ד"ר יעל צפקוביץ מלאכי.

מספרים מרוכבים

$\mathbb{N}$ = קבוצת המס' הטבעיים $=\{1,2,3,\dots\}$

$\mathbb{Z}$ = קבוצת המס' השלמים $=\{0,1,-1,2,-2,\dots\}$

כאשר מתקיים: $\mathbb{N}\subseteq\mathbb{Z}$

$\mathbb{Q}$ = קבוצת המס' הרציונליים $=\left\{\frac{m}{n}\,\middle|\,n\neq 0,\ m,n\in\mathbb{Z}\right\}$

כאשר מתקיים: $\mathbb{Z}\subseteq\mathbb{Q}$

$\mathbb{R}$ = קבוצת המס' הממשיים

$\mathbb{C}$ = קבוצת המס' המרוכבים $=\{a+bi \mid a,b\in\mathbb{R}\}$

$\boxed{\text{הגדרה/סימון: } \sqrt{-1}=i}$

מספר מרוכב $z=\{x+iy \mid x,y\in\mathbb{R}\}$

מספר מדומה = כל מספר שצורתו $a+b\cdot i$ כאשר: $\begin{cases} a,b\in\mathbb{R} \\ i^2=-1 \end{cases}$

סימון: $Re(z)=$ החלק הממשי של המס' כלומר a.

$Im(z)=$ החלק המדומה של המס' כלומר b.

הערות:

1. $a,b\in\mathbb{R}$.
2. עבור קבוצת המס' המרוכבים לא קיים יחס סדר (=יחס סדר גדול), כלומר אין אפשרות לקבוע אם מס' מרוכב אחד גדול ממספר מרוכב שני.
3. במספרים מרוכבים יש פתרון לכל משוואה אלגברית ממעלה n.

המשפט היסודי של האלגברה:

לכל משוואה ממעלה n $(n\in\mathbb{N})$ מהצורה:

$$a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\dots+a_1x^1+a_0=0$$

שבה כל המקדמים $a_n,a_{n-1},\dots,a_0$ הם מס' מרוכבים יש לפחות שורש אחד מרוכב.

ה-1

יום חמישי 25 אוקטובר 2007
10:46

מסקנה:

אין משוואה מרוכבת שאין לה פתרון.

(ד) $i^2=-1$

$$i^3 = i^2\cdot i = -1\cdot i = -i$$
$$i^4 = i^2\cdot i^2 = -1\cdot -1 = 1$$
$$i^5 = i$$
$$i^6 = i^2$$

כלומר קיימת מחזוריות מודולו 4

$$i^{1003} = i^3\cdot i^{4\cdot 250} = i^3\cdot 1$$

פעולות במספרים מרוכבים (הצגה אלגברית)

יהיו $a,b,c,d\in\mathbb{R}$ ונגדיר,

$$z_1 = a+bi$$
$$z_2 = c+di$$

(א) שוויון מספרים מרוכבים

$$\begin{cases}a=c\\ b=d\end{cases} \iff z_1=z_2$$

(ב) חיבור/חיסור שני מספרים מרוכבים

$$z_1+z_2 = a+c+i(b+d) \Leftarrow z_1+z_2$$

$$z_1-z_2 = (a-c)+i(b-d) \Leftarrow z_1-z_2$$

(ג) כפל מס' מרוכבים:

$$\Leftarrow z_1\cdot z_2$$

$$z_1\cdot z_2 = (a+bi)(c+di) = ac+bci+adi+bd\underbrace{i^2}_{=-1}$$
$$= ac-bd+i(bc+ad)$$

(ד) חישוב הצמוד של מספר מרוכב

הגדרה: בהינתן המספר המרוכב $z=a+bi$

אז הצמוד שלו יסומן $\bar{z}$ והוא מוגדר כך:

$$\bar{z}=a-bi$$

(ה) חילוק של מספרים מרוכבים

מתבצע ע"י כפל בצמוד של המכנה.

$$z_1=a+bi \quad , \quad z_2=c+di$$

$$\frac{z_1}{z_2}=\underbrace{\frac{a+bi}{c+di}\cdot\frac{c-di}{c-di}}_{a^2-b^2=(a-b)(a+b)}=\frac{(a+bi)(c-di)}{c^2-d^2i^2}=\frac{ac-bd+i(ad+bc)}{c^2+d^2}$$

$$=\frac{ac-bd}{c^2+d^2}+i\left(\frac{ad+bc}{c^2+d^2}\right)$$

תרגיל: נתון מספר מרוכב: $z=a+bi$. מצא את $\frac{1}{z}$.

$$\frac{1}{z}=\frac{1+0i}{a+bi}=\frac{1+0i}{a+bi}\cdot\frac{a-bi}{a-bi}=\frac{a-bi}{a^2-b^2i^2}=\frac{a}{a^2+b^2}-i\left(\frac{b}{a^2+b^2}\right)$$

פתרון משוואות

(1) מצא את z:

$$(-1+i)z=1-2i$$

$$z=\frac{1-2i}{-1+i}=\frac{1-2i}{-1+i}\cdot\frac{-1-i}{-1-i}=\frac{-1+2i-i+2i^2}{(-1)^2-(i^2)}$$

$$=\frac{-3}{2}+i\left(\frac{1}{2}\right)$$

② מצא מס' ממשיים x,y המקיימים:

$$(i-1)(x+iy)=6+2i$$

$$x+iy=\frac{6+2i}{i-1}=\frac{6+2i}{i-1}\cdot\frac{i+1}{i+1}=\frac{6i+2i^2+6+2i}{i^2-1^2}$$

$$=\frac{4}{-2}+i\left(\frac{8}{-2}\right)=-2-4i$$

$$\begin{cases} x=-2 \\ y=-4 \end{cases}$$

<u>הערה:</u> החסרון של ההצגה האלגברית היא חזקות ושורשים.

