB^2 סימטרית.

מש"ל.

ג. תהי $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ מט' נילפוטנטית.

$\Leftarrow$ קיים $k \in N$ כך ש $A^k = 0$.

$\Leftarrow$ $|A^k| = |0| = 0$.

דט' של מט' האפס הוא אפס

$\Leftarrow$ $|A|^k = 0$

ידוע כי $|BC| = |B|\cdot|C|$ ולכן $|A^k| = \underbrace{|A|\cdots|A|}_{k \text{ פעמים}}$

$\Leftarrow$ $|A| = 0$

$\Leftarrow$ A לא הפיכה

לפי משפט A הפיכה אמ"מ $|A| \neq 0$

מש"ל.

שאלה 4:

א. $W \subseteq V = \mathbb{R}^{n\times n}$ ידוע כי V מ"ו (מעל $\mathbb{R}$ עם פעולות חיבור מט' וכפל מט' בסקלר).

נראה כי W תת מרחב של V:

(1) $[0]^t = [0] = -5[0]$

ולכן $[0] \in W$

$\Leftarrow$ $W \neq \emptyset$

(2) יהיו $A, B \in W$. אזי $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ולכן גם $A+B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ומתקיים:

$$(A+B)^t = A^t + B^t = -5A - 5B = -5(A+B)$$

תכונת transpose; $A, B \in W$; תכונת חיבור מט' וכפל מט' בסקלר

$\Leftarrow$ $A+B \in W$

$\Leftarrow$ W סגור תחת חיבור מט'.

(3) תהי $A \in W$ ויהי $\alpha \in \mathbb{R}$ סקלר. אזי $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ולכן גם $\alpha A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ולכן:

$$(\alpha A)^t = \alpha(A^t) = \alpha(-5A) = -5(\alpha A)$$

תכונת transpose; $A \in W$; תכונת כפל מט' בסקלר

$\Leftarrow$ $\alpha A \in W$

$\Leftarrow$ W סגור תחת כפל מט' בסקלר.

סה"כ לכן, לפי משפט, W תת מרחב של V ולכן מ"ו בפני עצמו.

(ב.) W אינו מ"ו כיון שאינו סגור תחת חיבור :

$W \ni p(x) = x^2 - 8x + 1$ כי $(-8)^2 - 4\cdot1\cdot1 = 60 \geq 0$

$W \ni q(x) = x^2 + 8x + 1$ כי $8^2 - 4\cdot1\cdot1 = 60 \geq 0$

אבל $W \not\ni p(x)+q(x) = 2x^2+2$

כי $0^2 - 4\cdot2\cdot2 = -16 < 0$.

W לא סגור תחת חיבור וקטורי ולכן אינו מ"ו!