פתרון מבחן בשיטות הסתברותיות.

מועד א תשס"ה, סמסטר ב.

(1)

סעיף א

הסתברות שלמה

$$P(\text{B ינצח}) = P(\text{B ינצח} \mid \text{B יורה ויפגע ב-A}) \cdot P(\text{B יורה ויפגע ב-A}) +$$

$$+ P(\text{B ינצח} \mid \text{B יורה ולא יפגע}) \cdot P(\text{B יורה ולא יפגע}) +$$

$$+ P(\text{B ינצח} \mid \text{A יורה ויפגע ב-B}) \cdot P(\text{A יורה ויפגע ב-B}) +$$

$$+ P(\text{B ינצח} \mid \text{A יורה ולא יפגע ב-B}) \cdot P(\text{A יורה ולא יפגע ב-B}) =$$

$$= 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot 0.4 + P(\text{B ינצח}) \cdot \frac{1}{2} \cdot 0.6 + 0 + P(\text{B ינצח}) \cdot \frac{1}{2} \cdot 0.2$$

$$\Downarrow$$

$$0.5\, P(\text{B ינצח}) = 0.2$$

$$\Downarrow$$

$$P(\text{B ינצח}) = 1/3$$

סעיף ב

$$P(\text{ניצחון } B) = \sum_{i=1}^{\infty} P\begin{pmatrix} B \text{ ניצח} \\ \text{בתור מס' } i \end{pmatrix} =$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} P\begin{pmatrix} \text{ב } i-1 \text{ תורים} \\ \text{ראשונים אף} \\ \text{אחד לא} \\ \text{פגע בשני} \end{pmatrix} \cap \begin{pmatrix} \text{בתור } i \\ B \text{ ניצח} \end{pmatrix}$$

$$\underset{=}{\text{בת"ת}} \sum P\begin{pmatrix} \text{ב } i-1 \text{ תורים} \\ \text{ראשונים אף} \\ \text{אחד לא} \\ \text{ניצח} \end{pmatrix} \cdot P\begin{pmatrix} \text{בתור } i \\ B_2 \text{ ניצח} \end{pmatrix} =$$

$$\overset{?}{=} \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\cdot 0.6 + \frac{1}{2}\cdot 0.2\right)^{i-1} \cdot \frac{1}{2}\cdot 0.4 =$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} (0.4)^{i-1} \cdot \frac{1}{2}\cdot 0.4 = 0.2 \sum_{i=0}^{\infty} 0.4^i = \frac{0.2}{1-0.4} = 1/3$$

② <u>רעיון של פתרון</u>

האלג' לא מחזיר עץ פורש המפולג יחיד.

הוכחה

מספיק להראות כי קיים עץ פורש שאלג' מחזיר אותו בהסת' השונה מ' $\frac{1}{K}$ (כאשר K שווה למספר עצים פורשים של גרף נתון.

2

(4)

א)

הסתי מותנה

$$P(\pi_1 > \pi_n \mid \pi_1 > \pi_2, \pi_3, \ldots, \pi_i) = \frac{P(\pi_1 > \pi_2, \pi_3, \ldots, \pi_i, \pi_n)}{P(\pi_1 > \pi_2, \ldots, \pi_i)} =$$

$$= \frac{P\left(\text{בתמורה איך ראית כתת } n \text{ איברים איבר ראשון הכי גדול בין } i+1 \text{ איברים מסוימים}\right)}{P\left(\text{— " — בין } i \text{ איברים מסוימים}\right)} \overset{?}{=} \frac{\frac{1}{i+1}}{\frac{1}{i}} = \frac{i}{i+1}$$

ב) נגדיר סדרה של מ"מ $\{X_i\}_{i=1}^{n}$

$$X_j = \begin{cases} 1 & \text{if } \pi_1 > \pi_j \mid \pi_1 > \pi_2, \pi_3, \ldots, \pi_i \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

ולכן (מדוע?)

$$E(\pi_1 \mid \pi_1 > \pi_2, \ldots, \pi_i) = E\left(\sum_{j=1}^{n} X_j\right) =$$

$$= \sum_{j=1}^{i} EX_j + \sum_{j=i+1}^{n} EX_j = i + \sum_{j=i+1}^{n} P(X_j = 1)$$

$$\overset{(א)}{=} i + \sum_{j=i+1}^{n} \frac{i}{i+1} = i + (n-i)\frac{i}{i+1}$$

$$= \frac{i(n+1)}{i+1}$$

הערה

תוחלת אורך ח"מ של כבשה i, שווה ל $H_{0,i}$.

ולכן השאלה היא למצוא i שיביא למקסימום את $H_{0,i}$

כלומר

$$\underset{i}{\arg\max}\; H_{0,i}$$

פתרון

טענה 1

מטעמי סימטריה

$$H_{0,i} = H_{0,n-i}$$

טענה 2

$$\left.\begin{array}{l} \forall\; 0<i<j<\frac{n}{2} \\ \forall\; \frac{n}{2}<j<i\le n \end{array}\right\} \Rightarrow H_{0,i} < H_{0,j}$$

הוכחה

$$H_{0,j} \overset{?}{\geq} (1+H_{0,i})\cdot P\left(\begin{array}{c}\text{נגיע ל-}i\\ \text{לפני } n-i\end{array}\right) + (1+H_{0,n-i})\, P\left(\begin{array}{c}\text{נגיע ל-}n-i\\ \text{לפני } i\end{array}\right) =$$

$$\overset{\text{טענה 1}}{=} (1+H_{0,i})\cdot 1 > H_{0,i}$$

מטענה 2, ו-1 נובע כי התשובה לשאלה היא: $H_{0,\frac{n}{2}}$