חשב:

$$\sqrt{8-6i}=z=a+bi$$

$$(a+bi)^2=8+6i$$

$$(a+bi)(a+bi)=8+6i$$

$$a^2+abi+abi+b^2i^2=8+6i$$

$$(a^2-b^2)+i(2ab)=8+6i$$

$$\begin{cases} a^2-b^2=8 \\ 2ab=6 \end{cases} \longrightarrow a=\frac{-3}{b}$$

$$\downarrow$$

$$8=\frac{9}{b^2}-b^2 \quad /\cdot b^2$$

$$t=b^2 \quad \text{הצבה} \leftarrow \quad 8b^2=9-b^4$$

$$t^2+8t-9=0$$

$$(t+9)(t-1)=0$$

$t=-9 \;\rightarrow\; b^2=-9 \;\rightarrow\; \emptyset$ b ממשי

$t=1 \;\rightarrow\; b^2=1 \;\rightarrow\; \boxed{b=1,\ a=-3}$, $\boxed{b=-1,\ a=3}$

פתור את המשוואה: ($z\in\mathbb{C}$)

$$z^2-(1-i)z-2+i=0$$

זו משוואה ריבועית ב-z,

נפתור עפ"י נוסחת שורשים:

$$\frac{(1-i)\pm\sqrt{(1-i)^2-4(1)(-2+i)}}{2}$$

$$\frac{(1-i)\pm\sqrt{1-2i-1+8-4i}}{2}$$

$$\frac{(1-i)\pm\sqrt{8-6i}}{2}$$

התרגיל הקודם (נק' ב)

$$\frac{(1-i)\pm(-3+i)}{2} \qquad \frac{(1-i)\pm(3-i)}{2}$$

בגלל הפלוס מינוס יוצאות אותן תוצאות

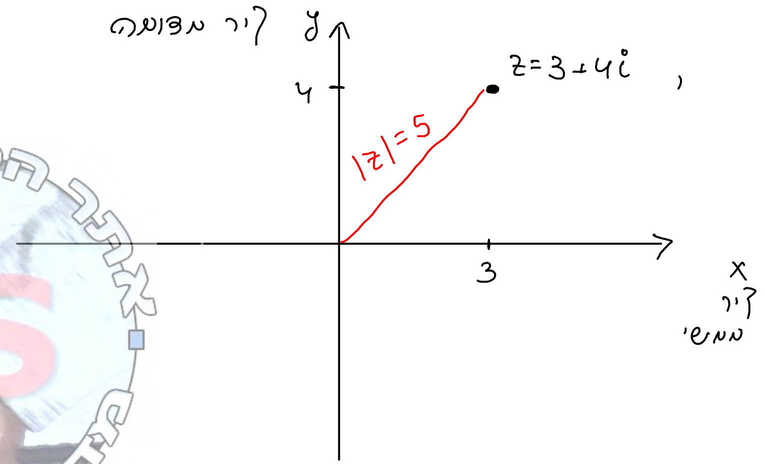
$$\frac{1-i+(3-i)}{2} \qquad \frac{1-i-3+i}{2} \qquad \frac{(1-i)-3+i}{2} \qquad \frac{1-i+3-i}{2}$$

$$\frac{4-2i}{2} \qquad \frac{-2}{2} \qquad \frac{-2}{2} \qquad \frac{4-2i}{2}$$

$$\boxed{2-i} \qquad \boxed{-1} \qquad \boxed{-1} \qquad \boxed{2-i}$$

משוואות עם ערך מוחלט

הגדרה: אם $z=x+iy$, $|z|=\sqrt{x^2+y^2}$



פתור את המשוואה:

$$5|z|i+5\bar{z}=3+i$$

נסמן: $z=x+iy$

$$5\sqrt{x^2+y^2}\,i+5(x-iy)=3+i$$

$$5\sqrt{x^2+y^2}\,i+5x-5yi=3+i$$

$$\begin{cases}5\sqrt{x^2+y^2}-5y=1\\ 5x=3 \Rightarrow x=\frac{3}{5}\end{cases}$$

הצבה

$$5\sqrt{\frac{9}{25}+y^2}-5y=1$$

$$5\sqrt{\frac{9}{25}+y^2}=1+5y \quad /^2$$

$$25\left(\frac{9}{25}+y^2\right)=1+10y+25y^2$$

$$9+25y^2=1+10y+25y^2$$

$$8=10y$$

$$y=\frac{8}{10}$$

$$\boxed{z=\frac{3}{5}+i\frac{4}{5}}$$

שימוש בנוסחאות וייטה לפתרון משוואות

תזכורת: ax^2+bx+c, x_1,x_2 פתרונות המשוואה.

$$\boxed{\begin{aligned}x_1+x_2&=\frac{-b}{a}\\ x_1x_2&=\frac{c}{a}\end{aligned}}$$

עבור משוואה ריבועית:

$z\in\mathbb{C},\ a\neq 0$

$$az^2+bz+c=0$$

שורשיה z_1,z_2 מקיימים:

$$\boxed{\begin{aligned}z_1+z_2&=\frac{-b}{a}\\ z_1\cdot z_2&=\frac{c}{a}\end{aligned}}$$

תרגיל: מצא את m, אם שורשי המשוואה:

$$z^2-(2+i)z+m+1=0$$

מקיימים:

$$(z_1)^2+(z_2)^2=-3+2i$$

נרשום:

$$\begin{cases} z_1+z_2=\frac{-b}{a}=2+i \\ z_1z_2=\frac{c}{a}=m+1 \end{cases}$$

עפ"י וייטה.

נעשה השלמה לריבוע של אגף שמאל

$$A^2+B^2=(A+B)^2-2AB$$

$$(z_1+z_2)^2-2z_1z_2=-3+2i$$

$$\Downarrow \text{הצבה}$$

$$(2+i)^2-2(m+1)=-3+2i$$

$$(2+i)(2+i)-2m-2=-3+2i$$

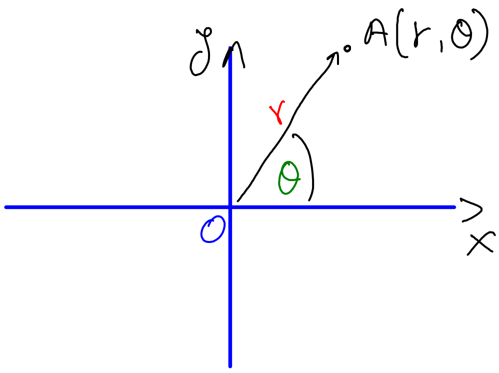
$$4+2i+2i+i^2-2m-2=-3+2i$$

$$1-2m+4i=-3+2i$$

$$4+2i=2m$$

$$\boxed{m=2+i}$$

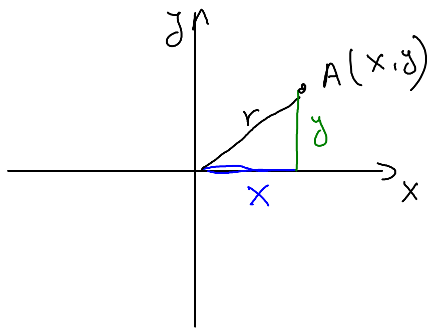
המישור של גאוס - הצגה טריגונומטרית



r= המודול, רדיוס וקטור, מרחק הנק' מהראשית

θ= הזווית הנוצרת בין הקטע OA והכיוון החיובי של ציר X.

