מועד א׳, סמ׳ ב׳, תשס״ה

# שיטות הסתברותיות

מרצה: ד״ר רבינוביץ׳;

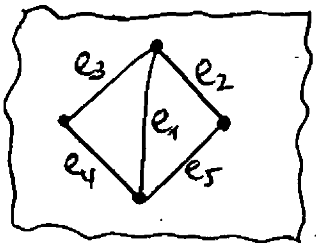
משך: 3 שעות;

יש לענות על 4 מתוך 5 השאלות.

**1.** שני אנשים, A ו-B, מתחרים בקליעה למטרה. בכל תור מטילים מטבע הוגן כדי לקבוע מי יורה. התחרות נמשכת עד הקליעה הראשונה. ידוע כי A קולע בהסתברות 0.8, ו-B קולע בהסתברות 0.4. חשב את ההסתברות כי B ינצח.

---

**2.** יהי G גרף קשיר לא מכוון הבא:




מעוניין בפרוצדורה הבאה היוצרת עץ פורש מקרי של G:

1. ניקח תמורה מקרית (אחידה) $\pi \in S_5$;
2. נגדיר $w(e_i) \leftarrow \pi(i)$, $i=1,2,3,4,5$;
3. נבחר עץ פורש מינימלי של G.

האם העץ הפורש המקרי שמתקבל מפולג אחיד?

---

**3.** יהי X משתנה מקרי $\geq 0$, ותהי $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה של מספרים חיוביים. נגדיר $X^{(n)} = \min\{X, b_n\}$. תהי $\{X_i\}$ סדרה של מ״מ ב״ת מפולגים כמו X, ו-$\{Y_i\}$ מפולגים כמו $X^{(n)}$.

(א) הראה כי

$$\Pr\left(\left|\sum_{i=1}^{n} X_i - E\left[\sum_{i=1}^{n} Y_i\right]\right| \geq \varepsilon \cdot b_n\right) \leq$$

$$\leq \Pr\left(\sum_{i=1}^{n} X_i \neq \sum_{i=1}^{n} Y_i\right) + \Pr\left(\left|\sum_{i=1}^{n} Y_i - E\left[\sum_{i=1}^{n} Y_i\right]\right| \geq \varepsilon b_n\right) \leq$$

$$\leq n\Pr(X > b_n) + nE(X^{(n)^2}) / \varepsilon^2 b_n^2 .$$

המשך!?

(ב) נתבונן במשחק הבא:
בשלב 0 השחקן מקבל 1\$; בכל שלב הבא, מוטל מטבע הוגן. אם יוצא "עץ" הסכום של השחקן מוכפל, והמשחק נמשך. אם יוצא "פלי" המשחק נפסק, והשחקן מקבל את כספו.

נסמן ב $S_n$ את הרווח של השחקן אחרי שהוא שיחק n משחקים. השתמש ב (א) כדי להראות כי ב"ת

$$\forall \varepsilon>0, \qquad Pr\left(S_n > (1+\varepsilon)\, n\log_2 n\right) \to 0 .$$

(הדרכה: בחר ב (א) $b_n=\lceil n\log_2 n\rceil$.)

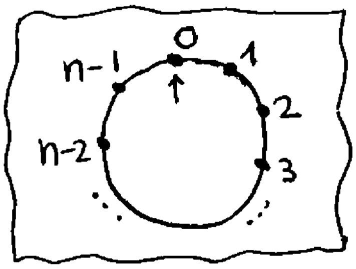
**4.** תהי $\pi$ פרמוטציה מקרית (אחיד) מ $S_n$.

(א) חשב את $Pr(\pi(1)>\pi(n) \mid \pi(1)>\pi(2),\pi(3),\dots\pi(i))$.

(ב) הראה כי

$$E\left[\pi(1) \mid \pi(1)>\pi(2),\pi(3),\dots \pi(i)\right] = \frac{(n+1)\cdot i}{i+1} .$$

**5.** יהי G גרף הבא:

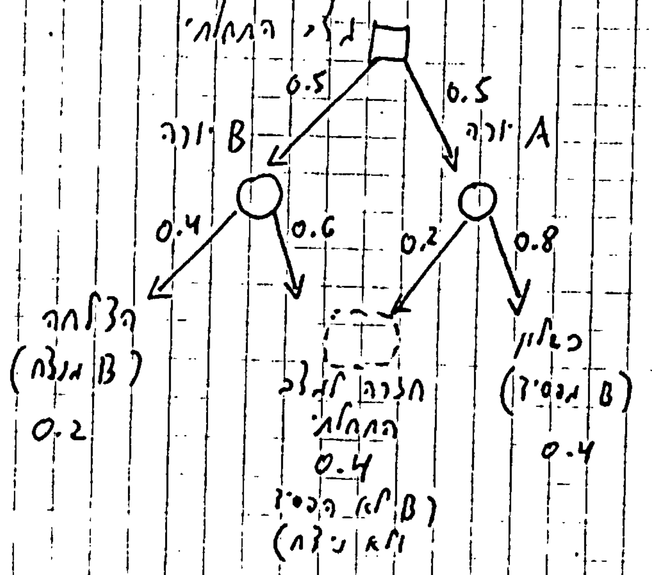



בצומת 0 נמצא זאב, בכל צומת אחרת נמצאת כבשה.
הזאב מבצע הילוך מקרי בגרף, ואוכל כבשה שהוא פוגש.

