

מבחן סוף סמסטר ב' תשנ"ד (מועד א)
חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 2.

הוראות לנבחן

- לבחינה זו שני חלקים.
את התשובות לשני החלקים יש לסמן בטופס הבחינה.
(א) יש לענות על כל השאלות.
(ב) אין להשתמש בכל חומר עזר, ניתן להשתמש במחשבוני. (יש איסור בשימוש במחשבוני עם אופציה גרפית)
(ג) משך הבחינה $2\frac{1}{4}$ שעות. אין יציאה במהלך הבחינה.
(ד) בדוק שהטופס בידך מכיל 5 עמודים.
(ה) יש לבדוק כי ענית על כל השאלות בגוף השאלון - מחברת הבחינה משמשת כטיוטא לטבלה ולא תיבדק כלל.

חלק ראשון - לפניך תשע טענות. סמן בטבלה האם הטענה נכונה או שאינה נכונה. אין צורך לתקן את הטענות השגויות. (5 נקודות לכל טענה)

1. אם טור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס אזי בהכרח $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n)^2$ מתכנס.

2. אם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ טור חיובי מתכנס אזי $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(a_n)^2}{1+a_n}$ בהכרח מתכנס.

3. אם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ טור מתכנס בהחלט ו $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ טור חיובי מתבדר אזי $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(a_n)^2}{b_1 + b_2 + \dots + b_n}$ בהכרח מתכנס.

4. שני המשפטים שלפניך אינם נכונים

(א) אם $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n)^2$ טור מתכנס אזי $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{|a_n|}{n} + 1\right)$ בהכרח מתכנס.

(ב) אם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ טור חיובי ונתון כי $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 a_n = \frac{1}{2}$

אזי הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ בהכרח מתכנס.

5. אם לפונקציה $z = f(x, y)$ קיימות נגזרות חלקיות $A = f_x(x_0, y_0)$ ו $B = f_y(x_0, y_0)$ בנקודה $M_0(x_0, y_0)$ אזי $z = f(x, y)$ רציפה בנקודה זו.

6. שתי הקבוצות הבאות הן קבוצות קשירות.

$$A = \{(x, y) \mid 2 \leq x \leq 4, 1 \leq y \leq 5\} \quad B = \{(x, y) \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 9\}$$

7. יהי m מספר קבוע כלשהו, אזי הגבול $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^8 y^4 + m y^2}{x^4 + y^2}$ קיים לכל ערך של m .

8. דיפרנציאביליות של פונקציה $z = f(x, y)$ בנקודה $M_0(x_0, y_0)$ לא בהכרח גוררת קיום הנגזרות החלקיות $A = f'_x(x_0, y_0)$ ו $B = f'_y(x_0, y_0)$.

9. דיפרנציאביליות של פונקציה $z = f(x, y)$ בנקודה $M_0(x_0, y_0)$ גוררת בהכרח את רציפות הפונקציה באותה נקודה.

חלק שני-לפניך תשע טענות. אם הטענה אינה נכונה תקן אותה כך שתהייה נכונה ורשום את תשובתך במקום המתאים בטבלה. (6 נקודות לכל טענה)

10. נתונה הפונקציה $f(x, y) = x - 3y + \sqrt{3xy}$, אזי הערך של הנגזרת המכוונת המקסימלית של הפונקציה בנקודה $(3, 4)$ שווה ל- $\frac{145}{16}$.

11. נסמן ב M את הערך המקסימלי שהפונקציה $f(x, y) = x^2 - y^2$ מקבלת עבור נקודות (x, y) המקימות את האילוץ $\frac{1}{2}x^2 + y^2 \leq 1$.

אזי הערך M מתקבל בדיוק בנקודה אחת.

12. הערך של האינטגרל $\iint_D e^{x/y} dx dy$ כאשר D הסוס ע"י $x = y^2, y = 0, y = 1$ וציר x, y שווה ל-1.

13. נתונה הפונקציה $f(x, y) = -6xy + 8x^3 - 3y^2$ אזי לפונקציה יש: 3 נק' קריטיות שאחת מינימום מקומי ואחת מקסימום מקומי ואחת אופק.

14. תהי $z(x, y) = f(u)$ כאשר $u = x^2 - 2y^2$ וידוע כי פונקציה $f(u)$ גזירה. אזי הערך של a עבורו מתקיים $y \frac{\partial z}{\partial x} = ax \frac{\partial z}{\partial y}$ הוא $a = -\frac{1}{2}$.

15. תהי $z = f(x, y)$ בעלת נגזרות חלקיות רציפות המקיימת:

$$f'_y(6, 9) = 5 \quad f'_x(6, 9) = 1$$

$$y = s^2 + \ln t, \quad x = s(2^t)$$

אזי הערך של הביטוי $\frac{\partial z}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial s}$ בנקודה $(s, t) = (3, 1)$ הוא: $6 \ln 2 + 5$.

16. אחרי החלפת סדר אינטגרציה באינטגרל $\int_0^2 \left(\int_0^{\sqrt{5-x}} f(x, y) dy \right) dx + \int_1^5 \left(\int_0^{\sqrt{5-x}} f(x, y) dy \right) dx$

$$\int_0^2 \left(\int_{5-y^2}^y f(x, y) dx \right) dy$$

מתקבל האינטגרל:

17. תהי f פונקציה בעלת נגזרות חלקיות רציפות. נגדיר $w = f(x - y, y - z)$ אזי הביטוי

$$\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y} = a \frac{\partial w}{\partial z}$$

אזי $a = 1$.

18. נתון טור: $A = \sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{2an^2 + 3}{n^2 + 2a}\right)$, כאשר $a \geq 0$ מספר ממשי.

אזי טור זה מתכנס לגבול סופי עבור כל מספר ממשי $a \geq 0$.

ברצונך

תשובות לחלק הראשון והשני

טענה מספר	הטענה נכונה	הטענה אינה נכונה
1		—
2	✓	
3	✓	
4		—
5		—
6	✓	
7		—
8		—
9	✓	

טענה מספר	הטענה נכונה	הטענה אינה נכונה ויש לתקנה באופן הבא
10		<p>הערך של הנגזרת המכוונת המקסימלית של הפונקציה בנקודה (3,4) שווה ל-.....</p> $\sqrt{\frac{145}{16}} = \frac{\sqrt{145}}{4}$
11		<p>M מתקבל בדיוק ב..... 2נקודות.</p>
12		<p>הערך של האינטגרל שווה ל..... $\frac{1}{9}$</p>
13		<p>לפונקציה יש 2נקודות קריטיות. 1הן מקסימום 1הן נקודות אוכף. הן מינימום</p>
14	✓	<p>a =</p>
15	X	<p>$\frac{\partial z}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial s} = 6 \ln 2 + 3t$</p>
16		<p>$\int_0^2 \int_{\frac{y}{2}}^{5-y^2} f(x,y) dx dy$</p>
17		<p>a = $-\frac{1}{2}$</p>
18		<p>טור זה מתכנס לגבול סופי עבור כל מספר ממשי a = $\frac{1}{9}$</p>