כיצד נביא את $z=x+iy$ בצורה טריגונומטרית?



$\boxed{r=\sqrt{x^2+y^2}}$ עפ"י משפט פיתגורס

בהינתן x,y (הצגה אלגברית), כיצד נעבור ל- r ו-θ?

$$r=\sqrt{x^2+y^2}$$

$$\tan\theta=\frac{y}{x}$$

אך יש לבדוק באיזה רביע

$\downarrow$

$$\theta,\ \theta+180^\circ$$

$\downarrow$

המחזור של tan הוא 180°

Students	All
Take	Crack

$$z=r\,cis(\theta)=r(\cos\theta+i\sin\theta)$$

$$\cos\theta=\frac{x}{r}$$

$$\boxed{x=r\cos\theta}$$

$$\sin\theta=\frac{y}{r}$$

$$\boxed{y=r\sin\theta}$$

כיוון שני: בהינתן r,θ מהם x,y ?

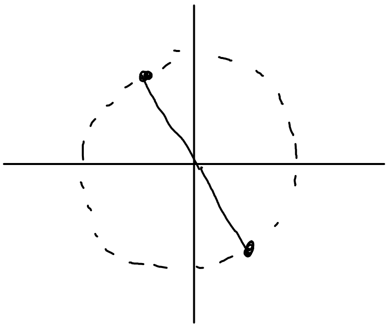
$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = \underbrace{r\cos\theta}_{x} + i\,\underbrace{r\sin\theta}_{y}$$

נתון: $z = 2-3i$ מצא הצגה קוטבית:

$$r = \sqrt{2^2+3^2} = \sqrt{13}$$

$$tg\theta = \frac{-3}{2} \Rightarrow \theta = -56.3 = 303.7^\circ$$

$$\theta + 180 = 123.6^\circ$$



$$z = \sqrt{13}\,cis(303.7^\circ)$$

$$z = \sqrt{13}\,cis(123.6^\circ)$$

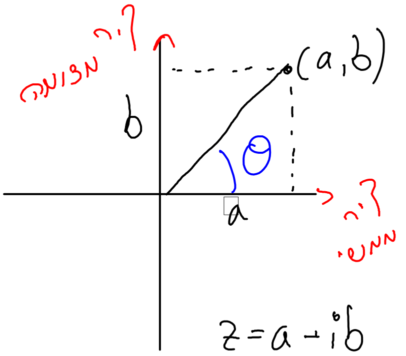
מצא הצגה אלגברית של:

$$z = 2\,cis60 = 2(\underset{\downarrow\,\frac{1}{2}}{\cos60} + i\underset{\downarrow\,\frac{\sqrt{3}}{2}}{\sin60}) = 1+\sqrt{3}i$$

הרצאה מספר 2 : מרוכבים

היום:

- הצגה טריגונומטרית
- משפט דה-מואבר
- מציאת שורשים מספר n
- תרגילים שונים



הצגה אלגברית: $z=a+ib$

הצגה טריגונומטרית: $z=r\,cis\,\theta$

יתרונות של כל הצגה:

טריגונומטרית	אלגברית
חיבור/חיסור ← ע"י שימוש בזהויות טריגונומטריות (מומלץ לעבור לאלגברית)	חיבור/חיסור
כפל	כפל
חילוק	חילוק
	העלאה בחזקה (חזקות) קטנות ע"י פעולת כפל
	הוצאת שורש (ריבועי)

כפל

נסתכל על 2 מספרים מרוכבים:

$$z_1=r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)$$
$$z_2=r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)$$

$$\boxed{z_1z_2=r_1r_2\left[\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2)\right]}$$

חילוק

עבור z_1,z_2:

$$\boxed{\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1}{r_2}\left[\cos(\theta_1-\theta_2)+i\sin(\theta_1-\theta_2)\right]}$$

הצמוד בהצגה טריגונומטרית:

$$z=r\,cis\,\theta=r(\cos\theta+i\sin\theta)$$

$$\boxed{\bar{z}=r(\cos\theta-i\sin\theta)=r\,cis(-\theta)}$$

← כיוון ש: cos זוגית ומקיימת $\cos(-\theta)=\cos\theta$

sin היא אי-זוגית ומקיימת $\sin(-\theta)=-\sin\theta$

לא צריך לדעת את הוכחה
זו לבחינה!

הוכחת הנוסחה של הכפל

$$z_1 z_2 = r_1 \cdot r_2 \left[\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)\right]$$

נעזר בנוסחאות:

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$

ובנוסחה:

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

נרשום:

$$z_1 \cdot z_2 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)\cdot r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$$

$$= r_1 r_2\left[\cos\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1\sin\theta_2 i + \sin\theta_1\cos\theta_2 i - \sin\theta_1\sin\theta_2\right]$$

$$= r_1 r_2\left[\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)\right]$$

דוגמא לשימוש בחילוק:

נתון: $z = r\,cis\,\theta$. הוכח: $\frac{1}{z} = \frac{1}{r}cis(-\theta)$

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{r(\cos\theta + i\sin\theta)} \cdot \frac{r(\cos\theta - i\sin\theta)}{r(\cos\theta - i\sin\theta)} = \frac{r(\cos\theta - i\sin\theta)}{r^2(\underbrace{\cos^2\theta + \sin^2\theta}_{1})}$$

כפל בצמוד של המכנה $\frac{\bar{z}}{\bar{z}}$.

$$= \frac{1}{r}(\cos\theta - i\sin\theta) = \frac{1}{r}cis(-\theta).$$

העלאה בחזקה - משפט דה-מואבר (הנוסחה נכונה לכל מספר שלם - $\mathbb{Z}$)

לכל שלם n, מתקיימת הנוסחה:

$$\left[r(\cos\theta + i\sin\theta)\right]^n = r^n\left[\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)\right]$$

הוכחה (עבור $n \in \mathbb{N}$)

באינדוקציה על n:

בדיקה עבור $n=1$ $\Leftarrow$

$$\left[r(\cos\theta + i\sin\theta)\right]^1 = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

מתקיים.

הנחה: נניח כי הנוסחה נכונה עבור n, כלומר:

$$[r(\cos\theta+i\sin\theta)]^n=r^n[\cos(n\theta)+i\sin(n\theta)]$$

ונוכיח שהנוסחה מתקיימת עבור n=n+1 :

$$[r(\cos\theta+i\sin\theta)]^{n+1}=r^{n+1}[\cos(n\theta+\theta)+i\sin(n\theta+\theta)]$$

נבדוק שמתקיים:

$$[r(\cos\theta+i\sin\theta)]^{n+1}=r(\cos\theta+i\sin\theta)\cdot\underbrace{[r(\cos\theta+i\sin\theta)]^n}_{r^n(\cos(\theta n)+i\sin(\theta n))}$$

הנחת האינדוקציה

$$=r^{n+1}[\cos\theta+i\sin\theta][\cos(n\theta)+i\sin(n\theta)]$$

$$=r^{n+1}[\cos(\theta n+\theta)+i\sin(\theta n+\theta)].$$

מש"ל.