לאיזו כבשה יש תוחלת ח"ם מקסימלית?

בהצלחה!!

1.




ההסתברות ש B ינצח:

1. נצחון בתור ראשון:

$$\underbrace{0.5}_{\text{B יורה}} \times \underbrace{0.4}_{\text{הוא פוגע}} = 0.2$$

2. נצחון בתור שני:

$$\underbrace{0.4}_{\text{לא הפסיד ולא ניצח}} \times \underbrace{0.5 \times 0.4}_{\text{הוא יורה ופוגע}}$$

⋮

נצחון בתור i:

$$\underbrace{(0.4)^{i-1}}_{\text{בכל } i-1 \text{ התורות שעברו B לא ניצח ולא הפסיד}} \times \underbrace{0.5 \times 0.4}_{\text{B יורה ופוגע}}$$

⇐ ההסתברות ש B ינצח:

$$P(B \text{ wins}) = \sum_{i=1}^{\infty} (0.4)^{i-1} \times 0.2 = 0.2 \times \sum_{i=1}^{\infty} (0.4)^{i-1}$$

$$= 0.2 \times \frac{0.4^{0}(\overset{\text{שואף ל-0}}{0.4^{\infty}} - 1)}{0.4 - 1} \cancel{=} 0.2 \times \frac{-0.4}{-0.6} = 0.2 \times \frac{2}{3} = \frac{2}{15} \approx 0.133$$

-2 טעות חישוב
(שימוש לא נכון בנוסחא לסכום)

2. נב"ל ( ) מספר הצלעות שניתן לקבל בסה"כ: ~~מצומת שיש 4 ...~~
~~אם יכולה 3 צלעות לכן מספר הצלעות המקסימלי הוא בחירת 3 צלעות~~
~~מתוך 5. $\binom{5}{3}=10$ ...~~

כי לכל קבוצה חזקה הכוונה המקרי מספיק אחד נראה האם כל צלע
נספר בדיוק אותו מספר פעמים בכל אחת מ $120=5!$ הפרמוטציות השונות
על משקלי הקשתות.

נב"ל צלע בחירת 3 קשתות מ5 (10 אפשרויות) מספר הצלעות הוא: $\boxed{8}$.
ונראה כמה מהן יוצרות צלע:

ההבדל היחיד יהיה למספר הקשת המתאימה כנ"ל.

- 123 ✓
- 124 ✓
- 125 ✗
- 134 ✗
- 135 ✓
- 145 ✓
- 234 ✓
- 235 ✓
- 245 ✓
- 345 ✓

לכן, כל צלע מהמתאימים ע"י הקשתות הנ"ל צריך להופיע $\frac{120}{8}=15$
פעמים.

נב"ל צלע הצלע $e_1,e_2,e_3$. ברור כי אם שלושת הצלעות מקבלות
את הערכים $1,2,3$ נקבל בהכרח צלע מינימלי. יש $3!$ אפשרויות ✓
לסדר $1,2,3$, ולכל אפשרות כזו יש 2 אפשרויות ל $4,5$ עבור $e_5,e_4$.

סה"כ $6\times2=12$ אפשרויות.

בנוסף, אם $e_1,e_2$ מקבלים $\overset{\frown}{1,2}$ (בסדר כלשהו - לכן 2) וגם $e_5=3$ ו $e_3=4$ יתקבל שוב צלע $e_1,e_2,e_3$.

$12+2=14$.

אם $e_1,e_3$ מקבלים $\overset{\frown}{1,2}$ (בסדר כלשהו - לכן 2) וגם $e_4=3$, $e_2=4$ יתקבל שוב צלע $e_1,e_2,e_3$.

$14+2=16$ $16>15$ לכן צלע $e_1,e_2,e_3$ יופיע יותר מצלע אחר.

4. א.
$$Pr\left(\pi(1) > \pi(n) \mid \pi(1) > \pi(2), \pi(3) \ldots \pi(i)\right) =$$

לפי הסתברות מותנית:

נגדיר

$$\frac{Pr\left(\pi(1) > \pi(n) \cap \pi(1) > \pi(2), \pi(3) \ldots \pi(i)\right)}{Pr\left(\pi(1) > \pi(2), \pi(3) \ldots \pi(i)\right)} = (*)$$

הסתברות שמספר ראשון גדול מx מספרים היא $\frac{1}{x}$.

$\Leftarrow$ א. $Pr\left(\pi(1) > \pi(2), \pi(3) \ldots \pi(i)\right) = \frac{1}{i}$

ב. $Pr\left(\pi(1) > \pi(n) \cap \pi(1) > \pi(2), \pi(3) \ldots \pi(i)\right) =$

הסתברות שמספר גדול מתוך $i+1$ מספרים

לכן $\frac{1}{i+1}$

$$\Rightarrow (*) = \frac{\frac{1}{i+1}}{\frac{1}{i}} = \boxed{\frac{i}{i+1}}$$