תרגיל:

נתון: $z=\sqrt{3}+i$ חשב z^8.

$x=\sqrt{3}$ $y=1$

א) נמצא את ה-z בצורה טריגונומטרית:

$$r^2=x^2+y^2 \Rightarrow r^2=3+1=4 \Rightarrow r=2$$

$$tg\theta=\frac{y}{x} \quad tg\theta=\frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \theta=30^\circ \quad \cancel{\theta=30+180=210}$$

$$z=2cis30^\circ$$

$$\Rightarrow z^8=2^8\,cis(30\cdot8)=2^8\cdot cis(240)=256\,cis(240)$$

הצג תשובתך בהצגה אלגברית

$$= 256\,(\cos 240^\circ + i\sin 240^\circ) =$$

$$256\cdot\cos 240 + i\,256\cdot\sin 240 = -128 - 128\sqrt{3}\,i$$

שורשים מסדר n של מספר מרוכב

מקרה פרטי: שורשי היחידה: נחפש את הפיתרונות של המשוואה $z^n=1$ כאשר n מספר טבעי.

לדוגמא: נפתור המשוואה $z^3=1$.

ברור שאחד הפיתרונות של המשוואה הוא $z=1$ ומחפשים את שני השורשים הנוספים שהם מספרים מרוכבים.

נסמן ע"י z שורש נוסף של המשוואה: $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$

אם z הוא שורש של המשוואה $\Leftarrow$ ניתן להציב במשוואה:

$$[r(\cos\theta+i\sin\theta)]^3 = r^3(\cos 3\theta + i\sin 3\theta) = 1$$

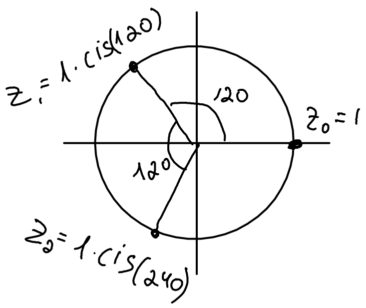
$$\cos\theta+\sin\theta \Rightarrow \begin{cases} r^3=1 \\ 3\theta = 0+360^\circ k \end{cases} \qquad r=1,\quad \theta = 120^\circ k,\quad \theta=\tfrac{2}{3}\pi k$$

הפיתרונות של המשוואה:

עבור $k=0$: $z_0 = 1(\cos 0 + i\sin 0) = 1$

עבור $k=1$: $z_1 = 1(\cos 120 + i\sin 120) = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

עבור $k=2$: $z_2 = (\cos 240 + i\sin 240) = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$



פיתרון המשוואה : $z^n=1$

עבור n טבעי, למשוואה הנ"ל יש n פתרונות שונים
$k=0,1,\dots,n-1$

$$z_k=\cos\frac{360^\circ k}{n}+i\sin\frac{360^\circ k}{n}$$

מקרה כללי: שורשים מסדר n של מספר מרוכב כלשהו:
למספר המרוכב $z^n=r(\cos\theta+i\sin\theta)$
יש n שורשים שונים;

$$\boxed{\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\theta+360k}{n}+i\sin\frac{\theta+360k}{n}\right)}$$

פתור את המשוואה, נקבל את התשובה בצורה אלגברית:

$$z^4+2-2\sqrt{3}i=0$$

$$z^4=\underbrace{-2+2\sqrt{3}i}_{\text{נעביר לצורה טריגונומטרית}}$$

$$r=\sqrt{(-2)^2+(2\sqrt{3})^2}=\sqrt{4+12}=4$$

$$\tan\theta=\frac{y}{x}\Rightarrow tg\theta=\frac{2\sqrt{3}}{-2}\longrightarrow \cancel{\theta=-60^\circ}$$

לא ברביע הנכון

$$\theta=120^\circ$$

$-60+180$

$$z^4=4(\cos(120)+i\sin(120))$$

$$\sqrt[4]{z^4}=\sqrt[4]{4}\left(\cos\frac{120+360k}{4}+i\sin\frac{120+360k}{4}\right)$$

$(k=0)$ $z_0=\sqrt{2}(\cos 30+i\sin 30)\longrightarrow\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}\right)$

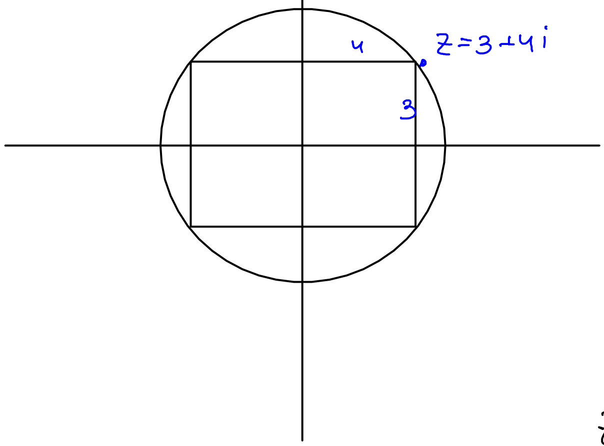
$(k=1)$ $z_1=\sqrt{2}(\cos 120+i\sin 120)\longrightarrow\sqrt{2}\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$(k=2)$ $z_2=\sqrt{2}(\cos 210+i\sin 210)\longrightarrow\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}-i\frac{1}{2}\right)$

$(k=3)$ $z_3=\sqrt{2}(\cos(300)+i\sin(300))\longrightarrow\sqrt{2}\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

תרגילים שונים

① במישור גאוס תסום ריבוע בתוך מעגל שמרכזו בראשית הצירים. אחד מקודקודי הריבוע מיוצג ע"י המס' המרוכב $z=3+4i$
מצא את קודקודי הריבוע האחרים.



פתרון: נעביר לתצוגה טריגונומטרית:

$$R=\sqrt{3^2+4^2}=5$$

$$tg\theta=\frac{4}{3}\Rightarrow\theta=53.13^\circ$$

$$z=5cis(53.13^\circ)$$

$\Downarrow$ קודקודים אחרים:

$$z_1=5cis(53.13+90)$$

$$z_2=5cis(53.13+180)$$

$$z_3=5cis(53.13+270)$$

② נתונה המשוואה: $(iz+1)^2=2-2\sqrt{3}i$

א. מצא את z_1,z_2

ב. הוכח: $\left|\frac{z_1-z_2}{z_1+z_2}\right|=\sqrt{3.25}$

פתרון:

א

$$i^2z^2+2iz+1=2-2\sqrt{3}i$$

$$0=z^2-2zi+1+2\sqrt{3}i$$

$$a=1\quad b=-2i\quad c=(+1+2\sqrt{3}i)$$

$$\frac{2i\pm\sqrt{4i^2-4+8\sqrt{3}i}}{2}=\frac{2i\pm\sqrt{-8+8\sqrt{3}i}}{2}=\frac{+2i\pm(\circledast)}{2}=\frac{2i\pm(2+2\sqrt{3}i)}{2}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} i\pm(1+\sqrt{3}i) \\ \to 1+(1+\sqrt{3})i \\ \to -1+(1-\sqrt{3})i \end{array}}$$

חישוב עזר:

$$x+yi=\sqrt{-8+8\sqrt{3}i}\quad /()^2$$

$$x^2+2xyi+y^2i^2=-8+8\sqrt{3}i$$

$$(x^2-y^2)+2xyi=-8+8\sqrt{3}i$$

$$\begin{cases} x^2-y^2=-8 \\ 2xy=8\sqrt{3} \end{cases}\to x=\frac{4\sqrt{3}}{y}$$

הצבה

$$y=\pm2\sqrt{3}$$

$$x_1=2\ ,\ x_2=-2$$

$\circledast$ $2+2\sqrt{3}i$, $-2-2\sqrt{3}i$ $\circledast$

הר2

יום חמישי 01 נובמבר 2007

ב.

האופציה הארוכה היא לכפול.

האופציה הפשוטה יותר: נוסחאות וויאטה

$$z_1+z_2=\frac{-B}{A}=\frac{-2i}{-1}=2i$$

$$z_1\cdot z_2=\frac{+C}{A}=\frac{-1+2\sqrt{3}\,i}{-1}=+1-2\sqrt{3}\,i$$

$$\frac{z_1z_2}{z_1+z_2}=\frac{1-2\sqrt{3}\,i}{2i}\cdot\frac{(-2i)}{(-2i)}=\frac{-2i-4\sqrt{3}}{4}=-\sqrt{3}-\frac{1}{2}i$$

$$\left|-\sqrt{3}-\frac{1}{2}i\right|=\sqrt{(-\sqrt{3})^2+(-\tfrac{1}{2})^2}=\sqrt{3+\tfrac{1}{4}}=\sqrt{3.25}$$

מש"ל.

הרצאה 3 - מטריצות

מטריצה $m\times n$ (m שורות, n עמודות)

הערה: הרצאה זו חסרה אצלי. אנא השלימו אותה ממקור אחר.

ה-4

יום חמישי 15 נובמבר 2007
10:22

תזכורות:

A^{-1} תיקרא המטריצה ההפכית של מטריצה A אשר

$$A\cdot A^{-1} = A^{-1}\cdot A = I$$

$$\left(A_{2\times 2} \;\middle|\; I_{2\times 2} \right) \xrightarrow[\text{שורה}]{\text{פעולות שקילות}} \left(I \;\middle|\; A^{-1} \right)$$

הערה: לא לכל מטריצה ריבועית קיימת מטריצה הפיכה.

דוגמא 1

נתונה המטריצה: $A=\begin{pmatrix}1&2&2\\2&1&2\\3&1&2\end{pmatrix}$. מצא את A^{-1}

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&2&1&0&0\\2&1&2&0&1&0\\3&1&2&0&0&1\end{array}\right) \begin{array}{l}R_2\to R_2-2R_1\\ R_3\to R_3-3R_1\end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&2&1&0&0\\0&-3&-2&-2&1&0\\0&-5&-4&-3&0&1\end{array}\right) R_2\to R_2-R_3$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&2&1&0&0\\0&2&2&1&1&-1\\0&-5&-4&-3&0&1\end{array}\right) \xrightarrow[R_2\to \frac{1}{2}R_2]{R_1\to R_1-R_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&0&-1&1\\0&1&1&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\0&-5&-4&-3&0&1\end{array}\right) R_3\to R_3+5R_2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&0&-1&1\\0&1&1&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\0&0&1&-\frac{1}{2}&2\frac{1}{2}&-1\frac{1}{2}\end{array}\right) R_2\to R_2-R_3 \left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&0&-1&1\\0&1&0&1&-2&1\\0&0&1&-\frac{1}{2}&2\frac{1}{2}&-1\frac{1}{2}\end{array}\right)$$

בדיקה:

$$A\cdot A^{-1} = \begin{pmatrix}1&2&2\\2&1&2\\3&1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&-1&1\\1&-2&1\\-\frac{1}{2}&2\frac{1}{2}&-1\frac{1}{2}\end{pmatrix} = I = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

מקרים בהם לא ניתן למצוא מטריצה הפיכה למטריצה A:

$\boxed{\text{דרגת } A \text{ לא שלמה}}$

דוגמא 2

בדוק האם קיימת A^{-1} עבור A הבאה: $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\\2&4&6\end{pmatrix}$

(רואים ש: $R_3=2R_1$)

תכונות של מטריצות הפיכות

תהיינה A,B מטריצות הפיכות ריבועיות מסדר n אזי:

א) אם קיימת A^{-1} היא יחידה.

ב) גם $A\cdot B$ הפיכה, ומקיימת: $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$

ג) אם A הפיכה, גם A^t הפיכה, ומתקיים: $(A^t)^{-1}=(A^{-1})^t$

הוכחת סעיף 1

נניח בשלילה כי ההפכית של A אינה יחידה ⇐ קיימות מטריצות D,C מסדר n כך ש: $A\cdot D=\underbrace{D\cdot A=I}$ וגם $A\cdot C=\underbrace{C\cdot A=I}$
כאשר $C\neq D$.

$$D=I\cdot D=C\cdot A\cdot D=C\cdot(A\cdot D)=C\cdot I=C$$

אסוציאטיביות

סתירה. מכאן שהמטריצה ההפכית היא יחידה.

הגדרות

1) מטריצות B,A נקראות מטריצות שקולות שורה אם ניתן להגיע ממטריצה אחת לשניה במספר סופי של פעולות דירוג אלמנטריות.

2) מטריצה A תקרא מטריצה מדורגת אם: 1) כל שורות האפסים (אם ישנן) מופיעות לאחר כל השורות ששונות מאפס. 2) מספר האפסים לפני האיבר המוביל בכל שורה גדל משורה לשורה.

3) מטריצה תקרא מדורגת מקוצרת אם: 1) A מדורגת 2) כל איבר מוביל הוא 1. 3) מעל ומתחת לכל איבר מוביל יש רק 0-ים.

משפט:

מטריצה מדורגת מצומצמת וריבועית $\Leftarrow I$

מטריצה מדורגת מצומצמת ולא ריבועית: ($\cong I$) למשל:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 & 6 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 9 & 9 & 1 \end{pmatrix}$$

תרגיל

הבא את A לצורה מדורגת

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 & 5 \\ 5 & 6 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & -1 & -3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -2 & 2 \\ 0 & -5 & 0 & 5 \\ 0 & -4 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & -3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

הגדרה:

דרגת המטריצה A היא מספר השורות השונות מ-0 אחרי דירוג.

מסומן ב- $r(A) = rank(A)$

פתרון מערכת משוואות ליניארית

הגדרה:

משוואה ליניארית בת n נעלמים היא משוואה מהצורה:

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n = b$$

או בצורה שקולה:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = b$$

a_i נקראים המקדמים

x_i נקראות הנעלמים

b הוא האיבר החופשי

הגדרה: אם $b=0$ המשוואה נקראת משוואה הומוגנית.

פתרון של מערכת משוואות ליניאריות אפשר לרשום בצורה מטריציונית כ:

$$Ax=b$$

מטריצת המקדמים:
$$\begin{pmatrix} a_{11}, & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1}, & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

וקטור נעלמים:
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

וקטור פתרונות:
$$\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

לדוגמא:

נסתכל על המערכת:

$$\begin{cases} 2x_1+3x_2+4x_3=3 \\ 3x_1-2x_2+5x_3=10 \\ 7x_1+9x_2+3x_3=1 \end{cases}$$

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & -2 & 5 \\ 7 & 9 & 3 \end{pmatrix}$$

$$x=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \qquad b=\begin{pmatrix} 3 \\ 10 \\ 1 \end{pmatrix}$$

הפתרון של המערכת הוא:

$$x_1=1$$
$$x_2=-1$$
$$x_3=1$$

מקיים את כל אחת מהמשוואות של המערכת

$$2\cdot1+3(-1)+4\cdot1=3 \quad \checkmark$$
$$3\cdot1-2(-1)+5=10 \quad \checkmark$$
$$7\cdot1+9(-1)+3\cdot1=1 \quad \checkmark$$

שיטת גאוס לפיתרון מערכת משוואות ליניאריות:

בניית מטריצה המורכבת מ- (A/b)
מבצעים פעולות שקולות שורה על מנת להביא את (A/b) לצורה מדורגת ומחזירים למערכת משוואות.

שיטת גאוס ג'ורדן:

כנ"ל. יש להביא את (A/b) לצורה מדורגת מצומצמת

פתור ע"י גאוס את מערכת המשוואות:

$$\begin{cases} x+2y+z=0 \\ 2x+2y+3z=3 \\ -x-3y=2 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 3 \\ -1 & -3 & 0 & 2 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

גאוס:
הגענו למטריצה מדורגת נחזור להצגה של מערכת משוואות

$$\begin{cases} x+2y+z=0 & x-2+1=0 & \Rightarrow x=1 \\ -2y+z=3 \Rightarrow & -2y+1=3 & \Rightarrow y=-1 \\ z=1 \Rightarrow & z=1 & \end{cases}$$

נמשיך לגאוס ג'ורדן

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{array}{l} x=1 \\ y=-1 \\ z=1 \end{array}$$

תרגיל נוסף

$$\begin{cases} x+2y+z=1 \\ 2x-y+z=3 \\ 3x+y+2z=1 \end{cases}$$

רואים כי $R_3=R_1+R_2$ כלומר תתאפס שורה.
$\Downarrow$
יהיו ∞ פתרונות?

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \to R_2+R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

סתירה
$3x+y+2z=4$
$3x+y+2z=1$

אין פתרון למערכת.

נירית לפל
niritlefel@gmail.com

שב"ה יפורסמו בימי ב' ויהיו להגשה עד 10 ימים.

הקדמה:

קבוצה היא אוסף של איברים.

- למשל, ניתן להגדיר קבוצה שהיא סופית $\{a,h,k\}$
- ניתן להגדיר גם קבוצה אינסופית $\{x \mid x>7, x\_is\_even\}$
- אין חשיבות לסדר הופעת האיברים בתוך הסוגריים. לדוגמא: $A=\{2,3,4\}=\{2,4,3\}$
- אין משמעות לחזרה על איברים יותר מפעם אחת. לדוגמא $A=\{2,3,4\}=\{2,3,4,3\}$

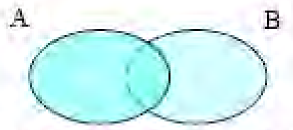
הגדרה- שייכות

תהי A קבוצה. נאמר ש- a שייך ל- A, ונסמן $\boxed{a \in A}$ אם a הוא **איבר ב- A**.
נאמר ש- a אינו שייך ל- A, ונסמן $\boxed{a \notin A}$ אם a **אינו איבר ב- A**.

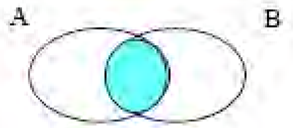
הגדרה- הכלה תהיינה A, B קבוצות. נאמר ש- A ***מוכלת*** ב- B, ונסמן $A \subseteq B$ אם
$\boxed{\forall x,\ x \in A \Rightarrow x \in B}$

דוגמא: אם $A=\{2,3,4\}$, ו- $B=\{2,3,4,5\}$ אזי $A \subseteq B$, אבל $B \not\subset A$, כי עבור $x=5$ מתקיים $x \in B \wedge x \notin A$

הגדרה – איחוד קבוצות תהיינה A, B קבוצות. נגדיר את קבוצת ***האיחוד*** של A ו- B כך:
$\boxed{A \cup B=\{x \mid x \in A \vee x \in B\}}$



הגדרה – חיתוך קבוצות תהיינה A, B קבוצות. נגדיר את קבוצת ***החיתוך*** של A ו- B כך:
$\boxed{A \cap B=\{x \mid x \in A \wedge x \in B\}}$



דוגמא: נגדיר $B=\{1,4,6,7,8\}$, $A=\{2,4,7,9,10\}$. אזי $A \cup B=\{1,2,4,6,7,8,9,10\}$,
$A \cap B=\{4,7\}$.

עד כה אנו מכירים את קבוצות המספרים הבאות:

$$\begin{array}{ccccccc} N & \subseteq & Z & \subseteq & Q & \subseteq & R \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \text{הטבעיים} & & \text{השלמים} & & \text{הרציונאליים} & & \text{הממשיים} \end{array}$$

הקבוצה: $R-Q$ = המספרים האי רציונליים

מספרים מרוכבים

באמצעות ההגדרה: $\boxed{i^2=-1}$ אנו יוצרים שורש למספרים שליליים.

מספרים מרוכבים

הגדרות וסימונים:

- **מספר מרוכב** הוא זוג סדור $z=(a,b)$ של מספרים ממשיים. נהוג לכתוב: $z=a+bi$
- למספר a קוראים **החלק הממשי** של z ומסמנים $\mathrm{Re}(z)=a$.
- למספר b קוראים **החלק המדומה** של z ומסמנים $\mathrm{Im}(z)=b$.
- המספר המרוכב $a-bi$ נקרא **הצמוד** למספר המרוכב $z=a+bi$. נסמן את המספר הצמוד של z ב- $\bar{z}$.

פעולות על מספרים מרוכבים:

יהיו $z=a+bi$ ו- $w=c+di$ שני מספרים מרוכבים אזי:

- **שוויון** מספרים מרוכבים מוגדר כך: $z=w$ אם״ם $a=c$ וגם $b=d$.
- **סכום** מספרים מרוכבים הוא מספר מרוכב המוגדר כך: $z+w=(a+c)+(b+d)i$.
- **מכפלה** של מספרים מרוכבים היא מספר מרוכב המוגדר כך:
  $z\cdot w=(a+bi)(c+di)=ac+bci+adi-bd=(ac-bd)+(bc+ad)i$.

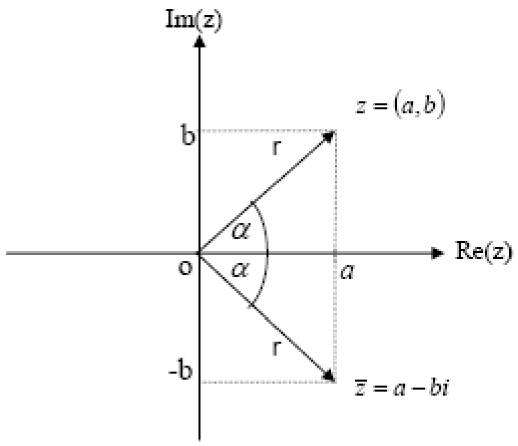
תרגילים:

1. פתור את המשוואות הבאות: א) $z^4+8z^2+15=0$ ב) $z^2=\bar{z}+1$.
2. הוכח כי $z\cdot\bar{z}$ הוא מספר ממשי טהור.
3. נתון: $z_1=-2\sqrt{3}+i,\quad z_2=1+2\sqrt{3}i$. חשב את $\frac{z_1}{z_2}$.
4. חשב: א) $(1-i)^2$ ב) $(1-i)^{40}$.

המישור המרוכב (מישור גאוס):

ניתן נסתכל על מספר מרוכב $z=a+bi$ כעל נקודה $z=(a,b)$ במישור, שבו:

- ציר ה- x מייצג את החלק הממשי של z (כלומר את $\mathrm{Re}(z)=a$).
- ציר ה- y מייצג את החלק המדומה של z (כלומר את $\mathrm{Im}(z)=b$).



① $z^4+8z^2+15=0$

נסמן $t=z^2$ ונקבל:

$t^2+8t+15=0$

$\frac{-8\pm\sqrt{64-60}}{2} \to \frac{-8\pm 2}{2} \to -5,\ -3$

המשך

$z^2=-3$ $\qquad$ $z^2=-5$

$$z^2=-3$$
$$z=\pm\sqrt{-3}$$
$$-1\cdot 3$$
$$z=\pm\sqrt{-1}\sqrt{3}$$
$$z=\pm\sqrt{3}\,i$$

$$z^2=-5$$
$$z=\pm\sqrt{-5}$$
$$z=\pm\sqrt{-1}\sqrt{5}$$
$$z=\pm\sqrt{5}\,i$$

ב) $z^2=\bar{z}+1$

נציב: $z=a+bi \Rightarrow \bar{z}=a-bi$ ונקבל:

$$(a+bi)^2=(a-bi)+1$$
$$(a^2-b^2)+i(2ab)=(a+1)+i(-b)$$
$$\begin{cases} a^2-b^2=a+1 \\ 2ab=-b \end{cases}$$

$b=0$

$$\begin{cases} 0=0 \\ a^2=a+1 \end{cases}$$
$$a^2-a-1=0$$
$$\frac{1\pm\sqrt{1+4}}{2}=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2} \begin{cases} \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

$$\boxed{z_1=\frac{1-\sqrt{5}}{2} \qquad z_2=\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$$

מקרה ב': $b\neq 0$

נחלק משוואה 2 ב-b:

$$2a=-1$$
$$a=-\frac{1}{2}$$

הצבה במשוואה 1

$$\frac{1}{4}-b^2=-\frac{1}{2}+1$$
$$-\frac{1}{4}=b^2$$
$$\varnothing$$

b ממשי ולכן אין פתרון.

ת-1

יום רביעי 31 אוקטובר 2007
17:10

② הוכח כי $z\bar{z}$ הוא ממשי תמיד:

$$z\bar{z} = (a+bi)(a-bi) = a^2-b^2i^2 = \underbrace{a^2+b^2}_{\text{ממשי}}$$

③ נתון: $z_2 = 1+2\sqrt{3}i$, $z_1 = -2\sqrt{3}+i$ חשב $\frac{z_1}{z_2}$:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{-2\sqrt{3}+i}{1+2\sqrt{3}i} = \frac{(-2\sqrt{3}+i)}{(1+2\sqrt{3}i)}\cdot\frac{(1-2\sqrt{3}i)}{(1-2\sqrt{3}i)} = \frac{-2\sqrt{3}+12i+i+2\sqrt{3}}{1+12}$$

הכפלנו בצמוד של המכנה

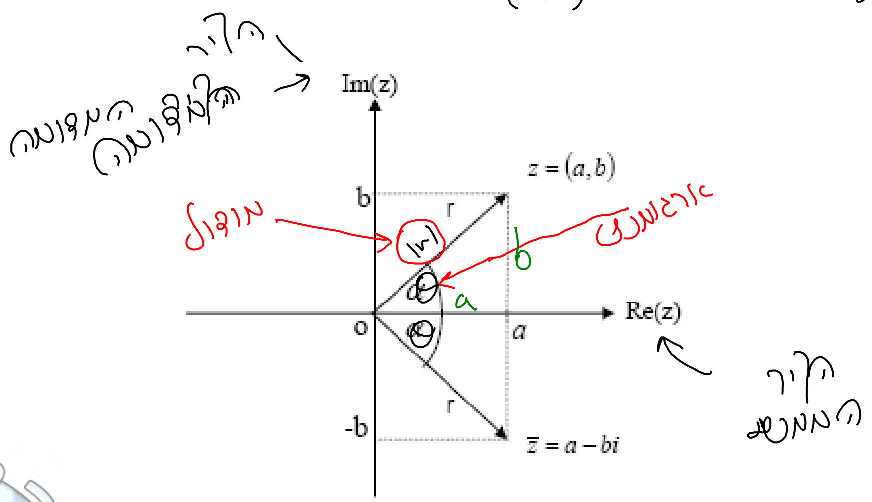
$$= \frac{13i}{13} = i.$$

④ א)

$$(1-i)^2 = 1^2-2i+i^2 = 1-2i-1 = -2i$$

ב)

$$(1-i)^{40} = ((1-i)^2)^{20} = (-2i)^{20} = 2^{20}(i^4)^5 = 2^{20}\cdot 1^5 = 2^{20}.$$



$$r = \sqrt{a^2+b^2}$$

$$tg\theta = \frac{b}{a}$$

מעבר מהצגה טריגונומטרית לאלגברית

$$\sin\theta = \frac{b}{r}$$

$$\boxed{\begin{aligned} b &= r\sin\theta \\ a &= r\cos\theta \end{aligned}}$$

$$z = a + ib$$
$$z = r\cos\theta + ir\sin\theta$$
$$= r(\cos\theta + i\sin\theta)$$
$$= r\,cis\,\theta$$

תרגילים: (מהדפדפת)

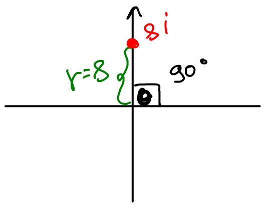
א) מצא מודול וארגומנט:

$$z = 1 - i$$
$$r = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$$
$$tg\theta = -1$$
$$\theta = -45 = 315.$$

(IV רביע <= $a>0$, $b<0$) tan שלילי

ב) מצא מודול וארגומנט:

$$z = 8i \rightarrow \begin{matrix} a=0 \\ b=8 \end{matrix}$$



תרגול זה חסר.

פולינומים

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x^1 + a_0$$

מעלת הפולינום, מסומנת ב $deg(P(x))$ היא החזקה הגבוהה ביותר המופיעה (שהמקדם שלה הוא לא אפס).

חיבור, חיסור וכפל - כרגיל

חילוק פולינומים

חלוקת הפולינום $P_n(x)$ בפולינום $D_m(x)$ היא הצגת $P_n(x)$ בצורה הבאה:

$$P_n(x) = D_m(x) \cdot Q(x) + R(x)$$

כאשר: $Q(x)$ היא מנת החלוקה
$R(x)$ היא שארית החלוקה

ומתקיים:

$$deg(R(x)) < m$$

תרגיל: חשב: $\dfrac{3x^3-16x^2+23x-2}{3x-1}$

$Q(x)$

$$\begin{array}{rl}
 & x^2-5x+6 \\
\hline
 & 3x^3-16x^2+23x-2 \;\big|\; 3x-1 \\
- & 3x^3-x^2 \\
\hline
 & -15x^2+23x-2 \\
- & -15x^2+5x \\
\hline
 & 18x-2 \\
- & 18x-6 \\
\hline
 & 4
\end{array}$$

$R(x)$

בכל שלב מחלקים את האיבר עם החזקה הגבוהה באיבר עם החזקה הגבוהה בצד ימין. מכפילים חזרה בכל האיבר בצד ימין.

$$\Downarrow$$

$$\frac{3x^3-16x^2+23x-2}{3x-1} = x^2-5x+6+\frac{4}{3x-1}$$

שורש של פולינום

מספר a הוא השורש של פולינום $P(x)$ אם מתקיים: $P(a)=0$.

המשפט היסודי של האלגברה

גירסה 1

לכל פולינום ממעלה n יש בדיוק n שורשים (לאו דווקא שונים) במספרים מרוכבים.

גירסה 2

כל פולינום ממעלה n ניתן לכתיבה בצורה הבאה:

$$P(x)=a_n(x-a_1)(x-a_2)\cdot\ldots\cdot(x-a_n)$$

כאשר $a_1,\ldots,a_n$ הם השורשים של $P(x)$.

המקדם של החזקה הגבוהה.

טיפ

1 הוא שורש של פולינום $\Longleftrightarrow$ סכום המקדמים של הפולינום הוא 0.

מסקנה

a הוא שורש של $P(x)$ $\Longleftrightarrow$ $P(x)$ מתחלק ב- $(x-a)$ ללא שארית.

תרגיל: מצאו את השורשים: $p(x)=7x^3-9x^2+x+1$

רואים שסכום המקדמים הוא 0 $\Leftarrow$ 1 שורש. שורש.

כדי למצוא את שאר השורשים נחלק ב- $(x-1)$:

$$\begin{array}{rl}
 7x^2-2x-1 & \\
\hline
7x^3-9x^2+x+1 & \big|\; x-1 \\
-\;(7x^3-7x^2) & \\
\hline
-2x^2+x+1 & \\
-\;(-2x^2+2x) & \\
\hline
-x+1 & \\
-\;(-x+1) & \\
\hline
0 &
\end{array}$$

נחפש את השורשים של:

$$7x^2-2x-1=0$$

$$\frac{2\pm\sqrt{4+28}}{14}=\frac{2\pm\sqrt{32}}{14}$$

$$\frac{2+2\sqrt{8}}{14}=\frac{1+\sqrt{8}}{7} \quad \text{שורש}$$

$$\frac{2-\sqrt{32}}{14}=\frac{1-\sqrt{8}}{7} \quad \text{שורש}$$

ת-3

יום רביעי 14 נובמבר 2007
17:21

ניחוש שורשים

יהי $P(x)=a_nx^n+\dots+a_1x^1+a_0$ אזי אם יש לו שורש רציונלי ומצומצם $\frac{m}{k}$ כך ש: m מחלק את a_0, k מחלק את a_n.

אזי ננסה את כל המחלקים של m, k ונראה מי הוא השורש

דוגמא:

$$P(x)=x^4-2x^3-5x^2+4x+6$$

$$\frac{m}{k}=\pm1,\pm2,\pm3,\pm6 \qquad \begin{cases} a_0=6 \\ a_n=1 \end{cases}$$

מציבים כאן ב- $P(x)$:

$P(1)=4\neq 0$ ⇐ 1 אינו שורש

$P(-1)=0$ -1 שורש

$P(3)=0$ 3 שורש

$\vdots$

מסקנה: אם P(x) פולינום עם מקדמים ממשיים ממעלה אי זוגית, אזי יש לו לפחות שורש ממשי אחד.